INTERNATIONAL
MATHEMATICAL
OLYMPIADS

IMO 50年

1990～1994

第7卷

● 主　编　佩　捷
● 副主编　冯贝叶

多解　推广　加强

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

INTERNATIONAL
MATHEMATICAL
OLYMPIADS

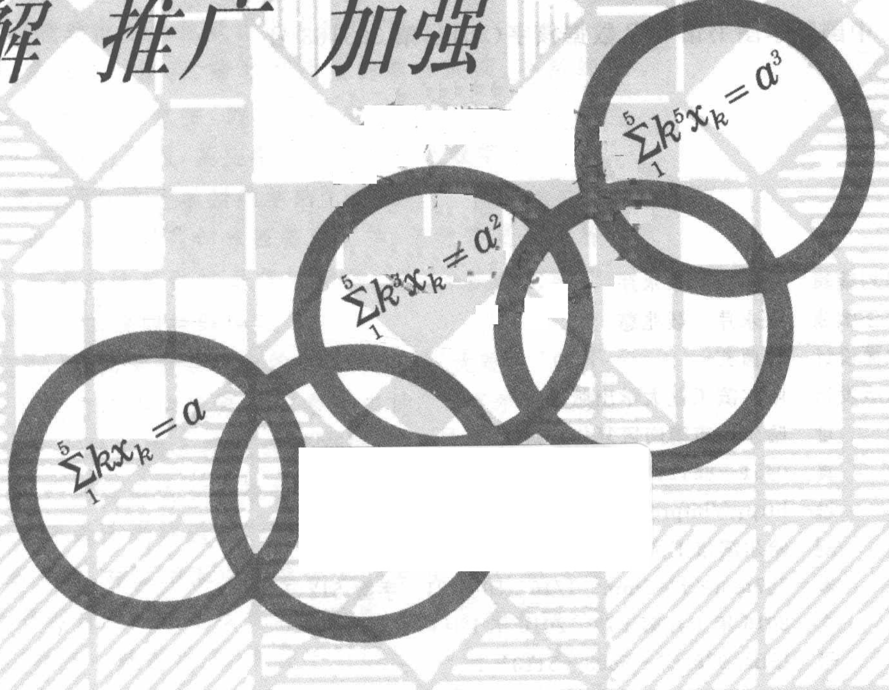
IMO 50年

第7卷

1990～1994

● 主　编　佩　捷
● 副主编　冯贝叶

多解　推广　加强



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书汇集了第 31 届至第 35 届国际数学奥林匹克竞赛试题及解答. 本书广泛搜集了每道试题的多种解法，且注重初等数学与高等数学的联系，更有出自数学名家之手的推广与加强. 本书可归结出以下四个特点，即收集全、解法多、观点高、结论强.

本书适合于数学奥林匹克竞赛选手和教练员、高等院校相关专业研究人员及数学爱好者使用.

图书在版编目(CIP)数据

IMO 50 年. 第 7 卷，1990～1994/佩捷主编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2016.1

ISBN 978－7－5603－5113－1

Ⅰ. ①I… Ⅱ. ①佩… Ⅲ. ①中学数学课－题解 Ⅳ. ①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 303163 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 聂兆慈
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451－86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 21 字数 512 千字
版 次 2016 年 1 月第 1 版 2016 年 1 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978－7－5603－5113－1
定 价 48.00 元

前言 | Foreword

法国教师于盖特·昂雅勒朗·普拉内斯在与法国科学家、教育家阿尔贝·雅卡尔的交谈中表明了这样一种观点："若一个人不'精通数学',他就比别人笨吗"?

"数学是最容易理解的.除非有严重的精神疾病,不然的话,大家都应该是'精通数学'的.可是,由于大概只有心理学家才可能解释清楚的原因,某些年轻人认定自己数学不行.我认为其中主要的责任在于教授数学的方式".

"我们自然不可能对任何东西都感兴趣,但数学更是一种思维的锻炼,不进行这项锻炼是很可惜的.不过,对诗歌或哲学,我们似乎也可以说同样的话".

