"十二五"江苏省高等学校重点教材

高等代数选讲

GAODENG DAISHU XUANJIANG

主编　朱世平　郭曙光　张　勇

南京大学出版社

"十二五"江苏省高等学校重点教材

编号：2015-2-080

江苏高校品牌专业建设工程资助项目

高等代数选讲

GAODENG DAISHU XUANJIANG

主编 朱世平 郭曙光 张 勇

南京大学出版社

内容简介

本书主要是对高等代数的内容和方法进行梳理、归纳和补充，并紧扣“选讲”课程的根本任务，突出重要结论和常用技巧以及概念的相互联系，内容包括多项式、行列式、线性方程组、矩阵、二次型、线性空间、线性变换、λ-矩阵、欧氏空间等内容.

图书在版编目(CIP)数据

高等代数选讲 / 朱世平，郭曙光，张勇主编.
— 南京：南京大学出版社，2016.9
ISBN 978-7-305-17686-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①朱… ②郭… ③张… Ⅲ. ①高等代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 238981 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮　编 210093
出 版 人 金鑫荣

书　　名 高等代数选讲
主　　编 朱世平　郭曙光　张　勇
责任编辑 刘　飞　蔡文彬　　编辑热线 025-83686531

照　　排 南京南琳图文制作有限公司
印　　刷 南京京新印刷厂
开　　本 787×1092　1/16　印张 16　字数 400 千
版　　次 2016 年 9 月第 1 版　2016 年 9 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-17686-9
定　　价 35.00 元

网址：http://www.njupco.com
官方微博：http://weibo.com/njupco
官方微信号：njuyuexue
销售咨询热线：(025) 83594756

前 言

本书是在教学团队自1999年起至今执教数学与应用数学(师范类)专业《高等代数选讲》课程的讲义基础上形成的,主要是对高等代数的内容和方法进行梳理、归纳和补充,包括多项式、行列式、线性方程组、矩阵、二次型、线性空间、线性变换、λ-矩阵、内积空间等内容.

本教材紧扣"选讲"课程的根本任务,突出重要结论和常用技巧以及概念的相互联系,提高学生对代数知识的掌握和学生的代数素养;强化解题方法指导,注重学生实战经验的提高,尽可能多地采用近几年的考研原题作为例题,并对这些考研题做方法的总结;设置合理的难度梯度,使学生能从简单问题到复杂问题逐步提高认识水平和解题能力.以普通本科院校学生实际为出发点,力争将思想方法系统化,使学生对理论、方法做到融会贯通,以夯实基础,拓宽思路,提升数学素养.突破传统教材编写手法与体例,按照考研复习的"全面了解、重点掌握、精做深思"的一般规律来安排教材各章节的编写内容,做到既循序渐进又重点突出.突出高等代数中矩阵方法的中心地位,强化矩阵思想在课程中的主导地位,培养和提高学生应用矩阵思想方法解决问题的能力.融入典型考研题和反映最新导向的考研题,强化解题方法与技巧的研究与解析,尽量将抽象问题具体化,复杂问题简单化.通过注解的方式对例题和习题解法和用法的一般性推广做出说明,便于学生进一步深入了解相关内容.

本教材作为《高等代数选讲》课程讲义已在我院"数学与应用数学(师范类)"、"信息与计算科学"、"统计学"三个本科专业使用了15届.

教材出版后,可供数学类专业《高等代数选讲》课程的教材和研究生考试的辅导教材,也可作为《高等代数》课程的学习参考书、教师的参考书.

本书共九章,其中郭曙光教授负责了1、5、9章节的编写,朱世平副教授负责了3、4、6、7章节的编写,张勇副教授负责了2、8章节的编写.

本书在编写过程中引用了少量同类教材的内容,没有注释标出,敬请原谅.对本书存在的问题和疏漏,我们诚恳地希望听到广大学生、教师的意见、建议和批评.

本书在编写过程中,得到南京大学出版社等的大力支持,在此,谨表谢忱!

编 者

2016.6

目　录

第一章　多项式

码上学习

一元多项式理论的主要内容可归纳为：

① 一般理论，包括数域 P 上的一元多项式环的概念、运算、导数及基本性质.

② 整除性理论，包括整除、最大公因式、互素的概念与性质.

③ 因式分解理论，包括不可约多项式、因式分解、重因式、实系数与复系数多项式的因式分解、有理系数多项式不可约的判定.

④ 根的理论，包括多项式函数、多项式的根、代数学基本定理、有理系数多项式的有理根求法、根与系数的关系等.

重点是整除与因式分解的理论，最基本的是带余除法定理、最大公因式的存在表示定理、因式分解唯一性定理.

难点是最大公因式的性质、多项式互素的性质、不可约多项式的概念及性质、有理系数多项式不可约性的判别.

第一节　数域 P 上的一元多项式环

1. 基本内容

(1) 数域的定义，基本数域.

(2) 一元多项式(零多项式)，多项式的次数. 多项式的相等，多项式的运算，一元多项式环.

(3) 关于一元多项式的运算的基本结论：

① 多项式的加法、减法和乘法满足一些运算规律.

② $\deg(f(x)+g(x))\leqslant\max(\deg(f(x)),\deg(g(x)))$,

$\deg(f(x)g(x))=\deg(f(x))+\deg(g(x))$.

③ 多项式乘积的常数项(最高次项系数)等于因子的常数项(最高次项系数)的乘积.

