高等数学

（上册）

周 迈 张 阳 由同顺
陈万义 薛运华 编著

南開大學出版社

高等数学

（上册）

周　迈　张　阳　由同顺
陈万义　薛运华　编　著

南开大学出版社
天　津

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册 / 周迈等编著. —天津：南开大学出版社，2016.9

ISBN 978-7-310-05190-8

Ⅰ.①高… Ⅱ.①周… Ⅲ.①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 205263 号

南开大学出版社出版发行

出版人:刘立松

地址:天津市南开区卫津路 94 号　邮政编码:300071

营销部电话:(022)23508339　23500755

营销部传真:(022)23508542　邮购部电话:(022)23502200

*

天津午阳印刷有限公司印刷

全国各地新华书店经销

*

2016 年 9 月第 1 版　2016 年 9 月第 1 次印刷

210×148 毫米　32 开本　9.75 印张　277 千字

定价:28.00 元

如遇图书印装质量问题,请与本社营销部联系调换,电话:(022)23507125

内容提要

本书第 1 章讨论函数的基本概念和基本性质,函数的几何意义,复合函数、反函数和初等函数的概念等内容;第 2 章讨论数列和函数的极限及其性质,两个重要极限及其变形,无穷小(无穷大)的比较,计算数列和函数的极限,函数的连续性及连续函数的性质等内容;第 3 章讨论函数的导数和微分的概念及其性质,复合函数导数公式及计算不同类型函数的导数的方法等内容;第 4 章讨论微分中值定理,泰勒公式,导数应用,包括函数的单调性、凹凸性、极大值(极小值)和函数作图等内容;第 5 章讨论函数的原函数、不定积分的概念和性质,计算不定积分的换元法和分部积分法及计算不同类型被积函数的方法等内容;第 6 章讨论定积分的概念、性质及计算,定积分的换元公式和分部积分公式,定积分的应用等内容;第 7 章讨论空间直角坐标系,空间向量代数,空间直线和平面,二次曲面等内容。

前　言

自 2014 年起，南开大学高等数学公共课实行了新的教学计划，同时也对教学大纲做了相应调整，为了适应新的教学计划，我们编写了新教材，新教材曾以讲义的形式试用了两年。本书的编写是我们对讲义在试用过程中发现的差错进行修改后完成的。

本书秉承素质教育的理念。在我们看来，高等数学不仅仅是一门工具课，更有承担素质教育的功能，因此在我们的能力范围内尽量向读者展现微积分的精神内涵。我们认为，极限、导数和定积分等基本概念体现了微积分的精髓，因此本书强调对基本概念的解释。在对概念的叙述、解释上力求观点正确，因为面对的读者主要是非数学类的学生，不能将极限或者定积分等概念充分展开，所以本教材选择导数概念作为着力点。鉴于导数和微分概念的基本重要性，本书用了大量篇幅从不同的角度解释导数和微分的概念。本教材还强调微积分是一个有机的整体，其各个部分有着密切的联系，正因为如此，微积分学才是鲜活的、生机盎然的。为了体现素质教育的理念，我们以学生为本，力图对重要的知识点做详尽的解释，尽可能地方便学生使用，有利于学生自主学习。

近十几年来，互联网乃至移动互联网与教育教学不断融合，从单纯的在线教育到 O2O(线上线下)学习、甚至利用大数据技术揭示教学规律，无论是在技术上还是在教育理念上，教育领域的变革都方兴未艾，教育正在从传统的课堂走出去，不再受空间和时间的限制，更广泛地整合利用各方面的资源。为了适应这些变化，在南开大学出版社的帮助下，本书初步尝试以二维码的形式扩展教学内容，方便学生自主学习。

国内的高等数学教材汗牛充栋,教材的编写标准基本上源于教育部关于研究生高等数学统考的考试大纲,从历史的角度看仍隐约可见前苏联的高等数学教材的影响,这些因素在南开大学高等数学教学大纲中也有所体现。我们编写的这本教材的知识体系仍遵从教育部的考试大纲和前苏联的高等数学教材的知识体系,我们认为这本身是值得商榷的。事实上,莫斯科大学的《数学分析》(B. A. 卓里奇著)所体现的知识体系已有很大的变化,所以这也是本教材当前版本的一个遗憾。

本书具体编写分工如下:周迈承担了第1、6、7章的编写工作;陈万义承担了第2章的编写工作;薛运华承担了第3章的编写工作;张阳承担了第4章的编写工作;由同顺承担了第5章的编写工作;全书统稿工作由周迈完成。

编者

2016年5月

目　　录

第1章 函数

函数是一种反映变量之间依赖关系的数学模型，有着非常广泛的应用. 在微积分（或数学分析）里，函数是主要的研究对象，其中的基本问题可以概括为当自变量变化时函数是怎样变化的，**函数是本课程的出发点也是落脚点**.