"不管怎样,根据学生数学上的能力来选拔'优等生'的不当做法对数学这门学科的教授是非常有害的."(阿尔贝·雅卡尔,于盖特·昂雅勒朗·普拉内斯.《献给非哲学家的小哲学》.周冉,译.广西师范大学出版社,2001,96)

这本题集不是为老师选拔"优等生"而准备的,而是为那些对IMO感兴趣,对近年来中国数学工作者在IMO研究中所取得的成果感兴趣的读者准备的资料库.展示原味真题,提供海量解法(最多一题提供20余种不同解法,如第3届IMO第2题),给出加强形式,尽显推广空间.是我国建国以来有关IMO试题方面规模最大、收集最全的一本题集,从现在看以"观止"称之并不为过.

前中国国家射击队的总教练张恒是用“系统论”研究射击训练的专家，他曾说：“世界上的很多新东西，其实不是‘全新’的，就像美国的航天飞机，总共用了2万个已有的专利技术，真正的创造是它在总体设计上的新意.”（胡廷楣.《境界——关于围棋文化的思考》.上海人民出版社，1999，463）本书的编写又何尝不是如此呢，将近100位专家学者给出的多种不同解答放到一起也是一种创造.

如果说这部题集可比作一条美丽的珍珠项链的话，那么编者所做的不过是将那些藏于深海的珍珠打捞起来并穿附在一条红线之上，形式归于红线，价值归于珍珠.

首先要感谢江仁俊先生，他可能是国内最早编写国际数学奥林匹克题解的先行者（1979年笔者初中毕业，同学姜三勇（现为哈工大教授）作为临别纪念送给笔者的一本书就是江仁俊先生编的《国际中学生数学竞赛题解》（定价仅0.29元），并用当时叶剑英元帅的诗词做赠言：“科学有险阻，苦战能过关.”27年过去仍记忆犹新）.所以特引用了江先生的一些解法.江苏师范学院（华东师范大学的肖刚教授曾在该校外语专业读过）是我国最早介入IMO的高校之一，毛振璇、唐起汉、唐复苏三位老先生亲自主持从德文及俄文翻译1～20届题解.令人惊奇的是，我们发现当时的插图绘制居然是我国的微分动力学专家“文化大革命”后北大的第一位博士张筑生教授，可惜天妒英才，张筑生教授英年早逝，令人扼腕（山东大学的杜锡录教授同样令人惋惜，他也是当年数学奥林匹克研究的主力之一）.本书的插图中有几幅就是出自张筑生教授之手[22].另外中国科技大学是那时数学奥林匹克研究的重镇，可以说上世纪80年代初中国科技大学之于现代数学竞赛的研究就像哥廷根20世纪初之于现代数学的研究.常庚哲教授、单墫教授、苏淳教授、李尚志教授、余红兵教授、严镇军教授当年都是数学奥林匹克研究领域的旗帜性人物.本书中许多好的解法均出自他们[4],[13],[19],[20],[50].目前许多题解中给出的解法中规中矩，语言四平八稳，大有八股遗风，仿佛出自机器一般，而这几位专家的解答各有特色，颇具个性.记得早些年笔者看过一篇报道说常庚哲先生当年去南京特招单墫与李克正去中国科技大学读研究生，考试时由于单墫基础扎实，毕业后一直在南京女子中学任教，所以按部就班，从前往后答，而李克正当时是南京市的一名工人，自学成才，答题是从后往前答，先答最难的一题，风格迥然不同，所给出的奥数题解也是个性化十足.另外，现在流行的IMO题解，历经多人

之手已变成了雕刻后的最佳形式，用于展示很好，但用于教学或自学却不适合，有许多学生问这么巧妙的技巧是怎么想到的，我怎么想不到，容易产生挫败感，就像数学史家评价高斯一样，说他每次都是将脚手架拆去之后再将他建筑的宏伟大厦展示给其他人．使人觉得突兀，景仰之后，倍受挫折．高斯这种追求完美的做法大大延误了数学的发展，使人们很难跟上他的脚步这一点从潘承彪教授，沈永欢教授合译的《算术探讨》中可见一斑．所以我们提倡，讲思路，讲想法，表现思考过程，甚至绕点弯子，都是好的，因为它自然，贴近读者．