2. 难点解析与重要结论

① 多项式是代数学的基本研究对象之一，它与方程、线性空间、矩阵理论等都有联系，同时，还与将来进一步学习代数时遇到的环、有限域等有联系. 多项式的因式分解问题是多项式的核心问题，多项式的因式分解与系数的取值范围有关，例如，关于多项式 x^3-1，看成有理系数、实系数或复系数多项式，它们的因式分解情况各不相同. 数域的引入使得我们可以更为一般地讨论多项式的因式分解.

② 多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 中的"x"是一个符号(教材称之为文字),它可以是未知数,可以是矩阵,可以是线性变换等.这样,就使得我们可以利用多项式讨论更为广泛的代数对象.数域 P 上的多项式的全体构成的集合 $P[x]$关于加法和乘法构成环,也关于加法和数乘构成线性空间.

3. 基本题型与方法

关于一元多项式的基本概念,通常有一元多项式的比较次数法、比较系数法,用以确定多项式的次数及证明有关命题.

(1) 数域的判定

【例 1.1】 证明:数集 $Q(\sqrt{2}\mathrm{i})=\{a+b\sqrt{2}\mathrm{i}\mid a,b\in Q\}$ 作成一个数域.又问:此数域是否包含$\sqrt{2}$?

证 任取 $a+b\sqrt{2}\mathrm{i},c+d\sqrt{2}\mathrm{i}(a,b,c,d\in Q)$,则

$$a+b\sqrt{2}\mathrm{i}-c-d\sqrt{2}\mathrm{i}=(a-c)+(b-d)\sqrt{2}\mathrm{i}\in Q(\sqrt{2}\mathrm{i}).$$

又当 $a+b\sqrt{2}\mathrm{i}\neq 0$ 时,显然 $a-b\sqrt{2}\mathrm{i}\neq 0$,且

$$\frac{c+d\sqrt{2}\mathrm{i}}{a+b\sqrt{2}\mathrm{i}}=\frac{(c+d\sqrt{2}\mathrm{i})(a-b\sqrt{2}\mathrm{i})}{(a+b\sqrt{2}\mathrm{i})(a-b\sqrt{2}\mathrm{i})}=\frac{ac+2bd}{a^2+2b^2}+\frac{ad-bc}{a^2+2b^2}\sqrt{2}\mathrm{i}\in Q(\sqrt{2}\mathrm{i}).$$

故数集 $Q(\sqrt{2}\mathrm{i})$作成数域.

又$\sqrt{2}\notin Q(\sqrt{2}\mathrm{i})$.因若不然,设$\sqrt{2}=a+b\sqrt{2}\mathrm{i}(a,b\in Q)$,则 $b=0,\sqrt{2}=a$.这与$\sqrt{2}$是无理数,a 是有理数矛盾.

【例 1.2】 证明:若数域 P 包含$\sqrt{2}+\sqrt{3}$,则必包含$\sqrt{2}$与$\sqrt{3}$.

证 因 P 是数域且包含$\sqrt{2}+\sqrt{3}$,故必包含

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\sqrt{3}-\sqrt{2},$$

以及$(\sqrt{2}+\sqrt{3})\pm(\sqrt{3}-\sqrt{2})$,即 $2\sqrt{3}$与 $2\sqrt{2}$.从而包含$\sqrt{2}$与$\sqrt{3}$.

注:从证明可知 P 还包含$\sqrt{2}-\sqrt{3}$及$\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

【例 1.3】 证明:在实数域 $\mathbf{R}$ 与复数域 $\mathbf{C}$ 之间没有别的数域.

证 设 P 是包含 $\mathbf{R}$ 且比 $\mathbf{R}$ 大的任一数域,则必有 $a+b\mathrm{i}\in P$,其中 $a,0\neq b\in\mathbf{R}$.于是 $\mathrm{i}=(a+b\mathrm{i}-a)b^{-1}\in P$.从而 $P=\mathbf{C}$.即 $\mathbf{R}$ 与 $\mathbf{C}$ 之间没有别的数域.

注:由此题可知,数域绝大部分都是实数域的子域以及包含一部分实数和一部分虚数的数域.

(2) 多项式的运算

【例 1.4】 设 $f(x),g(x)$和 $h(x)$是实系数多项式.证明若

$$f^2(x)=xg^2(x)+xh^2(x),$$

则必有 $f(x)=g(x)=h(x)=0$.并请指出有不全为零复系数多项式满足上式.

证 设若 $f(x)\neq 0$,则 $f^2(x)$次数为偶数.但 $f^2=x(g^2+h^2)$,故 $g^2+h^2\neq 0$ 且 $x(g^2+h^2)$次数为奇数,矛盾.因此必有 $f=0$.从而 $g^2(x)+h^2(x)=0$.又因为 g,h 均为实系数多项式,故若 $g\neq 0$,则必 $h\neq 0$ 且 $g^2(x)+h^2(x)$的次数必大于零,矛盾.因此 $g=h=0$.

但存在不全为零的复系数多项式 f,g,h 满足上式. 例如 $f=0,g=x,h=\mathrm{i}x$.

【例 1.5】 设 $f(x)=2x^2-3,g(x)=8x^4-6x^2+4x-7$. 请问乘积 $f^3(x)g(x)$的所有系数之和是多少?

分析 此题若把乘积展开求出逐项系数后再求其和,则过程过于繁琐. 然而,若注意到任何多项式 $f(x)$的所有系数之和就是 $f(1)$,问题就迎刃而解.

