普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

（下册）

◎曾金平　张忠志　主编

长江出版传媒　湖北科学技术出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE (下册)

◎曾金平 张忠志 主编

长江出版传媒 湖北科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册 / 曾金平，张忠志主编．一武汉 ：
湖北科学技术出版社，2015.1 （2015.3 重印）
ISBN 978-7-5352-7484-7

Ⅰ．①高… Ⅱ．①曾… ②张… Ⅲ．①高等数学一高
等学校一教材 Ⅳ．①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 030515 号

责任编辑： 杨瑰玉	封面设计：喻杨
出版发行：湖北科学技术出版社	电话：027-87679468
地　　址：武汉市雄楚大街 268 号（湖北出版文化城 B 座 13-14 层）	邮编：430070
网　　址：http：//www.hbstp.com.cn	
印　　刷：湖北新新彩印数字出版印刷技术有限公司	邮编：430070

700×1000　1/16　18 印张　387 千字
2015 年 1 月第 1 版　2015 年 3 月第 2 次印刷
定价：37.00 元

内容提要

本系列书是大学理工科类本科生的教材.本书为《高等数学》下册,主要介绍常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、级数等内容.本书立足于培养学生的综合素质、创新精神和实践能力,对传统的高等数学的教学内容进行了筛选和优化,淡化了技巧性.每章各小节精选了与章节内容相匹配的基本练习题,可帮助学生理解和掌握相应的教学内容;每章配有较难的综合练习题,可进一步加深学生对教材内容的消化.为开拓眼界,培养学生的创新能力,每章以数学文化知识作为篇头,并提供了适当的阅读材料.通过阅读这些内容,可增强学生用数学的意识.

本书可供普通高等院校理工科各专业使用,也可作为经管类相应专业的教材或参考书.

前　言

本套《高等数学》是为理工科各专业编写的大学数学教材，分为上、下两册，配有学习指导书.《高等数学》上册包括一元函数微分学、一元函数积分学和常微分方程，下册包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、多元函数积分学和无穷级数论. 这些理论与方法为解决自然科学和工程技术领域的相关问题提供了有力的工具.

本书具有以下特点：

第一，按照精品课程教材的要求，努力反映国内外高等数学课程改革和学科建设的最新成果. 同时，着眼于培养学生的综合素质、创新精神和实践能力，对传统的"高等数学"的教学内容进行了优化，对于微积分的一些基本概念，注意以实际例子作为切入点，使学生了解数学与实际问题的紧密联系，全书在保持数学学科本身的科学性、系统性的同时，淡化了理论证明和技巧性计算.

第二，每章以数学文化的知识作为篇头，使学生了解数学在科学、工程等应用领域的重要性，激发学生学习数学的主观能动性，各小节精选了与章节内容相匹配的基本练习题，可帮助学生理解和掌握相应的教学内容；每章配有较难的综合练习题，可进一步加深学生对教材内容的理解.

第三，为开拓学生视野，培养其创新能力，每章提供了适当的阅读材料. 通过阅读这些内容，可增强学生用数学的意识.

本套《高等数学》不仅可供高等学校理工类学生作为教材使用，也可供经管类等其它学科专业的学生选用或参考，与之配合使用的还有《高等数学学习指导书》.

本书为《高等数学》下册，由曾金平、张忠志担任主编. 参加编写的人员有：贾继红、程万友、余晋昌、高雁群. 全书由曾金平教授负责统稿，张忠志教授负责审阅.

限于编者水平，书中疏漏之处在所难免，敬请广大读者批评指正.

编　者

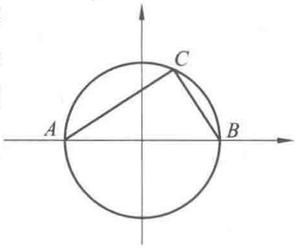
2014 年 12 月

目　　录

第 7 章　向量代数与空间解析几何

代数与几何

到了 16 世纪，随着文艺复兴以来生产力的发展，对新的数学工具的迫切需求产生了以变量为研究对象的近代数学. 解析几何是其重要分支之一. 在解析几何中，通过在平面上引进“坐标”的概念，将平面上的点和有序实数对一一对应，由此将几何问题转化为代数问题，并藉此通过研究代数问题探求几何问题的答案或新知.