中国数学竞赛活动的开展与普及与中国革命的农村包围城市，星星之火可以燎原的方式迥然不同，是先在中心城市取得成功后再向全国蔓延，而这种方式全赖强势人物推进，从华罗庚先生到王寿仁先生再到裘宗沪先生，以他们的威望与影响振臂一呼，应者云集，数学奥林匹克在中国终成燎原之势，他们主持编写的参考书在业内被奉为圭臬，我们必须以此为标准，所以引用会时有发生，在此表示感谢．

中国数学奥林匹克能在世界上有今天的地位，各大学的名家们起了重要的理论支持作用．北京大学王杰教授、复旦大学舒五昌教授、首都师范大学梅向明教授、华东师范大学熊斌教授、中国科学院许以超研究员、合肥工业大学的苏化明教授、杭州师范学院的赵小云教授、陕西师范大学的罗增儒教授等，他们的文章所表现的高瞻周览、探赜索隐的识力，已达到炉火纯青的地步，堪称为中国 IMO 研究的标志．如果说多样性是生物赖以生存的法则，那么百花齐放，则是数学竞赛赖以发展的基础．我们既希望看到像格罗登迪克那样为解决一批具体问题而建造大型联合机械式的宏大构思型解法，也盼望有像爱尔特希那样运用最少的工具以娴熟的技能做庖丁解牛式剖析型解法出现．为此本书广为引证，也向各位提供原创解法的专家学者致以谢意．

编者为图“文无遗珠”的效果，大量参考了多家书刊杂志中发表的解法，也向他们表示谢意．

特别要感谢湖南理工大学的周持中教授、长沙铁道学院的肖果能教授、广州大学的吴伟朝先生以及顾可敬先生．他们四位的长篇推广文章读之，使我不能不三叹而三致意，收入本书使之增色不少．

最后要说的是由于编者先天不备，后天不足，斗胆尝试，徒见笑于方家．

哲学家休谟在写自传的时候，曾有一句话讲得颇好：“一

个人写自己的生平时,如果说得太多,总是免不了虚荣的."这句话同样也适合于一本书的前言,写多了难免自夸,就此打住是明智之举.

刘培杰
2014 年 9 月

目录 Contest

附录 IMO 背景介绍

参考文献

后记

第一编

第 31 届国际数学奥林匹克

第 31 届国际数学奥林匹克题解

中国，1990

1 圆的两弦 AB 与 CD 交于圆内一点 E. 设 M 是弦 AB 上严格在 E 与 B 之间的一点. 过 D,E,M 作一圆，设在点 E 与该圆相切的直线分别与直线 BC 和 CA 相交于点 F 和 G. 设 $\frac{AM}{AB}=t$，试求 $\frac{EG}{EF}$（用 t 来表示）.

印度命题

解法 1 用线段将点 D 与点 A,B 联结起来，如图 31.1 所示. 因为

$$\angle ECF=\angle MAD,\angle CEF=\angle DEG=\angle EMD$$

所以

$$\triangle CEF\backsim\triangle AMD$$

由此得到

$$CE\cdot MD=EF\cdot AM \quad ①$$

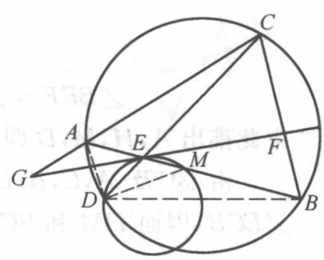


图 31.1

另一方面，因为

$$\angle ECG=\angle MBD$$

$$\angle CGE=\angle CEF-\angle GCE=\angle AMD-\angle MBD=\angle BDM$$

所以

$$\triangle CGE\backsim\triangle BDM$$

因而有

$$GE\cdot MB=CE\cdot MD \quad ②$$

由 ① 和 ② 立即得到

$$GE\cdot MB=EF\cdot AM$$

由此，进一步得到

$$\frac{GE}{EF}=\frac{AM}{MB}=\frac{tAB}{(1-t)AB}=\frac{t}{1-t}$$

注 在上面的讨论中，我们用到了这样的事实：点 G 在 CA 延长线上. 这一事实可证明如下：因为 M 严格在 E 与 B 之间，所以

$$\angle BDE>\angle MDE$$

于是有

$$\angle BAC=\angle BDE>\angle MDE=\angle BEF$$

因而直线 CA 与 FE 的交点 G 应该在线段 CA 的延长线上.