解 因为 $f(1)=-1,g(1)=-1$,故 $f^3(1)g(1)=1$. 即乘积 $f^3(x)g(x)$的所有系数之和为 1.

第二节　整除、互素、最大公因式

1. 基本内容

(1) 整除的概念及其基本性质.

(2) 带余除法.

① 带余除法定理.

② 设 $f(x),g(x)\in F[x],g(x)\neq 0$,则

$$g(x)\mid f(x)\Leftrightarrow g(x)\text{除 }f(x)\text{的余式 }r(x)=0.$$

因此,多项式的整除性不因数域的扩大而改变.

(3) 最大公因式和互素.

① 最大公因式和互素的概念.

② 最大公因式的存在性和求法——辗转相除法.

③ 设 $d(x)$是 $f(x)$与 $g(x)$的最大公因式,则存在 $u(x),v(x)$使得 $f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)$. 反之不然.

④ $(f(x),g(x))=1\Leftrightarrow \exists\, u(x),v(x)$, s. t. $f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$.

⑤ $f(x)\mid g(x)h(x),(f(x),g(x))=1\Rightarrow f(x)\mid h(x)$.

$f(x)\mid h(x),g(x)\mid h(x),(f(x),g(x))=1\Rightarrow f(x)g(x)\mid h(x)$.

2. 难点解析与重要结论

① 对于数域 P 上的任意两个多项式 $f(x),g(x)$,其中 $g(x)\neq 0$,$g(x)\mid f(x)$的充要条件是 $g(x)$除 $f(x)$的余式为零.

② 若 $f(x)\mid g_i(x),i=1,2,\cdots,r$,则

$$f(x)\mid (u_1(x)g_1(x)+u_2(x)g_2(x)+\cdots+u_r(x)g_r(x)),$$

其中 $u_i(x)$是数域 P 上任意的多项式.

③ 对于 $P[x]$的任意两个多项式 $f(x),g(x)$,在 $P[x]$中存在一个最大公因式 $d(x)$,且 $d(x)$可以表示成 $f(x),g(x)$的一个组合,即有 $P[x]$中多项式 $u(x),v(x)$使 $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$.

④ $P[x]$中两个多项式 $f(x),g(x)$互素的充要条件是在 $P[x]$中存在多项式 $u(x),v(x)$使$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$.

⑤ 设 $f(x),g(x)\in P[x]$，$a,b,c,d\in P$，且 $ad-bc\neq 0$. 则

$$(af(x)+bg(x),cf(x)+dg(x))=(f(x),g(x)).$$

⑥ 如果 $(f(x),g(x))=1$，且 $f(x)\mid g(x)h(x)$，那么 $f(x)\mid h(x)$.

⑦ 如果 $(f(x),g(x))=1$，$(f(x),h(x))=1$，则 $(f(x),g(x)h(x))=1$.

⑧ 如果 $f_1(x)\mid g(x)$，$f_2(x)\mid g(x)$ 且 $(f_1(x),f_2(x))=1$，那么 $f_1(x)f_2(x)\mid g(x)$.

⑨ 判别条件

a. 若首项系数为 1 的多项式 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式 $\Leftrightarrow d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式中的次数最高者，且 $d(x)$ 的首项系数为 1.

b. $(f(x),g(x))=d(x)\Leftrightarrow d(x)$ 为形如：

$f(x)\varphi(x)+g(x)\psi(x)=d(x)$ 的多项式中次数是最低者且首项系数为 1. $\varphi(x),\psi(x)$ 为 $P[x]$ 中任意多项式.

证 $(\Rightarrow)$ 若 $(f(x),g(x))=d(x)$，则存在 $\varphi(x),\psi(x)\in P[x]$，使 $f(x)\varphi(x)+g(x)\psi(x)=d(x)$，若还有 $f(x)\varphi_1(x)+g(x)\psi_1(x)=r(x)$，且 $\partial(r(x))<\partial(d(x))$ 但由 $d(x)\mid f(x)$，$d(x)\mid g(x)$，知 $d(x)\mid r(x)$ 矛盾.

$(\Leftarrow)$ $d(x)$ 是形如 $f(x)\varphi(x)+g(x)\psi(x)=d(x)$ 中次数最低者，需要证明 $d(x)\mid f(x)$，否则有 $f(x)=d(x)q(x)+r(x)$，$r(x)\neq 0$，$\partial(r(x))<\partial(d(x))$. 则

$$f(x)-d(x)q(x)=r(x),$$

$$f(x)-[f(x)\varphi(x)+g(x)\psi(x)]q(x)=r(x),$$

即 $f(x)[1-\varphi(x)q(x)]+g(x)[-\psi(x)q(x)]=r(x)$，这与假设矛盾，故 $d(x)\mid r(x)$.

同理 $d(x)\mid g(x)$，且 $d(x)$ 能被 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的其他公因式整除，所以 $(f(x),g(x))=d(x)$.

⑩ $(f_1(x),g_1(x))(f_2(x),g_2(x))=(f_1(x)f_2(x),f_1(x)g_2(x),f_2(x)g_1(x),g_1(x)g_2(x))$.

