● 大学数学应用型本科“十二五”规划教材

线性代数

XIANXING DAISHU

主　编/孙文涛　王晓平
副主编/索　朗　邵文凯

重庆大学出版社
http://www.cqup.com.cn

● 大学数学应用型本科“十二五”规划教材

线性代数

XIANXING DAISHU

主　编 / 孙文涛　王晓平

副主编 / 索　朗　邵文凯

编　写 / 孟祥娜　刘红卫　侯颖亮

重庆大学出版社

内容提要

本书是编者们在多年教学经验的基础上，根据经济类、管理类专业人才培养方案，结合当前大学生的特点编写而成的. 全书共 4 章，主要内容包括矩阵及其线性运算与方阵行列式、矩阵的初等变换及初等矩阵、线性方程组与向量的线性相关性、矩阵问题的进一步讨论等. 本书编排结构合理，内容体系与时俱进，淡化数学理论，强化数学概念的直观性，渗透数学建模思想，难点处理独具匠心，习题选取灵活多变，通篇文字叙述清晰，重视知识与能力训练的统一，培养学生运用数学的意识，提高解决问题的能力.

本书适合普通高等学校经济类、管理类专业学生使用，也可作为其他相关人员参考用书.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数／孙文涛，王晓平主编. —重庆：重庆大学出版社，2016. 8
ISBN 978-7-5624-9938-1

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①孙…②王… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ. ①O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 146505 号

线性代数

主 编 孙文涛 王晓平
副主编 索 朗 邵文凯
责任编辑：李定群 版式设计：李定群
责任校对：张红梅 责任印制：邱 瑶

*

重庆大学出版社出版发行
出版人：易树平
社址：重庆市沙坪坝区大学城西路 21 号
邮编：401331
电话：（023）88617190 88617185（中小学）
传真：（023）88617186 88617166
网址：http://www.cqup.com.cn
邮箱：fxk@cqup.com.cn（营销中心）
全国新华书店经销
重庆市正前方彩色印刷有限公司印刷

*

开本：720mm×960mm 1/16 印张：15 字数：245 千
2016 年 8 月第 1 版 2016 年 8 月第 1 次印刷
印数：1—2 000
ISBN 978-7-5624-9938-1 定价：38.00 元

前言

“线性代数”是普通高等学校相关专业的一门重要基础课程，教学内容多，进度快，与专业知识结合紧密．在教学时，不仅需要引导学生当前的学习，而且对学生的可持续发展还应当有所启迪．本教材依照教育部最新制订的高等数学课程的教学基本要求，结合编者多年教学实践编写．

本书编构科学合理，体现以学生为主体．每一节列出学习目标，利于学生自学；以实际背景引入数学概念，利于学生体会数学思想来源于生活与生产实际；例题习题的选择灵活多变，层次分明，利于满足不同专业不同层次的需要；分章提炼知识小结、应用与提高，利于学生拓宽解题思路、拓展学习内容．

本书重视知识的传授，更注重能力的培养，使学生在系统获得知识的同时，也能比较系统地提高能力，体现知识教学与能力训练的统一；重视培养学生运用数学的意识，通过典型例题，将多种计算方法列出，择优而取，既能牢固掌握知识，又能学到探求知识的思想方法和手段．

本书适度淡化数学理论，强化数学概念的直观性，一些定理的证明以几何解释或经济说明为主，使学生能直观地理解．全书共 4 章，主要内容包括矩阵及其线性运算与方阵行列式、矩阵的初等变换及初等矩阵、线性方程组与向量的线性相关性、矩阵问题的进一步讨论等．各专业可根据专业培养目标和要求，选学相应的教学内容．

本书由孙文涛，王晓平任主编．本书前 3 章主要由西藏大学数学系孙文涛统筹编写，第 4 章主要由王晓平编写，索朗、孟祥娜、刘红卫和邵文凯参与了具体的编写工作，拉萨市江苏中学教师侯颖亮对本书中与数学直接相关的内容处理提出了许多好的建议，并承担消元法部分的实际编写工作，全书由孙文涛统稿。

在全书的编辑出版过程中，重庆大学出版社给予了大力帮助与支持，教材编辑认真核实，反复校对，并对全书的章节安排、框架设计和内容组织提出了许多宝贵的意见和建议.

鉴于编者水平有限，书中难免出现一些不足和疏漏，敬请读者与同行批评指正.