1.1 实数

1.1.1 有理数和无理数

人类最早了解的数或学生最早接触的数是自然数，自然数集合用大写字母 $\mathbf{N}$ 表示，这里我们定义 $\mathbf{N}$ 表示全体非负整数，即 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$. 注意，由于采用的公理体系不同，有些教科书定义 $\mathbf{N}$ 为正整数全体，这两种定义是等价的，并无本质区别.

注 1.1.1 如果从运算的角度看，自然数集合包含数字 0 更合理一些，因为此时自然数集合 $\mathbf{N}$ 构成一个加法半群，半群的概念在数学专业的抽象代数课程中才会涉及，读者不必深究，本文在这里只想就自然数的定义做比较.

从数学的角度看，从自然数到实数的过程是一个数系扩张的过程，下面我们从代数运算的角度，粗略地讨论这个扩张过程. 我们知道，如果两个自然数做减法使其运算结果还是自然数的话，对参与运算的自然数是有要求的，为了能够灵活地进行减法运算，我们引入负整数，这样得到整数集合

$$\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

同样的道理,为了能够灵活地进行除法运算,我们引进有理数(或分数),即

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\middle| p,q\in\mathbf{Z},q>0,p,q\text{ 互质}\right\}.$$

我们通常讲代数运算是指有限次运算,但是在从有理数到实数的扩张过程中,我们会真正面临无穷的问题,这也是本课程中我们始终要面对的问题. 现在,我们考虑测量单位边长的正方形的对角线长度的问题,或测量单位半径的园的周长的问题,这里我们会遇到两个无理数$\sqrt{2}$和圆周率 π. 由于无理数是无限不循环小数,因此$\sqrt{2}$和圆周率 π 不可能成为测量值. 我们简单回顾一下我们是怎样处理圆周率 π 的. 在实际应用中,我们取圆周率 π 的近似值,例如 3. 1415926. 在讨论近似值的时候有一个有效数字的概念,这个概念与近似值的误差要求有关. 幸运的是,对于给定的误差要求,我们有能力计算出满足要求的 π 的近似值,对$\sqrt{2}$也是一样. 这样,我们有可靠而且实用的方法处理圆周率 π 或者$\sqrt{2}$这样的无理数. 如果从数学上理解上述过程,这个过程与我们后面将要讨论的极限概念有关,法国数学家柯西(Cauchy)就是基于上述想法构建实数理论的,这里不做更多的叙述. 有理数和无理数统称为实数,实数全体组成的集合记作 **R**. 实数的几何意义是实数轴上的点,实数与实数轴上的点是一一对应的,这一性质称为实数的完备性.

1.1.2 绝对值

设 a 为实数,a 的绝对值记为$|a|$,其定义如下

$$|a|=\begin{cases}a, & a>0.\\ 0, & a=0.\\ -a, & a<0.\end{cases}$$

绝对值的几何意义是实数轴上两点间的距离,设 $a,b\in\mathbf{R}$,则$|a-b|$表示实数轴上的点 a 到点 b 的距离. 绝对值有如下几个基本性质:

(1) $|ab| = |a||b|$, $a,b \in \mathbf{R}$;

(2) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$, $a,b \in \mathbf{R}$;

(3) $|a-b| \geqslant |(|a| - |b|)|$, $a,b \in \mathbf{R}$;

(4) $|a| \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant a \leqslant b$, $a,b \in \mathbf{R}$.

1.1.3 区间与邻域

最常用的实数集合是区间,归纳如下:设 $a,b \in \mathbf{R}$, $a<b$,

有限开区间$(a,b) = \{x \in \mathbf{R} | a<x<b\}$

有限闭区间$[a,b] = \{x \in \mathbf{R} | a \leqslant x \leqslant b\}$

有限半开半闭区间$(a,b] = \{x \in \mathbf{R} | a < x \leqslant b\}$,

$$[a,b) = \{x \in \mathbf{R} | a \leqslant x < b\}.$$

无限区间$(a,+\infty) = \{x \in \mathbf{R} | x>a\}$,$(-\infty,a] = \{x \in \mathbf{R} | x \leqslant a\}$,$(-\infty,+\infty) = \{x | x \in \mathbf{R}\}$.