此解法属于余嘉联、汪建华

解法 2　如图 31.1 所示，由点 M 严格在 EB 内知 $\angle MEF<\angle MAC$，所以点 G,A 在点 C 的同侧. 同理，点 F,B 在点 C 同侧.

由面积公式、正弦定理等推出

$$\frac{GE}{EF}=\frac{\sin\angle ECG}{\sin\angle ECF}\cdot\frac{\sin\angle EFC}{\sin\angle EGC}$$

同理推出

$$\frac{BM}{AM}=\frac{\sin\angle BDM}{\sin\angle ADM}\cdot\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle ABD}$$

由关于弦切角、圆周角的定理推出

$$\angle BDM=\angle CGE,\angle ADM=\angle CFE$$

$$\frac{GE}{EF}=\frac{AM}{BM}=\frac{t}{1-t}$$

解法 3　作 AP 平行于 GF，AP 分别交 CD，CB 于点 H，P，如图 31.2 所示，得出

$$\frac{GE}{EF}=\frac{AH}{PH}$$

$$\angle BEF=\angle EDM,\angle HAE=\angle MDE \qquad ③$$

由此推出 A,H,M,D 四点共圆.

由 ③ 及 A,C,B,D 四点共圆推出 $\angle EHM=\angle EAD=\angle ECB$，因而 HM 和 BC 平行，并有

$$\frac{AM}{BM}=\frac{AH}{PH}$$

$$\frac{GE}{EF}=\frac{AM}{BM}=\frac{t}{1-t}$$

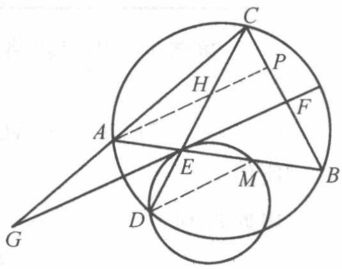


图 31.2

解法 4　如图 31.1 所示，根据三角形面积公式，我们有

$$\frac{S_{\triangle BEC}}{S_{\triangle FEC}}=1+\frac{S_{\triangle FEB}}{S_{\triangle FEC}}\cdot\frac{S_{\triangle DME}}{S_{\triangle DME}}=$$

$$1+\frac{FE\cdot BE\cdot\sin\angle FEB}{FE\cdot CE\cdot\sin\angle FEC}\cdot\frac{MD\cdot ME\cdot\sin\angle DME}{MD\cdot DE\cdot\sin\angle MDE}$$

注意到

$$\angle AEG=\angle FEB=\angle MDE,\angle FEC=\angle GED=\angle DME$$

就有

$$\frac{S_{\triangle BEC}}{S_{\triangle FEC}}=1+\frac{BE\cdot ME}{DE\cdot CE}=1+\frac{BE\cdot ME}{BE\cdot AE}=\frac{AM}{AE}$$

同理

$$\frac{S_{\triangle AEC}}{S_{\triangle GEC}}=1-\frac{S_{\triangle GEA}}{S_{\triangle GEC}}\cdot\frac{S_{\triangle DMC}}{S_{\triangle MDC}}=1-\frac{GE\cdot AE}{DE\cdot MD}\cdot\frac{MD\cdot ME}{GE\cdot CE}=$$

$$1-\frac{AE\cdot ME}{DE\cdot CE}=1-\frac{AE\cdot ME}{AE\cdot BE}=\frac{BM}{BE}$$

由此即得

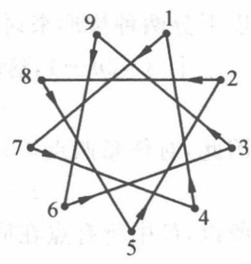
$$\frac{GE}{EF}=\frac{S_{\triangle GEC}}{S_{\triangle FEC}}=\frac{S_{\triangle AEC}}{S_{\triangle BEC}}\cdot\frac{BE}{BM}\cdot\frac{AM}{AE}=\frac{AM}{BM}=\frac{t}{1-t}$$

2 设 $n\geqslant 3$,考查在圆周上给定的由 $2n-1$ 个不相同的点组成的集合 E.同时,考查将 E 中 k 个点染黑的染色办法.如果某种染色办法使得某两个染黑的点之间所夹的弧之一的内部恰含有 E 中的 n 个点,那么我们就说这种染色办法是"好的".试求具有以下性质的最小的 k:将 E 中任意的 k 个点染黑的染色办法都是"好的".