编　者

2016 年 6 月

目 录

第 1 章 矩阵及其运算与方阵行列式 ······ 1
1.1 矩阵的相关概念 ······ 1
1.1.1 矩阵的概念 ······ 1
1.1.2 矩阵的定义 ······ 2
1.1.3 特殊矩阵 ······ 3
习题 1-1 ······ 6
1.2 矩阵的运算 ······ 7
1.2.1 矩阵的加法 ······ 7
1.2.2 数乘矩阵 ······ 9
1.2.3 矩阵的乘法 ······ 10
习题 1-2 ······ 15
1.3 方阵行列式 ······ 17
1.3.1 二、三阶方阵行列式 ······ 18
1.3.2 排列与逆序 ······ 20
1.3.3 n 阶行列式的定义 ······ 21
习题 1-3 ······ 24
1.4 行列式的性质 ······ 26
习题 1-4 ······ 32
1.5 行列式的计算 ······ 35
1.5.1 降阶法 ······ 35
1.5.2 初等变换法 ······ 38

1.5.3　递推法 …… 40
习题 1-5 …… 42
数学实验 1:使用计算机求行列式的值 …… 43
本章知识小结 …… 45
复习题 1 …… 50

第 2 章　矩阵的初等变换及初等矩阵 …… 53
2.1　矩阵的初等变换 …… 53
2.1.1　矩阵的初等变换 …… 53
2.1.2　初等矩阵 …… 57
习题 2-1 …… 61
2.2　逆矩阵 …… 61
2.2.1　逆矩阵的概念 …… 62
2.2.2　矩阵可逆的条件 …… 63
2.2.3　可逆矩阵的性质 …… 66
2.2.4　用矩阵的初等变换求逆矩阵 …… 67
2.2.5　利用行初等变换求矩阵的逆矩阵的步骤 …… 68
2.2.6　逆矩阵的应用 …… 70
习题 2-2 …… 71
2.3　矩阵的秩 …… 73
2.3.1　子式及秩的概念 …… 73
2.3.2　秩的性质及计算 …… 75
2.3.3　关于矩阵秩的几个结论 …… 77
习题 2-3 …… 78
2.4　矩阵方程及分块矩阵 …… 79
2.4.1　矩阵方程 …… 80
2.4.2　分块矩阵 …… 82
习题 2-4 …… 88
数学实验 2:使用 Matlab 进行矩阵运算 …… 90
本章知识小结 …… 93

复习题 2 …… 96

第 3 章 线性方程组与向量的线性相关性 …… 99
3.1 线性方程组的一般解法 …… 99
3.1.1 线性方程组的一般形式 …… 99
3.1.2 线性方程组的一般解法 …… 101
习题 3-1 …… 107
3.2 线性方程组的一般理论 …… 109
3.2.1 非齐次线性方程组解的研究 …… 109
3.2.2 齐次线性方程组解的研究 …… 115
习题 3-2 …… 116
3.3 向量及其运算性质 …… 118
3.3.1 n 维向量的概念 …… 118
3.3.2 向量的线性运算 …… 119
3.3.3 向量的内积及其性质 …… 120
习题 3-3 …… 122
3.4 向量的线性相关性 …… 123
3.4.1 线性组合与等价向量组 …… 123
3.4.2 向量组的线性相关性 …… 127
3.4.3 几个重要定理 …… 131
习题 3-4 …… 134
3.5 向量组的秩 …… 135
3.5.1 极大线性无关向量组 …… 135
3.5.2 向量组的秩 …… 137
习题 3-5 …… 139
3.6 线性方程组的基础解系与一般解 …… 141
3.6.1 齐次线性方程组的基础解系 …… 141
3.6.2 非齐次线性方程组解的结构 …… 145
习题 3-6 …… 148
3.7 向量空间简介* …… 150

3.7.1 向量空间的概念 …… 150
3.7.2 基与维数 …… 151
3.7.3 向量组的正交化与正交矩阵 …… 153
习题 3-7 …… 156
本章知识小结 …… 157
复习题 3 …… 162

第 4 章 矩阵问题的进一步讨论 …… 166
4.1 矩阵的特征值与特征向量 …… 166
4.1.1 方阵的特征值、特征向量的概念及其计算 …… 166
4.1.2 特征值与特征向量的性质 …… 168
习题 4-1 …… 171
4.2 相似矩阵* …… 171
4.2.1 相似矩阵及其性质 …… 171
4.2.2 矩阵的相似对角化 …… 173
4.2.3 实对称矩阵的对角化 …… 176
习题 4-2 …… 179
4.3 二次型及矩阵合同 …… 181
4.3.1 二次型及其矩阵 …… 181
4.3.2 化二次型为标准型 …… 183
4.3.3 二次型的正定性 …… 189
习题 4-3 …… 193
本章知识小结 …… 194
复习题 4 …… 196

部分习题参考答案 …… 201

参考文献 …… 230

第1章 矩阵及其运算与方阵行列式

矩阵、行列式是研究线性方程组的一种数学工具. 有关矩阵的理论构成了线性代数的基本内容. 矩阵在数学与其他自然科学、社会科学特别是经济学中有着广泛的应用.