由初等数学知：任何直径对应的圆周角为直角. 事实上，建立如图所示的直角坐标系. 则圆周上的点 $C(x,y)$ 满足方程 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$. 由于点 A 和 B 的坐标分别为 $(-r,0)$ 和 $(r,0)$，根据向量的代数运算

$$\overrightarrow{AC}=(r\cos\theta+r, r\sin\theta),$$
$$\overrightarrow{BC}=(r\cos\theta-r, r\sin\theta).$$

因此，

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=r^2(\cos^2\theta-1)+r^2\sin^2\theta=0,$$

从而由向量的数量积的性质知 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$.

本章以平面解析几何为基础，引入三维向量和三维直角坐标系. 由此把空间中的点与有序实数组及向量联系起来，并藉此描述空间中的直线、平面乃至一般曲线和曲面. 这些几何概念的数学描述在研究空间中的运动和多元微积分中有重要应用，它们也广泛应用于自然科学、工程技术和经济数学等诸多领域.

7.1　空间直角坐标系

和平面坐标系类似，本节在三维空间（记为 R^3）中通过引入空间直角坐标系，给空间中的点定位，由此建立空间中点与有序实数组之间的对应关系.

7.1.1　空间直角坐标系

过空间 R^3 中某定点 O 作三条两两相互垂直的数轴 Ox，Oy，Oz，它们均以点 O

为原点,且有相同的单位长度,这样就建立了一个空间直角坐标系.Ox,Oy,Oz 称为**坐标轴**,简称为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴),点 O 称为坐标原点.本书中,我们采用**右手直角坐标系**,即当握住右手使四个手指从 x 轴正方向转动 $\frac{\pi}{2}$ 到 y 轴的正方向时,大拇指所指的方向是 z 轴的正方向(见图 7.1.1).

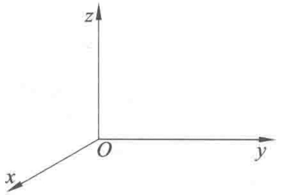


图 7.1.1　空间直角坐标系

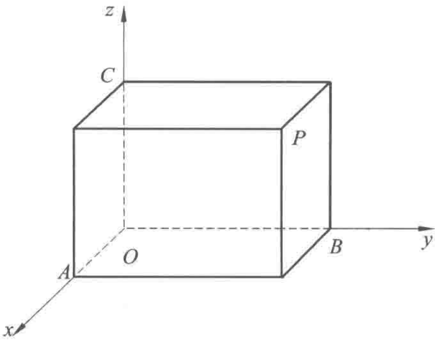


图 7.1.2　空间中点 P 的坐标

空间中点 P 的位置可通过它的**坐标**(x,y,z)定位.其中,x(或 y 或 z)是过点 P 且和 x(或 y 或 z)坐标轴垂直的平面与 x(或 y 或 z)坐标轴的交点(如图 7.1.2 所示的点 A(或 B 或 C))在 x 轴(或 y 轴或 z 轴)的坐标.于是,空间中的点 P 与三个有序实数(x,y,z)建立了一一对应关系,记为 $P(x,y,z)$.通常称 x,y 和 z 分别为点 P 的**横坐标**、**纵坐标**和**竖坐标**.显然,在 x 轴上的点的坐标具有形式$(x,0,0)$,在 y 轴上的点的坐标具有形式$(0,y,0)$,在 z 轴上的点的坐标具有形式$(0,0,z)$.

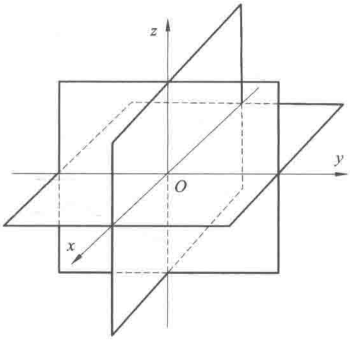


图 7.1.3　坐标面将空间分为八个卦限

过任意两条坐标轴的平面称为**坐标面**.过 x 轴和 y 轴的坐标面称为 xy 坐标面(标准方程为 $z=0$).类似还有 xz 坐标面(标准方程为 $y=0$),以及 yz 坐标面(标准方程为 $x=0$).