⑪ 最小公倍式

定义 设 $f(x),g(x)\in P[x]$，若存在 $m(x)\in P[x]$，使 $f(x)\mid m(x)$，$g(x)\mid m(x)$，且 $m(x)$ 能整除 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任一最小公倍式，则称 $m(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最小公倍式. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的首项系数为 1 的最小公倍式记为 $[f(x),g(x)]$. 首项系数为 1 的多项式 $m(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最小公倍式，当且仅当 $m(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最小公倍式中次数最低者.

性质 a. 若 $(f(x),g(x))=d(x)$，$f(x)=d(x)f_1(x)$，$g(x)=d(x)g_1(x)$，则 $[f(x),g(x)]=d(x)f_1(x)g_1(x)$.

b. $(f(x),g(x))[f(x),g(x)]=f(x)g(x)$，即有 $[f(x),g(x)]=\dfrac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}$.

c. 若 $f(x)\mid m(x)$，$g(x)\mid m(x)$，则 $[f(x),g(x)]=m(x)\Leftrightarrow\left(\dfrac{m(x)}{f(x)},\dfrac{m(x)}{g(x)}\right)=1$.

d. $[f(x),g(x)]h(x)=[f(x)h(x),g(x),h(x)]$，($h(x)$ 首项系数为 1).

3. 基本题型与方法

关于一元多项式整除性理论，通常有多项式整除性的检验、最大公因式的求法、互素的判别、按幂展开等等，可采取综合除法、带余除法、辗转相除法、待定系数法、反证法及利用多

项式的整除、最大公因式、互素等定义与性质求证有关命题.

(1) 多项式的带余除法及整除

【例 2.1】 求以下 $g(x)$ 能整除 $f(x)$ 的条件:

(1) $g(x)=x^2-2ax+a^2, f(x)=x^3-3px+2q$;

(2) $g(x)=x^2-2ax+2, f(x)=x^4+3x^2+ax+b$.

分析 利用带余除法求使余式等于零的条件.

解 (1) 用 $g(x)$ 去除 $f(x)$,可得商和余式分别为:

$$q(x)=x-2a, r(x)=3(a^2-p)x+2(q+a^3).$$

令 $r(x)=0$,得 $a^2-p=0, q+a^3=0$,即 $p=a^2, q=-a^3$.

(2) 因 $\deg(f(x))=4, \deg(g(x))=2$,故商必为 2 次,且首系数为 1,令

$$q(x)=x^2+c_1x+c_0, f(x)=g(x)q(x).$$

展开后比较两端同次系数可得:

$$2a-c_1=0, 2-2ac_1+c_0=3,$$
$$2c_1-2ac_0=a, 2c_0-b=0.$$

由此解得:$a=0, b=2(c_1=0, c_0=1)$ 或 $a=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}, b=3\left(c_1=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, c_0=\frac{3}{2}\right)$. 这就是 $g(x)$ 整除 $f(x)$ 的条件.

【例 2.2】 设 $f|g_1-g_2, f|h_1-h_2$. 证明:$f|g_1h_1-g_2h_2$.

分析 利用多项式整除性质证明.

证 因为 $f|g_1-g_2, f|h_1-h_2$,故

$$f|h_1(g_1-g_2), f|g_2(h_1-h_2)$$

于是 f 整除 $h_1(g_1-g_2)+g_2(h_1-h_2)=g_1h_1-g_2h_2$.

【例 2.3】 证明:$x-a|x^n-a^n$. 又问:何时 $x+a|x^n-a^n$?

证 因为 $x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1})$,故 $x-a|x^n-a^n$. 又因为当 $n=2k, k\in\mathbf{N}$ 时,有

$$x^n-a^n=(x+a)[(x^{2k-1}-ax^{2k-2})+\cdots+(a^{2k-2}x-a^{2k-1})],$$

故 $x+a|x^n-a^n$.

注:本题也有另外一种证明方法:由于当 $x=a$ 时,$x^n-a^n=0$,故 $x-a|x^n-a^n$;又当 n 为偶数时,$(-a)^n-a^n=0$,故 $x+a|x^n-a^n$. 另外,当 n 为奇数时,由于 $(-a)^n-a^n=-2a^n$,故当 $a\neq 0$ 时,$x+a \nmid x^n-a^n$.

【例 2.4】 证明:$x^m-1|x^n-1\Leftrightarrow m|n$.

证 设 $m|n$ 且 $n=mq$,则

$$x^n-1=(x^m-1)(x^{m(q-1)}+x^{m(q-2)}+\cdots+x^m+1).$$

故 $x^m-1|x^n-1$.

反之,设 $x^m-1|x^n-1$ 且 $n=mq+r, 0\leqslant r<m$. 则

$$x^n-1=x^{mq+r}-1=(x^{mq}-1)x^r+x^r-1,$$

但因为 $x^m-1|x^n-1, x^m-1|x^{mq}-1$,故 $x^m-1|x^r-1$. 又因为 $0\leqslant r<m$,故 $r=0$. 从而 $m|n$.

注:由本题可得:$(x^m-1, x^n-1)=x^d-1\Leftrightarrow(m,n)=d$.

【例 2.5】 设

$$f(x)=x^{50}+x^{49}+\cdots+x+1,g(x)=x^{50}-x^{49}+x^{48}-x^{47}\cdots+x^2-x+1,$$

试证明：$f(x)g(x)$无奇数次项.

分析 应根据 $f(x)$与 $g(x)$的特征来寻求简洁方法.