本章介绍矩阵的概念及性质;矩阵的线性运算、矩阵的乘法以及方阵行列式的相关概念与性质.

1.1 矩阵的相关概念

学习目标:

1. 理解矩阵的相关概念.
2. 熟悉特殊矩阵的特征.
3. 掌握矩阵的性质.

1.1.1 矩阵的概念

引例1 某高校学生甲和乙第一学期的大学数学、大学英语、计算机文化基础成绩见表1-1.

表1-1

科目 / 分数 / 学生	大学数学	大学英语	计算机文化基础
学生甲	90	78	91
学生乙	76	89	82

以上数据可用一个两行三列的矩形数表来表示,即

$$\begin{bmatrix} 90 & 78 & 91 \\ 76 & 89 & 82 \end{bmatrix}$$

引例 2　把某商品从产地 A_1,A_2 运往销地 B_1,B_2,B_3,B_4,B_5 的运输量见表 1-2.

表 1-2

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	10	12	5	4	8
A_2	7	23	12	0	4

从产地 A_1 运送商品到销地 B_1,B_2,B_3,B_4,B_5 的运输量分别为 10,12,5,4,8 t,从产地 A_2 运送商品到销地 B_1,B_2,B_3,B_4,B_5 的运输量分别为 7,23,12,0,6 t. 运输量可用一个两行五列的矩形数表来表示,即

$$\begin{bmatrix} 10 & 12 & 5 & 4 & 8 \\ 7 & 23 & 12 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

上面所举的两个数表,其中各个数或元素是不能互换位置的,因为每个位置具有不同的内涵.

引例 3　三元一次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

将其未知量的系数与常数项按照原来顺序组成一个三行四列矩形数表,即

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

这样的数表在数学上称为矩阵.

1.1.2　矩阵的定义

定义 1-1　由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i = 1,2,\cdots,m;j = 1,2,\cdots,n)$ 排成 m 行 n 列

的数表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个 $m\times n$ 矩阵,简记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$. 其中,$a_{ij}$ 表示位于数表中第 i 行第 j 列的数,称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 (i,j) 元(或者元素). 常用大写英文黑体字母来表示矩阵,如 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots,\boldsymbol{X}$ 等. 元素是实数的矩阵,称为**实矩阵**;元素属于复数域的矩阵,称为**复矩阵**. 本书中,若无特殊说明,一般是指实矩阵.

两个矩阵的行数相等,列数也相等时,将它们称为**同型矩阵**.

如果矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 是同型矩阵,且它们的对应元素相等,即

$$a_{ij}=b_{ij} \qquad i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **相等**,并记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

1.1.3 特殊矩阵

下面一些特殊矩阵是在今后应用中经常遇到的矩阵.

(1) 行矩阵

矩阵只有一行元素,即 $m=1,\boldsymbol{A}=[a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}]$.

(2) 列矩阵

矩阵只有一列元素,即 $n=1,\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$.

(3) 零矩阵

所有元素都是 0 的矩阵称为零矩阵. 记作 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{0}]_{m\times n}$.

注意,不同型的零矩阵是不相同的.

(4) 方阵

行数和列数相等(即 $m=n$) 的矩阵,称为 n 阶方阵,记作 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$,即

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}
$$

在 n 阶方阵中,从左上角到右下角的 n 个元素称为 n 阶方阵的主对角线元素.

特别地,只有一行一列的一阶方阵实际上是一个数.

(5) 对角矩阵

主对角线以外的元素全是零的方阵,称为对角矩阵,即形如

$$
\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}
$$

的矩阵称为 n 阶对角矩阵.

(6) 上(下)三角矩阵

主对角线以下的元素全是零的方阵,称为上三角矩阵;主对角线以上的元素全是零的方阵,称为下三角矩阵,即

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\text{为上三角矩阵}
$$

$$
\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}\text{为下三角矩阵}
$$

(7) 阶梯形矩阵

如果矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 满足:

①矩阵的零行(如果存在的话)均在矩阵最下方.

②非零行第一个不为零的元素的列标随着行标的递增而严格增大.

那么,称 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 为阶梯形矩阵.

特别地,首非零元素等于1,并且首非零元素1所在列的其他元素全为零的阶梯形矩阵,称为简化阶梯形矩阵.

例如,矩阵$\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&3\\0&0&1&4\end{bmatrix}$,$\begin{bmatrix}1&-1&0&3&6\\0&0&1&5&7\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$为简化阶梯形矩阵.