三个坐标面将空间分成八个部分,每一部分称为一个**卦限**.这八个卦限的次序规定如下(见图 7.1.3):

第 I 卦限:$\{(x,y,z)\mid x>0,y>0,z>0\}$;

第 II 卦限:$\{(x,y,z)\mid x<0,y>0,z>0\}$;

第 III 卦限:$\{(x,y,z)\mid x<0,y<0,z>0\}$;

第 IV 卦限:$\{(x,y,z)\mid x>0,y<0,z>0\}$;

第 V 卦限:$\{(x,y,z)\mid x>0,y>0,z<0\}$;

第 VI 卦限:$\{(x,y,z)\mid x<0,y>0,z<0\}$;

第 VII 卦限:$\{(x,y,z)\mid x<0,y<0,z<0\}$;

第 VIII 卦限:$\{(x,y,z)\mid x>0,y<0,z<0\}$.

7.1.2　空间中两点间的距离

设 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间中的任意两点，由图 7.1.4 可知，这两个点之间的距离满足勾股定理，即有

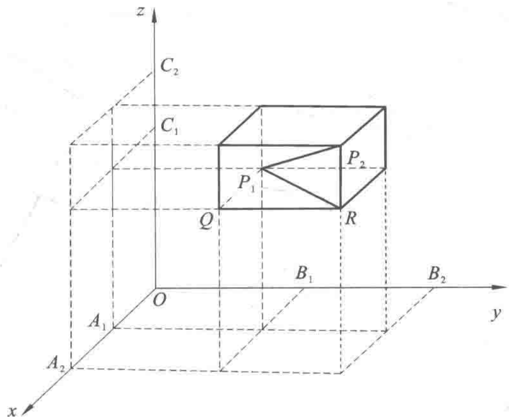


图 7.1.4　两点之间的距离 $|P_1P_2|$

$$\begin{aligned}|P_1P_2|^2 &= |P_1R|^2 + |P_2R|^2 \\ &= |P_1Q|^2 + |QR|^2 + |P_2R|^2 \\ &= |A_1A_2|^2 + |B_1B_2|^2 + |C_1C_2|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.\end{aligned}$$

于是，得到空间中任意两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 间的**距离公式**

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{7.1.1}$$

当 $z_1 = z_2 = 0$ 时，由上式得到 xy 坐标面上两点 $P_1(x_1, y_1, 0)$ 和 $P_2(x_2, y_2, 0)$ 之间的距离为

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

上面结果和平面直角坐标系中两点之间的距离公式一致.

例 7.1.1　证明：以点 $A(3,1,9)$，$B(9,-1,6)$，$C(1,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

证　直接计算得

$$|AB| = \sqrt{(9-3)^2 + (-1-1)^2 + (6-9)^2} = 7;$$

$$|AC| = \sqrt{(1-3)^2 + (4-1)^2 + (3-9)^2} = 7;$$

$$|BC| = \sqrt{(1-9)^2 + (4-(-1))^2 + (3-6)^2} = \sqrt{98}.$$

由于 $|AB| = |AC|$ 且 $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$，$\triangle ABC$ 是一个等腰直角三角形.

7.1.3 曲面及其方程

在日常生活和科学研究及工程应用中,常常遇到各种各样的曲面,例如环面、车灯的反光镜面、圆柱面等等.与二维情形一样,这些曲面都可视为具有某种性质的点的几何轨迹.通常,方程

$$F(x,y,z)=0 \tag{7.1.2}$$

表示一个曲面,其中 x,y,z 是曲面上的点在直角坐标系下的坐标.如果曲面 S 上的任意一点的坐标都满足方程(7.1.2),并且凡坐标满足方程(7.1.2)的点都在曲面 S 上,则方程(7.1.2)称为曲面 S 的**方程**,曲面 S 称为方程(7.1.2)的**图形**.

对于空间中曲面的研究,要解决下面两个问题:

(1) 已知作为具有某种性质的点的几何轨迹的曲面,建立该曲面的方程.

(2) 已知曲面方程,研究该曲面的几何形状和性质.

作为一个简单例子,下面分析空间球面的方程.众所周知,在空间 R^3 中,到定点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的距离等于 r 的点的轨迹是一个以点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为中心,r 为半径的球面.任取球面上的一点 $M(x,y,z)$,根据式(7.1.1),有

$$|M_0M|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=r.$$

两边平方后得到球面方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2. \tag{7.1.3}$$

特别地,当球心位于坐标原点时,球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

例 7.1.2 证明:方程 $x^2+y^2+z^2+3x-4z+\dfrac{1}{4}=0$ 表示一个球面,并指出该球面的球心和半径.