证 因为易知$(x-1)f(x)=x^{51}-1,(x+1)g(x)=x^{51}+1$,故

$$(x^2-1)f(x)g(x)=x^{102}-1.$$

但因为 x^2-1 与 $x^{102}-1$ 无奇数次项,故 $f(x)g(x)$必无奇数次项.

【例 2.6】 证明如果多项式 $f(x)$对任何数 a,b 都有 $f(a+b)=f(a)+f(b)$,则必有 $f(x)=kx$,其中 k 为一常数.

分析 多项式 kx 的特点是常数项为零且次数是 1,只有一根(当 $k\neq 0$ 时). 从假设条件出发,以求 $f(x)$有这些特点.

证 显然,$f(0+0)=f(0)+f(0)$,所以 $f(0)=0$,所以 $f(x)$的常数项为 0. 若 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x(a_n\neq 0)$的次数 $n>1$,则必有 $f(x)\neq a_nx^n$. 因为若不然,则由 $f(1+1)=f(1)+f(1)$得:$2^na_n=2a_n$,矛盾. 这样,$f(x)$在复数域中必有根 a,且 $a\neq 0$. 于是又得

$$f(2a)=f(a)+f(a)=0,$$

$$f(ta)=f(a)+f(a)+\cdots+f(a)=0,t\in Z_+.$$

由此得有无穷多根,矛盾,故 $n=1$,从而 $f(x)=kx$.

【例 2.7】 设 $g=x^2-x-2$ 整除 $f=x^4+ax^3+2x^2+bx-2$,求 a,b.

解 直接用整除定义,因为 f 为 4 次,g 为 2 次,故商 q 必为 2 次;又因 f 与 g 的首系数相同,常数项也相同,故商的首系数和常数项都必为 1. 于是设 $q=x^2+kx+1$ 且

$$x^4+ax^3+2x^2+bx-2=(x^2-x-2)(x^2+kx+1),$$

比较两端同次项系数,得

$$a=k-1,2=-1-k,b=-1-2k,$$

由此得 $k=-3$ 且 $a=-4,b=5$.

【例 2.8】 求 $g(x)=x^4+x^2+1$ 整除 $f(x)=x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3t+2}$的条件.

分析 由 $g(x)|f(x)$知,$g(x)$的根都是 $f(x)$的根. 再注意到

$$x^6-1=(x^3+1)(x^3-1)=(x^2-1)(x^4+x^2+1),$$

即 x^6-1 的根除± 1 外都是 x^4+x^2+1 的根,且其中两个根还是三次单位根.

解 设 ε 是三次原根,则 $\varepsilon^3=1$ 且 $\varepsilon^2+\varepsilon+1=1$. 由此可知,$g(x)$的四根为$\pm\varepsilon,\pm\varepsilon^2$. 故 $g|f\Leftrightarrow\pm\varepsilon,\pm\varepsilon^2$ 都是 f 的根. 但由 $\varepsilon^2+\varepsilon+1=1$ 知 $f(-\varepsilon)=f(-\varepsilon^2)=0$. 故 $g|f\Leftrightarrow f(\pm\varepsilon)=f(\pm\varepsilon^2)=0$.

将$-\varepsilon,-\varepsilon^2$ 代入 $f(x)$验算,并由 $\varepsilon^2+\varepsilon+1=1$ 可知:

$$f(-\varepsilon)=(-1)^m+(-1)^{n+1}\varepsilon+(-1)^t\varepsilon^2,$$

$$f(-\varepsilon^2)=(-1)^m+(-1)^{n+1}\varepsilon^2+(-1)^t\varepsilon.$$

故 $g|f\Leftrightarrow$以上二式为零,亦即 m,t 为奇数而 n 为偶数或 m,t 为偶数而 n 为奇数.

【例 2.9】 证明:若 $x-1|f(x^n)$,则 $x^n-1|f(x^n)$.

证 因为 $x-1|f(x^n)$,故 $f(1)=f(1^n)=0$. 设 ε 为任意 n 次单位根,则

$$f(\varepsilon^n)=f(1)=0.$$

即 ε 为 $f(x^n)$的根. 故 x^n-1 的根都是 $f(x^n)$的根,因此 $x^n-1|f(x^n)$.

【例 2.10】 一个多项式 $f(x)$可以唯一地表示成另一个多项式 $g(x)$,$(\partial(g(x))\geqslant 1)$的

多项式,即:

$$f(x)=r_m(x)g^m(x)+r_{m-1}(x)g^{m-1}(x)+\cdots+r_1(x)g(x)+r_0(x) \tag{1}$$

其中 $r_i(x)\in P[x]$,$r_i(x)=0$ 或 $\partial(r_i(x))<\partial(g(x))$,$i=0,1,2,\cdots,m$,且这种表示法唯一.

证 可重复应用带余除法即得.

(2) 最大公因式的计算和证明

【例 2.11】 证明:$(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1\Leftrightarrow(f(x),g(x))=1$.

分析 关键是利用$(f(x),g(x))=1\Leftrightarrow$存在 $s(x),t(x)$,使得 $f(x)s(x)+g(x)t(x)=1$.

证 设$(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$,则存在 $s(x),t(x)$使

$$f(x)g(x)s(x)+(f(x)+g(x))t(x)=1.$$

由此得:

$$f(x)((g(x)s(x)+t(x))+g(x)t(x)=1,$$

故$(f(x),g(x))=1$.