(8) 三角形矩阵

在n阶方阵中,若主对角线左下方所有元素全为零(即$r_{ik}=0$,其中$i>k$),即

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}r_{11}&r_{12}&\cdots&r_{1n}\\0&r_{22}&\cdots&r_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&r_{nn}\end{pmatrix}$$

称$\boldsymbol{R}$为**上三角形矩阵**,简称为**上三角阵**.同理,可定义**下三角阵**为

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}l_{11}&0&\cdots&0\\l_{21}&l_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\l_{n1}&l_{n2}&\cdots&l_{nn}\end{pmatrix}\text{(这里 }l_{ik}=0\text{,其中 }i<k\text{)}$$

(9) 对角阵

除对角线上元素外其他元素全为零的n阶方阵,称为**对角阵**,即

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}d_1&0&\cdots&0\\0&d_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&d_n\end{pmatrix}$$

此对角阵既为上三角阵又是下三角阵,可简记为

$$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$$

(10) 数量矩阵

主对角线上元素全相等的对角矩阵,称为**数量矩阵**.

(11) 单位矩阵

在对角阵中,若$d_1=d_2=\cdots=d_n=1$,即

$$E_n=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

则称为**单位矩阵**. 有时,为了突出单位矩阵的阶数,将 n 阶单位矩阵记为 $\boldsymbol{E}_n$.

例如,$\boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$分别称为二阶、三阶单位矩阵.

习题 1-1

A 组

1. 填空题:

(1) 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 既是上三角矩阵,又是下三角矩阵. 那么,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是________________矩阵.

(2) 与矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$同型的单位矩阵是________________.

2. 写出下列矩阵:

(1) $a_{ij}=i-j$ 的 3×2 矩阵.

(2) $a_{ij}=ij$ 的四阶方阵.

(3) 主对角线元素全为零的四阶数量矩阵.

3. 设有 A,B,C 3 类商品去年和今年的价格见表 1-3(单位:元).

表 1-3

	去 年	今 年
A	100	200
B	90	50
C	120	150

试用矩阵表示.

4. 已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 4 & b\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a & -2\\ 4 & -3\end{pmatrix}$. 若$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$. 则$a=$__________，$b=$______.

B 组

1. 某地区有C_1,C_2两个厂生产同一产品，有3家销售店D_1,D_2,D_3销售该产品，用a_{ij}来表示第i厂家供应第j店的产品量，构造矩阵$\boldsymbol{A}$(单位：件)

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{2\times 3}=\begin{pmatrix}50 & 100 & 200\\ 150 & 200 & 0\end{pmatrix}$$

指出$\boldsymbol{A}$的实际含义.

2. 设

$$\begin{pmatrix}a+2b & 2a-b\\ 2c+d & c-2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 4 & -3\end{pmatrix}$$

求a,b,c,d的值.

3. 5个人参加一晚会，如果到会的人见到其他到会人时，都要握一次手，试用矩阵表示.

1.2　矩阵的运算

学习目标：

1. 熟悉矩阵的线性运算法则.
2. 熟练掌握矩阵的运算.

矩阵的意义不仅在于把一些数据根据一定的顺序排列成阵列形式，而且还在于对它定义了一些有理论意义和实际意义的运算，使它真正成为有用的工具.

1.2.1　矩阵的加法

引例1　如果3个门市部销售4种计算机(单位：台)在某两个月内的销售

情况矩阵分别为

$$A=\begin{pmatrix}150 & 200 & 100 & 0\\170 & 300 & 50 & 210\\320 & 160 & 10 & 230\end{pmatrix}$$

及

$$B=\begin{pmatrix}100 & 300 & 90 & 10\\130 & 200 & 250 & 200\\280 & 150 & 100 & 170\end{pmatrix}$$

那么,在这两个月内3个门市部销售4种计算机的销售情况可由矩阵

$$C=\begin{pmatrix}250 & 500 & 190 & 10\\300 & 500 & 300 & 410\\600 & 310 & 110 & 400\end{pmatrix}$$

表示. 其中,矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 行第 j 列元素恰好是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 行第 j 列元素之和.

定义 1-2　设有两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$,那么,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,规定

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})=\begin{bmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n}\\a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}\end{bmatrix}$$

$$i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$$

需要指出的是,两个矩阵相加是有条件的,即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 必须是同型矩阵. 例如

$$(1,2,3)+(2,-1,-2)=(3,1,1)$$

$$\begin{pmatrix}2 & 3\\-3 & 2\\-1 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & -2\\2 & 1\\0 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 3\\-1 & 2\end{pmatrix}$$

由于矩阵的加法归结为它们的元素的加法,也就是数的加法,因此,不难验证加法满足运算规律:

①$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$(交换律).

②$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$(结合律).

③零矩阵:$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$,即任何一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和与之同型的零矩阵相加仍为 $\boldsymbol{A}$.