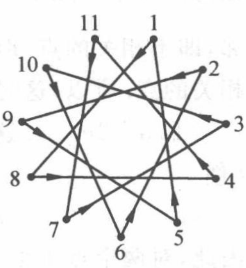
捷克斯洛伐克命题

解法1 E 中的两个点称为是"相关的",如果这两点所夹的弧段之一的内部恰含有 E 的 n 个点.沿顺时针方向依次用 $1,2,\cdots,2n-1$ 给 E 的点标号(从任意指定一点开始).这样,与点 i 相关的点仅有两个:$i+n+1$(当 $i+n+1>2n-1$ 时,是 $i+n+1-(2n-1)$),$i+n-2$(当 $i+n-2>2n-1$ 时,是 $i+n-2-(2n-1)$).所以,E 中两点相关的充要条件是它们的标号相差 $n+1$ 或 $n-2$,本题就是要决定具有以下性质的自然数 k 的最小值:E 的任意 k 个点中至少有两点是相关的.

此解法属于张筑生



$n=5$



$n=6$

图31.3

现将 E 中任意两个相关的点都用线段联结起来,我们就得到以 E 中的点为顶点,以这些线段为边的图 G.由于每一点有且仅有两个点和它相关,所以图 G 在其每一个顶点 p 处的度数 $d(p)$(即以 p 为一个端点的边的个数)都等于2.从任一顶点 i 出发,沿图 G 的边联结与 i 相关的点 $i+n+1$(标号见前约定),依次这样联结,那么若干步后必回到原顶点 i,这是因为总共只有有限个点,且每点的度数均为2.这样就得到了图 G 的一个子图,我们称它为圈.由于顶点的度数均为2,所以任意两个不同的圈(如果有的话)一定没有公共顶点.因而,图 G 是由一些(可以是一个)没有公共顶点的圈组成,相关的点就是同一个圈上相邻的点(即一条边的两端点).图31.3画出了 $n=5$ 时,图 G 由三个圈:$\{1,7,4,1\}$,$\{2,8,5,2\}$,$\{3,9,6,3\}$ 组成;$n=6$ 时,图 G 只有一个圈:$\{1,8,4,11,7,3,10,6,2,9,5,1\}$.

下面来证明:对任意两个点 $1\leqslant i,j\leqslant 2n-1$,它们在同一个圈上的充要条件是存在整数 x,y,使得

$$i-j=x(n+1)+y(2n-1)$$

条件的必要性由圈的构造法及标号的约定立即推出.下证充分性.不妨设 $x\leqslant 0$.若 $x=0$,则 $y=0$,即 $i=j$ 为同一点,结论当然成立.若 $x<0$,因为 i 和

$$i_1=i+(n+1)$$

或 $$i'_1=i_1-(2n-1)=i+(n+1)-(2n-1)$$

(当 $i+(n+1)>2n-1$ 时) 在同一个圈上,所以有

$$i_1-j=(x+1)(n+1)+y(2n-1)$$

或 $$i'_1-j=(x+1)(n+1)+(y-1)(2n-1)$$

依此下去,总可得到一点 i',$1\leqslant i'\leqslant 2n-1$,它和 $i,i_1,i_2,\cdots$ 在同一个圈上,且满足

$$i'-j=(x+(-x))(n+1)+y'(2n-1)=y'(2n-1)$$

这表明 i' 和 j 为同一点.这就证明了充分性.

由于

$$\begin{aligned}(n+1,2n-1)=&(n+1,2n-1-2(n+1))=\\&(n+1,-3)=(n+1-3n,-3)=\\&(3,2n+1)\end{aligned}$$

以下分两种情形来讨论.