类似可定义区间$[a,+\infty)$,$(-\infty,a)$.

邻域是特殊的区间. 设 δ 表示一个正实数,$x_0 \in \mathbf{R}$,区间$(x_0-\delta, x_0+\delta)$称为点 x_0的一个邻域,集合$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$称为点 x_0 的一个空心邻域.

习题 1.1

1. 用数学归纳法证明下列不等式

(1) $\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)} = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \dfrac{1}{\sqrt{(2n+1)}}$;

(2) $n! \leqslant \left(\dfrac{(n+1)}{2}\right)^n$;

(3) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$均为正数,试证

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时,等号成立.

1.2 函数

1.2.1 一元函数的定义

定义 1.2.1 x,y 表示两个变量,D 是一个实数集,若对 D 中的每一个 x 值,根据某一法则 f,变量 y 都有唯一确定的值与它对应,我们就说变量 y 是变量 x 的函数. 记作

$$y = f(x),\ x \in D,$$

式中 x 称为自变量,y 称为因变量(或函数值),自变量 x 的变化范围 D 称为函数 $y = f(x)$ 的**定义域**,因变量 y 的变化范围称为函数 $y = f(x)$ 的**值域**.

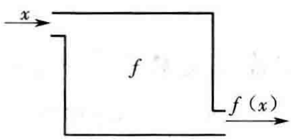

图 1-1

为了便于理解,可以把函数想象成一个数字处理装置. 当输入(定义域的)一个值 x,则有(值域的)唯一确定的值 $f(x)$ 输出. 如图 1-1 所示.

注 1.2.1 从上述定义中可以看出,定义域 D 和对应关系 f 是函数的两个关键要素,这两者确定之后函数也就确定了.

注 1.2.2 可以用自然的方式定义函数的四则运算.

定义 1.2.2 设有两个函数 $f_1(x)$, $f_2(x)$,其定义域分别为 D_1, D_2,满足(1) D_2 包含 D_1,(2)当 $x \in D_1$ 时 $f_1(x) = f_2(x)$,则称 $f_1(x)$ 是 $f_2(x)$ 在 D_1 上的限制,记为 $f_1(x) = f_2(x)\mid_{D_1}$,称 $f_2(x)$ 是 $f_1(x)$ 在 D_2 上的延拓(或扩张).

例 1.2.1 求 $f(x) = |x|$ 的自然定义域.

解 自然定义域的含义是使表达式 $|x|$ 有意义的 x 值全体,显然该函数的自然定义域是 $(-\infty, \infty)$. 另外,注意该函数可表示为

$f(x)=\sqrt{x^2}$.

例 1.2.2　求 $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ 的自然定义域.

解　要使函数有意义,应满足 $4-x^2\geqslant0$,即 $x^2\leqslant4$,因此 $-2\leqslant x\leqslant2$. 所以,函数的自然定义域为$[-2,2]$.

例 1.2.3　求 $f(x)=\dfrac{\lg(2-x)}{x-1}$ 的自然定义域.

解　要使函数有意义,应满足 $2-x>0$ 且 $x-1\neq0$,即 $x<2$ 且 $x\neq1$,所以,函数的自然定义域为$(-\infty,1)\cup(1,2)$.

1.2.2　一元函数的表示法

常用的一元函数表示法有三种:

1. 表格法

当函数的自变量取有限个值时,将自变量的值与对应的函数值列成表比较方便,这种表示函数的方法称为表格法.

2. 图像法

在平面直角坐标系中用图形来表示函数关系的方法,称为图像法.

例如,气象台用自动记录仪把一天的气温变化情况自动描绘在记录纸上(如图 1-2 所示),根据这条曲线,就能知道一天内任何时刻的气温了.

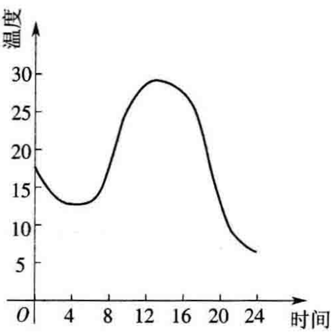

图 1-2

事实上一元函数的几何意义是平面直角坐标系中的图形,通常为曲线,可表示为如下平面点集

$$\text{graph}f=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\},$$

其中 D 是函数 $f(x)$ 的定义域,该集合称为函数 $f(x)$ 的图像. 由函数值的唯一性可知,一元函数对应的平面曲线应满足如下性质,即在平面直角坐标系中做垂直于 x 轴的直线,该直线与曲线最多有一个交点;反之,如果一条平面曲线有上述性质,则该曲线是某个一元函数的图像.