反之,设$(f(x),g(x))=1$,则存在 $u(x),v(x)$有 $f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$,于是

$$f(x)(u(x)-v(x))+(f(x)+g(x))v(x)=1,$$
$$g(x)(v(x)-u(x))+(f(x)+g(x))u(x)=1,$$

故$(f,f+g)=(g,f+g)=1$,从而$(fg,f+g)=1$.

【例 2.12】 设 $f(x),g(x)$为两个非零多项式. 证明:

(1) 若对任意 $h(x)$,由 $f(x)|g(x)h(x)$必得 $f(x)|h(x)$,则$(f,g)=1$;

(2) 若对任意 $h(x)$,由 $f(x)|h(x),g(x)|h(x)$必得 $fg|h$,则$(f,g)=1$;

(3) $(f,g)=1\Leftrightarrow$对任意 $h(x)$都有相应的 $s(x),t(x)$使

$$f(x)s(x)+g(x)t(x)=h(x). \tag{1}$$

证 (1) 若不然,设$(f,g)=d$,$\deg(d)>0$,且

$$f(x)=d(x)f_1(x),g(x)=d(x)g_1(x),\deg(f_1)<\deg(f),$$

则 $f(x)|g(x)f_1(x)$,但 $f(x)\nmid f_1(x)$. 与假设矛盾,故必有$(f,g)=1$.

(2) 若不然,同 1 所设,可知有

$$f(x)|g(x)f_1(x),g(x)|g(x)f_1(x),$$

但 $f(x)g(x)\nmid g(x)f_1(x)$,此与假设矛盾. 故必有$(f,g)=1$.

(3) 若$(f,g)=1$,则有 $f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$,从而有

$$f(x)s(x)+g(x)t(x)=h(x),$$

其中 $s(x)=u(x)h(x),t(x)=v(x)h(x)$.

反之,若对任意 $h(x)$都有(1)式,则特别地,$h(x)=1$ 也有(1)式,故$(f,g)=1$.

注:(1),(2),(3)表明,具有这些性质的多项式必互素.

【例 2.13】 设 a,b,c,d 为常数,且 $ad-bc\neq 0$. 又

$$f_1(x)=af(x)+bg(x),g_1(x)=cf(x)+dg(x).$$

证$(f(x),g(x))=(f_1(x),g_1(x))$.

分析 证明本题的关键是熟悉整除性质和最大公因式定义.

证 令$(f(x),g(x))=d(x)$. 则由条件知:

$$d(x)|f_1(x),d(x)|g_1(x),$$

又若 $h(x)|f_1(x),h(x)|g_1(x)$,则由条件得

$$f(x)=\frac{1}{ad-bc}[df_1(x)-bg_1(x)],$$

$$g(x)=\frac{1}{ad-bc}[ag_1(x)-cf_1(x)].$$

从而可知：$h(x)\mid f(x)$，$h(x)\mid g(x)$. 于是 $h(x)\mid d(x)$，即 $d(x)$ 是 $f_1(x)$，$g_1(x)$ 的最大公因式，故得结论.

(3) 多项式互素的判定与证明

【例 2.14】 如果 $f(x)$，$g(x)$ 不全为零，证明：

$$\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))},\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)=1.$$

证 存在 $u(x)$，$v(x)$ 使 $(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$，又因为 $f(x)$，$g(x)$ 不全为 0，所以 $(f(x),g(x))\neq 0$，由消去律可得

$$1=u(x)\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}+v(x)\frac{g(x)}{(f(x),g(x))},$$

所以 $\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))},\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)=1.$

【例 2.15】 证明：如果 $f(x)$，$g(x)$ 不全为零，且 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$，那么 $(u(x),v(x))=1$.

证 由上题证明类似可得结论.

【例 2.16】 证明：如果 $(f(x),g(x))=1$，$(f(x),h(x))=1$，那么 $(f(x),g(x)h(x))=1$.

证 由假设，存在 $u_1(x)$，$v_1(x)$ 及 $u_2(x)$，$v_2(x)$ 使

$$u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x)=1 \tag{Ⅰ}$$

$$u_2(x)f(x)+v_2(x)h(x)=1 \tag{Ⅱ}$$

将(Ⅰ)(Ⅱ)两式相乘，得

$[u_1(x)u_2(x)f(x)+v_1(x)u_2(x)g(x)+u_1(x)v_2(x)h(x)]f(x)+[v_1(x)v_2(x)]g(x)h(x)=1$，所以 $(f(x),g(x)h(x))=1$.

【例 2.17】 证明：若 $f(x)$，$g(x)$ 都是数域 P 上次数大于零的多项式，且 $(f(x),g(x))=1$，则存在唯一的 $u(x)$，$\upsilon(x)\in P[x]$，使 $\partial(u(x))<\partial(g(x))$，$\partial(\upsilon(x))<\partial(f(x))$，且有

$$u(x)f(x)+\upsilon(x)g(x)=1.$$

证 只证存在性，唯一性自证.