ⅰ $3\nmid 2n-1$,这时 $(n+1,2n-1)=1$,所以必有整数 s,t 使得

$$s(n+1)+t(2n-1)=1$$

因此,对任意两点 $1\leqslant i,j\leqslant 2n-1$,必有整数 x,y,使得

$$i-j=x(n+1)+y(2n-1)$$

所以,E 中所有点在同一个圈上,即 G 是由单独一个圈构成.沿这圈每隔一个顶点取一个顶点,可得 $\left[\frac{2n-1}{2}\right]=n-1$ 个两两不相邻,即不相关的点.但是,任取 n 个点,就必定会出现一对相邻,即相关的点.所以,这时 k 的最小值等于 n.

ⅱ $3\mid 2n-1$.这时 $(n+1,2n-1)=3$.所以一定存在整数 s,t 使

$$s(n+1)+t(2n-1)=3$$

因此,对两个点 $1\leqslant i,j\leqslant 2n-1$ 存在 x,y,使得有

$$i-j=x(n+1)+y(2n-1)$$

成立的充要条件是 $3\mid i-j$.这样就推出:1,2,3 这三个点属于不同的圈,以及任一点必属于其中的一个圈.因而,G 由三个两两没有公共顶点的圈组成,每个圈含有 $\frac{(2n-1)}{3}$ 个顶点.在每个圈上分别每隔一个顶点取一个顶点,可在每个圈上得到 $\left[\frac{(2n-1)/3}{2}\right]$ 个两两不相邻,即不相关的点.这样,总共得到

$$3\left[\frac{(2n-1)/3}{2}\right]=3\cdot\frac{(2n-1)/3-1}{2}=n-2$$

个两两不相关的点.但是,任取 $n-1$ 个点,就必定会有 $\left[\frac{(2n-1)/3}{2}\right]+1$ 个点属于同一个圈,因此,必有两个点相邻,即相关.所以,这时 k 的最小值等于 $n-1$.

注 本题若利用同余概念来做,可以表述得更简洁.

解法 2 (1) 按顺时针方向,从某点开始依次将这 $2n-1$ 个点编号为 $1,2,\cdots,2n-1$. 并继续往下重复编号,$2n,2n+1,\cdots$. 这样,每个点有无穷多个编号,但只要

$$i \equiv j \pmod{2n-1}$$

i 和 j 就代表同一个点,反过来也正确.

此解法属于江建华、王崧

(2) 当 $3 \nmid 2n-1$ 时,$(2n-1,n-2)=1$. 在这种情形下,我们从点 1 开始,依此将点

$$a_r = 1 + r(n-2)$$

与点

$$a_{r+1} = 1 + (r+1)(n-2)$$

联结,取 $r=0,1,\cdots,2n-2$. 由于 $(2n-1,n-2)=1$,所以,当 r 遍历模 $2n-1$ 的一个完全剩余系 $0,1,\cdots,2n-2$ 时,$1+r(n-2)$ 也遍历模 $2n-1$ 的一个完全剩余系. 因此,从点 1 开始的这一条连线连接了所有这 $2n-1$ 个点,且每点恰出现一次. 注意到 a_{2n-1} 和 a_0 是同一点,所以,这一连线形成一个回路 T.

(3) 将点 $a_0,a_1,\cdots,a_{2n-2}$ 中任意 n 个点染黑,则必有两个相邻点 a_{r_0},a_{r_0+1} 同时被染黑,因此,这种染色方式一定是好的.

(4) 将 $a_1,a_3,\cdots,a_{2n-3}$ 这 $n-1$ 个点染黑,这种染色方式不是好的.

(5) 当 $3 \nmid 2n-1$ 时,k 的最小值为 n.