证 已知的方程可化为

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2+(z-2)^2=-\frac{1}{4}+\left(\frac{3}{2}\right)^2+4=6.$$

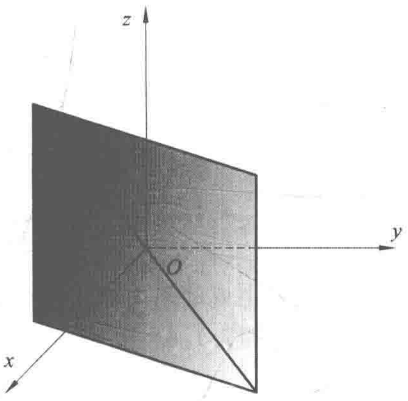
它表示一个球面,其球心位于$\left(-\dfrac{3}{2},0,2\right)$,半径 $r=\sqrt{6}$.

1. 平面

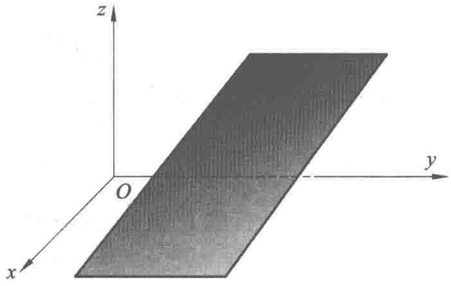
平面是空间中最简单的曲面,而坐标面是一类特殊的平面.如前所述,$x=0$ 表示 yz 坐标面,$y=0$ 表示 xz 坐标面等.可以证明(见本章 7.4 节),空间中的任意平面都可以用三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{7.1.4}$$

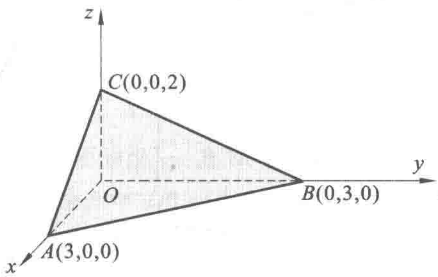
来表示(参见图 7.1.5);反之亦然.其中 A,B,C 是不全为零的常数.方程(7.1.4)称为平面的一般方程.



(a) $x-y=0$



(b) $z=3$



(c) $2x+2y+3z-6=0$

图 7.1.5　平面及其方程

下面再给出几类特殊平面的方程：

(1) 通过原点的平面方程：$Ax+By+Cz=0$.

(2) 与 z 轴平行的平面方程：$Ax+By+D=0$；

与 y 轴平行的平面方程：$Ax+Cz+D=0$；

与 x 轴平行的平面方程：$By+Cz+D=0$.

(3) 与 xy 坐标面平行的平面方程：$Cz+D=0$；

与 yz 坐标面平行的平面方程：$Ax+D=0$；

与 xz 坐标面平行的平面方程：$By+D=0$.

注　在平面解析几何中，一次方程表示一条直线. 在空间解析几何中，一次方程则表示一个平面. 例如：方程 $x-y=0$ 在平面解析几何中表示一条过原点的直线，而在空间解析几何中则表示一个平面，参见图 7.1.5(a).

例 7.1.3　求过点$(4,-3,-1)$和 x 轴的平面方程.

证　由于所求平面过 x 轴，故也经过原点. 因此，可设平面方程为

$$By+Cz=0.$$

将 $x=4, y=-3, z=-1$ 代入上式得

$$-3B-C=0,$$

即

$$C=-3B.$$

将之代入原方程再除以 B,可得所求平面的方程为

$$y-3z=0.$$

2. 柱面

与一条定直线平行的直线 L,沿曲线 C 平行移动所生成的曲面称为**柱面**,其中直线 L 称为柱面的**母线**,曲线 C 称为柱面的**准线**(参见图 7.1.6).

一般地,在空间 R^3 中,只含 x,y,而缺 z 的方程

$$F(x,y)=0 \tag{7.1.5}$$

表示母线平行于 z 轴的柱面,xy 坐标面上的曲线 C:

$$\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=0 \end{cases}$$

为该柱面的一条准线.

事实上,在柱面上任取一点 $M(x,y,z)$,因点 M 在 xy 坐标面上的投影点 $N(x,y,0)$ 在曲线 C 上,即$(x,y,0)$ 满足准线方程,所以 $F(x,y)=0, z=0$. 故点 M 的坐标(x,y,z) 必定满足方程(7.1.5);反之,若点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的坐标满足方程(7.1.5),即 $F(x_0,y_0)=0$,则点$(x_0,y_0,0)$ 在曲线 C 上,因此,点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 位于与 z 轴平行且与 xy 坐标面交于点 $P'(x_0,y_0,0)$ 的直线上,故点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 在柱面上(参见图 7.1.6).