因 $(f(x),g(x))=1$，故存在 $u_1(x)$，$\upsilon_1(x)\in P[x]$，使

$$u_1(x)f(x)+\upsilon_1(x)g(x)=1. \tag{Ⅰ}$$

若 $\partial(u_1(x))<\partial(g(x))$，$\partial(\upsilon_1(x))<\partial(f(x))$，结论已成立. 否则，由(Ⅰ)，若 $\partial(u_1(x))<\partial(g(x))$ 与 $\partial(\upsilon_1(x))<\partial(f(x))$ 不同时成立. 这时，作带余除法，并设

$$u_1(x)=q_1(x)g(x)+u(x), \tag{Ⅱ}$$

$$\upsilon_1(x)=q_2(x)f(x)+\upsilon(x). \tag{Ⅲ}$$

易证其中 $u(x)$，$\upsilon(x)$ 皆不为零. 事实上，若 $u(x)=0$，则(Ⅰ)成为

$$q_1(x)g(x)f(x)+g(x)\upsilon_1(x)=1,$$

于是 $g(x)$ 将整除等式的左端，从而 $g(x)\mid 1$，而这不可能. 同样可知 $\upsilon(x)\neq 0$. 所以

$$\partial(u(x))<\partial(g(x)),\partial(\upsilon(x))<\partial(f(x)), \tag{Ⅳ}$$

将(Ⅱ)与(Ⅲ)代入(Ⅰ)式,得

$[q_1(x)g(x)+u(x)]f(x)+[q_2(x)f(x)+v(x)]g(x)=1$,于是

$$(q_1(x)+q_2(x))f(x)g(x)+u(x)f(x)+v(x)g(x)=1, \tag{Ⅴ}$$

(Ⅴ)中 $q_1(x)+q_2(x)=0$,否则

$$f(x)g(x)\leqslant\partial((q_1(x)+q_2(x))f(x)g(x)).$$

因(Ⅳ)有

$$\partial(u(x)f(x))<\partial(f(x)g(x)),\partial(v(x)f(x))<\partial(f(x)g(x)).$$

所以,(Ⅴ)左端的次数大于 0,而右端次数等于 0,矛盾. 这样(Ⅴ)为

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1.$$

而 $\partial(u(x))<\partial(g(x))$,$\partial(v(x))<\partial(f(x))$,存在性得证.

注:降低式(Ⅰ)中 $u_1(x)$,$v_1(x)$的次数,用带余除法是最常用的方法.

第三节　因式分解理论

1. 基本内容

多项式的因式分解问题是本章的核心问题. 多项式的因式分解问题的讨论必须是在一定的数域 P 上进行,为了更好地叙述因式分解唯一性定理,引入了不可约多项式的概念,一个不可约多项式如果整除两个多项式的乘积,那么一定整除其中一个多项式,这一点是因式分解定理的重要依据. 多项式的标准分解式使得因式分解规范化. 多项式函数的概念有助于理解三个基本数域中的因式分解的结论,通常所提到的多项式函数(例如高等数学中)是定义在实数域上. 代数基本定理给出了复数域上因式分解的结论,之所以称为代数基本定理,是由于当时的代数研究还主要停留在多项式理论上. 重因式和重根也是讨论因式分解问题的重要工具. 以下是主要知识点.

(1) 不可约多项式

① 不可约多项式的概念.

② 不可约多项式 $p(x)$有下列性质:

$$\forall f(x)\in P[x]\Rightarrow p(x)\mid f(x)\text{或}(p(x),f(x))=1,$$

$$p(x)\mid f(x)g(x)\Rightarrow p(x)\mid f(x)\text{或 }p(x)\mid g(x).$$

③ 整系数多项式在有理数域上可约⇔它在整数环上可约.

④ 艾森斯坦判别法.

(2) 因式分解的有关结果

① 因式分解及唯一性定理.

② 次数大于零的复系数多项式都可以分解成一次因式的乘积.

③ 次数大于零的实系数多项式都可以分解成一些一次因式和某些二次不可约因式的乘积.

(3) 重因式

① 重因式的概念.

② 若不可约多项式 $p(x)$是 $f(x)$的 k 重因式($k\geqslant 1$),则 $p(x)$是 $f'(x)$的 $k-1$ 重因式.但逆命题不成立,即 $p(x)$是 $f'(x)$的 $k-1$ 重因式,$p(x)$未必是 $f(x)$的 k 重因式.但以下命题成立:若 $p(x)$是 $f'(x)$的 $k-1$ 重因式,且 $p(x)$又是 $f(x)$的因式,则 $p(x)$是 $f(x)$的 k 重因式.

③ $f(x)$没有重因式$\Leftrightarrow(f(x),f'(x))=1$.

④ 消去重因式的方法:$\dfrac{f(x)}{(f(x),f'(x))}$是一个没有重因式的多项式,它与 $f(x)$具有完全相同的不可约因式.

2. 难点解析与重要结论

① 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是一个整系数多项式,$\dfrac{r}{s}$是 $f(x)$的一个有理根,其中$(r,s)=1$,那么必有 $s\mid a_n,r\mid a_0$. 特别地,如果 $a_n=1$,那么 $f(x)$的有理根都是整数.

② 设 $p(x)$是数域 P 上的不可约多项式. 对于数域 P 上的任意两个多项式 $f(x)$,$g(x)$,如果 $p(x)\mid f(x)g(x)$一定推出 $p(x)\mid f(x)$或者 $p(x)\mid g(x)$.

③ 不可约多项式 $p(x)$是 $f(x)$的重因式的充要条件是 $p(x)$为 $f(x)$与 $f'(x)$的公因式.

④ 多项式 $f(x)$没有重因式的充要条件是 $f(x)$与 $f'(x)$互素.

⑤ 设 $f(x)$的标准分解式为 $f(x)=cp_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$,则

$$\frac{f(x)}{(f(x),f'(x))}=cp_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)$$

⑥ 设 $p(x)$是数域 P 上的不可约多项式. 对于数域 P 上的任意多项式 $f(x)$,必有$(p(x),f(x))=1$ 或者 $p(x)\mid f(x)$.