(6) 当 $3 \mid 2n-1$ 时,$(2n-1,n-2)=3$. 记点

$$a_{1,r} = 1 + r(n-2)$$
$$a_{2,r} = 2 + r(n-2)$$
$$a_{3,r} = 3 + r(n-2)$$

(7) 将点 $a_{1,r}$ 与点 $a_{1,r+1}$ 相连,当依次取 $r=0,1,\cdots,\frac{(2n-1)}{3}-1$ 时得到一个回路 T_1,所有模 3 余 1 的点在 T_1 中恰出现一次. 同样的,将点 $a_{2,r}$ 与 $a_{2,r+1}$ 相连,得到回路 T_2,所有模 3 余 2 的点在 T_2 中恰出现一次;将点 $a_{3,r},a_{3,r+1}$ 相连,得到回路 T_3,所有模 3 余 0 的点在 T_3 中恰出现一次. 此外,回路 T_1,T_2,T_3 两两没有公共点,每个回路中有 $\frac{(2n-1)}{3}$ 个点.

(8) 若将点 $a_0,a_1,\cdots,a_{2n-2}$ 中的任意 $n-1$ 个点染黑,则必有一个回路 T_j 中有 $\left[\frac{n-1}{3}\right]+1=\frac{n-2}{3}+1$(个)点,进而推出在这回路 T_j 中必有相邻两点 a_{j,r_0},a_{j,r_0+1} 都被染黑. 因此,这种染色方式一定是好的.

(9) 若将 $a_{j,1}, a_{j,3}, \cdots, a_{j,2n-1}$，$j=1,2,3$，这 $n-2$ 个点染黑，则这种染色方法不是好的.

(10) 当 $3 \mid 2n-1$ 时，k 的最小值为 $n-1$.

解法 3　依逆时针方向，将给定的 $2n-1$ 个点顺次记为 A_1，A_2，$\cdots$，A_{2n-1}，为方便计，约定当 $i > 2n-1$ 时

$$A_i = A_{i-(2n-1)} = A_{i-2n+1}$$

对于任意点 A_i，与它相隔 n 个点的点恰有两个，即 A_{i+n+1} 与 A_{i+n-2}. 我们把这两个点称为 A_i 的关联点. 显然，如果在一个染色中，有一对黑色点互为关联点，则这个染色方式就是好的.

我们先证明，k 的最小值不大于 n. 事实上，假定 $2n-1$ 个点中有 n 个点染成了黑色，而且任何一对黑色的点都不是关联点，则从圆周上任一黑点出发，在圆周上沿任何方向的第 $n+1$ 个点都是无色的. 因此，对于每一个黑点，都对应两个无色点. 这样，n 个黑点可共得 $2n$ 个无色点，但其中某些无色点可能被重复计数了. 但任何一个无色点，至多只能是两个黑点的关联点，即最多可被计数两次. 这样，至少有 n 个不同的无色点，与共有 $2n-1$ 个点的题设矛盾. 因此，至少有一对黑色点是关联点，即染色方式是好的，即 k 的最小值不大于 n.

现分两种情况进行讨论.

i　当 $3 \mid 2n-1$ 时，可设 $2n-1=3m$. 将所给的 $2n-1$ 个点分为三组，即

$$S_i = \{A_j \mid j = 3t+i, t=0,1,\cdots,m-1\}, i=1,2,3$$

注意到 m 为奇数，故

$$n-2 = 3\left(\frac{m-1}{2}\right) = 3\left[\frac{m}{2}\right]$$

$$n+1 = 3\left[\frac{m}{2}\right]+3$$

都是3的倍数，于是 A_{i+n+1} 及 A_{i+n-2} 都与 A_i 同属一个组，即每一个点与它的两个关联点都在同一个组之中，若将 S_1, S_2, S_3 各组中前 $\left[\frac{m}{2}\right]$ 个点染成黑色，则对于任意两个黑点 A_r, A_s 的标号 r, s 都有

$$|r-s| \leqslant 3\left[\frac{m}{2}\right]-1$$

因而 $|r-s|$ 既不等于 $n-2$，也不等于 $n+1$，所以 A_r, A_s 不是关联点对，这就表明能够将 $3\left[\frac{m}{2}\right]=n-2$ 个点染成黑色，使得任何两个黑点都不满足命题条件. 由此可知 k 的最小值大于或等于 $n-2$.

另一方面，若将 $n-1$ 个点染成黑色，则 S_1, S_2, S_3 中，必有一