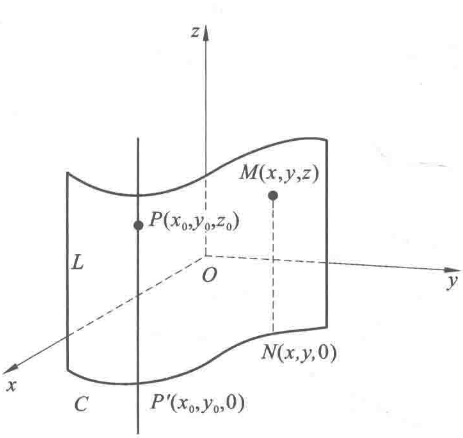


图 7.1.6　以 C 为准线,L 为母线的柱面

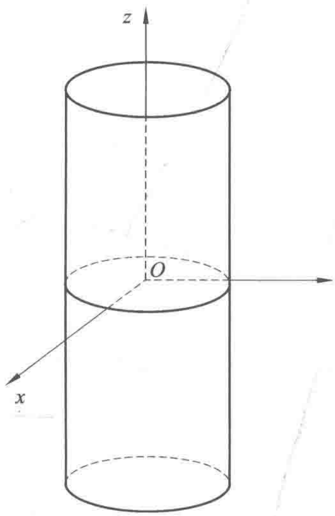


图 7.1.7　母线平行于 z 轴的圆柱面

综上所述,我们可以得出如下结论:在空间 R^3 中,$F(x,y)=0$ 表示母线平行于

z 轴的柱面；类似地，$F(x,z)=0$ 和 $F(y,z)=0$ 分别表示母线平行于 y 轴和 x 轴的柱面.

柱面通常以其准线的名称命名. 例如，方程 $x^2+y^2=R^2$ 表示母线平行于 z 轴的柱面，它的准线 C 是 xy 平面上以原点为中心，R 为半径的一个圆：$\begin{cases}x^2+y^2=R^2,\\ z=0.\end{cases}$因此，称该柱面为**圆柱面**(见图 7.1.7).

又如，$x^2=2py(p>0)$ 表示母线平行于 z 轴的柱面，它的准线 C 是 xy 坐标面上的抛物线$\begin{cases}x^2=2Py,\\ z=0.\end{cases}$因此，称该柱面为**抛物柱面**(见图 7.1.8).

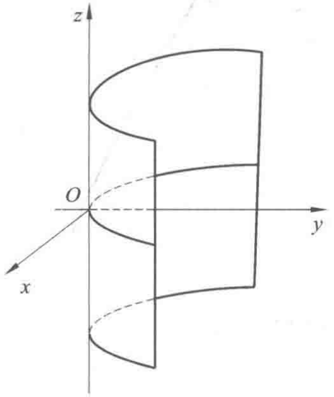


图 7.1.8　母线平行于 z 轴的抛物柱面

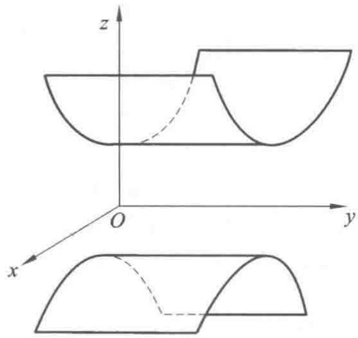


图 7.1.9　母线平行于 y 轴的双曲柱面

再如，方程 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ 表示母线平行于 y 轴的柱面，它的准面 C 是 xz 坐标面上的双曲线$\begin{cases}-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1,\\ z=0.\end{cases}$因此，称该柱面为**双曲柱面**(见图 7.1.9).

例 7.1.4　求母线平行于 z 轴，准线为$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-z^2=1,\\ z=3\end{cases}$的柱面方程.

解　准线方程可写为

$$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=10,\\ z=3.\end{cases}$$

它表示一条椭圆曲线. 故所求柱面为椭圆柱面，其方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=10$.

3. 旋转曲面

在空间 R^3 中，由一条曲线 C 绕一条固定直线 L 旋转一周所产生的曲面称为