⑦ (因式分解唯一性定理)数域 P 上的每一个次数大于等于 1 的多项式 $f(x)$,都可以唯一的分解成数域 P 上的一些不可约多项式的乘积.

⑧ 实数域上不可约多项式只能是 1 次多项式或判别式小于零的 2 次多项式.

⑨ 有理数域上存在任意高次的不可约多项式.

⑩ 如果一非零的整系数多项式能够分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积,那么它一定能分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积.

⑪ (Eisecstein 判别法)设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots a_1x+a_0$ 是整系数多项式. 如果存在一个素数 p,使得

a. p 不能整除 a_n;

b. $p\mid a_i,i=0,1,2,\cdots,n-1$;

c. p^2 不能整除 a_0.

那么 $f(x)$在有理数域上不可约.

⑫ 设 $f(x)$是整系数多项式,作变量代换,令 $x=ay+b,a,b\in\mathbf{Z},a\neq 0$. 则 $g(y)=f(ay+b)$仍为整系数多项式,且 $f(x)$与 $g(y)$在有理数域及整数环上具有完全相同的可约性.

3. 基本题型与方法

关于一元多项式的因式分解理论,通常有多项式的可约性判别、因式分解、重因式的判

别等,可采用艾森斯坦判别法、求有理根的分解法、分离重因式法、辗转相除法以及利用不可约多项式的定义与性质求证有关命题.

(1) 不可约多项式的判定与证明

【例 3.1】 下列多项式在有理数域上是否可约?

① x^2+1;

② $x^4-8x^3+12x^2+2$;

③ x^6+x^3+1;

④ x^p+px+1,p 为奇素数;

⑤ $x^4+4kx+1$,k 为整数.

解 ① 因为±1 都不是它的根,所以 x^2+1 在有理数域里不可约.

② 利用艾森斯坦判别法,取 $p=2$,则此多项式在有理数域上不可约.

③ 首先证明:

命题 设有多项式 $f(x)$,令 $x=y+1$ 或 $x=y-1$,得

$$g(y)=f(y+1) \text{或} g(y)=f(y-1),$$

则 $f(x)$ 与 $g(y)$ 或者同时可约,或者同时不可约.

事实上,若 $f(x)$ 可约,即 $\exists f_1(x), f_2(x)$, s. t $f(x)=f_1(x)f_2(x)$,从而 $g(y)=f(y\pm1)=f_1(y\pm1)f_2(y\pm1)$,这就是说 $g(y)$ 也可约,反之亦然.

现在用它来证明 x^6+x^3+1 在有理数域上不可约. 令 $x=y+1$,则多项式变为

$$(y+1)^6+(y+1)^3+1=y^6+6y^5+15y^4+21y^3+18y^2+9y+3,$$

利用艾森斯坦判别法,取 $p=3$,即证上式不可约,因而 x^6+x^3+1 也不可约.

④ 设 $f(x)=x^p+px+1$,令 $x=y-1$,则

$$g(y)=f(y-1)=y^p-C_p^1y^{p-1}+C_p^2y^{p-2}-\cdots-C_p^{p-2}y^2+(C_p^{p-1}+p)y-p$$

由于 p 是素数,因而 $p\mid C_p^i(i=1,2,\cdots,p-1)$,但 $p^2\nmid p$,所以由艾森斯坦判别法,即证 $g(y)$ 在有理数域上不可约,因而 $f(x)$ 也在有理数域上不可约.

⑤ 已知 $f(x)=x^4+4kx+1$,令 $x=y+1$,可得

$$g(y)=f(y+1)=y^4+4y^3+6y^2+(4k+4)y+4k+2,$$

利用艾森斯坦判别法,取 $p=2$,即证 $g(y)$ 在有理数域上不可约,因而 $f(x)$ 也在有理数域上不可约.

【例 3.2】 证明:设 $p(x)$ 是次数大于零的多项式,如果对于任意多项式 $f(x)$,$g(x)$,由 $p(x)\mid f(x)g(x)$,可以推出 $p(x)\mid f(x)$ 或者 $p(x)\mid g(x)$,那么 $p(x)$ 是不可约多项式.

证 采用反证法. 设 $p(x)$ 可约,则有 $p(x)=p_1(x)p_2(x)$,那么由假设可得 $p(x)\mid p_1(x)$ 或 $p(x)\mid p_2(x)$,这是不可能的,因为后面两个多项式的次数均低于 $p(x)$ 的次数. 得证.

【例 3.3】 证明:次数大于 0 的多项式 $f(x)$ 是一个不可约多项式的方幂的充要条件是对任意的多项式 $g(x)$,必有 $(f(x),g(x))=1$,或者对某一个正整数 m,$f(x)\mid g^m(x)$.

证 ($\Rightarrow$)设 $f(x)=p^m(x)$,m 是一个正整数,$p(x)$ 是不可约多项式. $\forall g(x)\in p[x]$,于是有 $(p(x),g(x))=1$,或 $p(x)\mid g(x)$.

当 $(p(x),g(x))=1$ 时,有 $(p^m(x),g(x))=1$,即 $(f(x),g(x))=1$.

当 $p(x)\mid g(x)$ 时,有 $p^m(x)\mid g^m(x)$,即 $f(x)\mid g^m(x)$.