3. 公式法

将自变量和因变量之间的关系用数学表达式来表示的方法,称为公式法. 这些数学表达式也称为解析表达式,这里介绍三种解析表达式,分别为**显函数**、**隐函数**和**分段函数**.

(1) 显函数:函数 y 由 x 的解析式直接表示出来. 例如 $y=x^2-1$.

(2) 隐函数:函数的自变量 x 和因变量 y 的对应关系是由方程 $F(x,y)=0$ 确定,例如 $y-\sin(x+y)=0$.

(3) 分段函数:函数在其定义域的不同范围,具有不同的解析表达式,很多常见或重要的函数需要用这种方式表示.

例 1.2.4 符号函数(图 1-3)

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

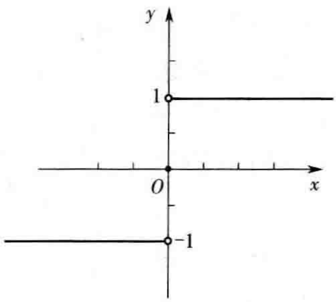

图 1-3

表达式$\frac{|x|}{x}$反映的是 x 的符号,故称符号函数,显然符号函数的自然定义域是$(-\infty,\infty)$.

例 1.2.5　狄里赫莱函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 是有理数时},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数时}.\end{cases}$$

显然,狄里赫莱函数的自然定义域是$(-\infty,\infty)$.

例 1.2.6　黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{m}{n}, & x=\dfrac{m}{n},\dfrac{m}{n}\text{是既约分数},\\ 0, & x\text{ 是无理数}.\end{cases}$$

显然,黎曼函数的自然定义域是$(-\infty,\infty)$.

例 1.2.7　取整函数 $y=[x]$,其中$[x]$表示不大于 x 的最大整数(也称为 x 的最大整数部分)(图 1-4),例如$[\pi]=3$,$[-0.2]=-1$,显然,取整函数的自然定义域是$(-\infty,\infty)$.

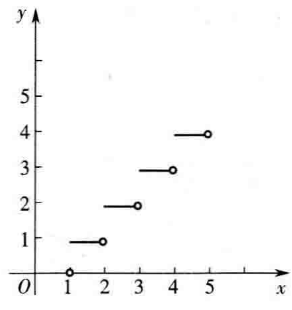

图 1-4

例 1.2.8　$y=[x]-x$. 显然,该函数的自然定义域是$(-\infty,\infty)$.

1.2.3　复合函数

定义 1.2.3　如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$,函数 $\varphi(x)$的值域包含在函数$f(u)$的定义域中,由式 $y=f(u)=$

$f[\varphi(x)]$所确定的函数称为复合函数.

如前所述,若函数能被想象成一个数字处理装置,那么复合函数也能被想象成若干个简单的数字处理装置串联起来形成的一个复杂的数字处理装置(如图 1-5 所示),其中 $g(x)$既是第一台装置的输出,又是第二台装置的输入.

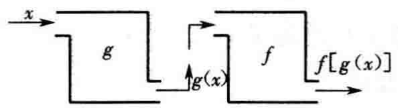

图 1-5

注 1.2.3 在定义 1.2.3 中出现的变量 u 称为中间变量,中间变量 u 具有双重作用,对于外层函数$f(u)$而言 u 起自变量的作用,对里层函数 $\varphi(x)$而言 u 起函数值的作用,但是对复合函数$f[\varphi(x)]$来说 x 是自变量.

例 1.2.9 设 $y=f(u)=\sin u, u=\varphi(x)=x^2+1$,求$f[\varphi(x)]$.

解 $f[\varphi(x)]=\sin u=\sin(x^2+1)$.

例 1.2.10 设 $y=f(u)=\sqrt{u}, u=g(t)=e^t, t=\varphi(x)=x^3$,求$f[g(\varphi(x))]$.

解 $f[g(\varphi(x))]=\sqrt{u}=\sqrt{e^t}=\sqrt{e^{x^3}}$.

例 1.2.11 已知$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$,求$f[f(x)]$.

解 $f[f(x)]=\dfrac{1}{\sqrt{f^2(x)+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2+1}+1}}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+2}}$.

例 1.2.12 分析函数 $y=\sin(x^2)$的复合结构.

解 所给函数是由 $y=\sin u, u=x^2$复合而成.

例 1.2.13 分析函数 $y=\tan^2\dfrac{x}{2}$的复合结构.