主编 龙松

普通高等院校数学类课程教材

概率统计及应用学习指导

GAILÜ TONGJI JI YINGYONG XUEXI ZHIDAO

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

普通高等院校数学类课程教材

概率统计
及应用学习指导

主　编　龙　松

副主编　朱祥和　徐　彬

华中科技大学出版社

中国·武汉

内 容 提 要

本书是龙松主编的《概率统计及应用》(华中科技大学出版社 2016 年出版)一书的配套学习指导书.

本书的主要内容包括六个部分:大纲基本要求、内容提要、典型例题分析、课后习题全解、考研真题选讲、自测题.本书旨在帮助读者掌握知识要点,学会分析问题和解决问题的方法技巧,并且提高学习能力和应试能力.本书通俗易懂,详略得当,在选题和叙述上尽量做到突出基本内容的掌握和基本方法的训练,同时还适当增添了一些较典型的例题分析和考研真题选讲.

本书既可以作为工科、管理、财经及非数学类的理科学生学习"概率论与数理统计"课程的辅导教材,也可以作为考研的强化训练指导书,同时还适合概率统计专业的教师及相关工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

概率统计及应用学习指导/龙松主编. —武汉:华中科技大学出版社,2017.1
ISBN 978-7-5680-2407-5

Ⅰ.①概… Ⅱ.①龙… Ⅲ.①概率统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 287021 号

概率统计及应用学习指导
GaiLü Tongji Ji YingYong Xuexi Zhidao

龙 松 主编

策划编辑:谢燕群
责任编辑:熊 慧
封面设计:原色设计
责任校对:张 琳
责任监印:周治超
出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉) 电话:(027)81321913
武汉市东湖新技术开发区华工科技园 邮编:430223
录 排:武汉市洪山区佳年华文印部
印 刷:武汉科源印刷设计有限公司
开 本:710mm×1000mm 1/16
印 张:18
字 数:370 千字
版 次:2017 年 1 月第 1 版第 1 次印刷
定 价:38.00 元

前　言

“概率论与数理统计”是大学工科、经济、管理等各学科专业学生必修的基础课，也是硕士研究生入学考试的考查科目，其应用几乎遍及所有学科领域，更是大学生后续学习必不可少的数学基础.近年来，由于高等学校教学改革的实施，“概率论与数理统计”授课时间大大减少，从而导致知识面的拓展受到了一定的影响，然而后续课程的学习以及研究生的入学考试对该课程的要求并没有降低.为了妥善解决这个矛盾，帮助学生更好地学习，我们编写了这本学习指导书，同时这本书也是《概率统计及应用》(龙松主编，华中科技大学出版社 2016 年出版)一书的配套学习指导书.

本书的主要内容包括如下六个部分.

(1) 大纲基本要求：列出了教学大纲对本章内容的基本要求，一目了然，简明扼要，使学生明白学习本章后必须掌握的数学概念和相关知识.

(2) 内容提要：体系完整，系统归纳了本章所学习的全部内容，帮助学生理解并整理书本知识.

(3) 典型例题分析：每章精选了大量的各种例题，题型灵活多变，解题方法灵巧，思路开阔，举一反三，内容覆盖全面.

(4) 课后习题全解：该部分对课本——《概率统计及应用》(龙松主编，华中科技大学出版社 2016 年出版)的每一道习题做了详细的解答，可解除学生的疑惑，从而帮助学生更加全面地掌握解题思路、方法和技巧.

(5) 考研真题选讲：精选了历届考研试题中涉及本章内容的试题，开阔了学生的视野，使准备报考硕士研究生的学生更加明了考研的题型和难度，做到有的放矢.每一道例题都标明了具体的年份和数学类型，如(2016.1)表示 2016 年数学一，其他可类推.

(6) 自测题：每章给出了适量的自测题，并附有自测题的参考答案，便于学生在学习完本章知识后自我检查并巩固所学内容.

本书在编写过程中，力求做到通俗易懂、详略得当、取材全面，在选题和叙述上尽量做到突出基本内容的掌握和基本方法的训练，同时还适当增添了一些较典型的例题分析和考研真题选讲.本书既可以作为工科、管理、财经及非数学类的理科学生学习“概率论与数理统计”课程的辅导教材，也可以作为考研的强化训练指导书，同时还适合概率统计专业的教师及相关工程技术人员参考.

本书由龙松主编，朱祥和、徐彬担任副主编.其中龙松编写了第 1、2、3、4、5、6、9 章的内容，朱祥和编写了第 7 章的内容，徐彬编写了第 8 章的内容.另外参与讨论的

还有李春桃、张丹丹、沈小芳、张文钢、张秋颖等，在此，对他们的工作表示感谢！

在内容的选取过程中，多次与华中科技大学齐欢教授、中国地质大学叶牡才教授、第二炮兵指挥学院阎国辉副教授进行讨论，他们提出了许多宝贵的意见，对本书的编写与出版产生了十分积极的影响，在此表示由衷的感谢！

在本书编写过程中参考的相关书籍均列于书后的参考文献中，在此也向有关作者表示感谢！

最后，在此再次向所有支持和帮助过本书编写和出版的单位和个人表示衷心的感谢！

尽管一直对概率统计辅导教材的编写进行着各种努力和尝试，很想奉献给读者一本非常满意的辅导教材，但由于作者水平的限制，书中的错误和缺点在所难免，欢迎广大读者批评与指教，以期不断完善，谢谢！

作　者

2016 年 12 月

目　录

第1章　概率论的基本概念

1.1　大纲基本要求

(1) 了解样本空间(基本事件空间)的概念,理解随机事件的概念,掌握事件的关系及运算.

(2) 理解概率、条件概率的概念,掌握概率的基本性质,会计算古典概率和几何概率,掌握概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式,以及贝叶斯(Bayes)公式.

(3) 理解事件独立性的概念,掌握用事件独立性进行概率计算;理解独立重复试验的概念,掌握计算有关事件概率的方法.

1.2　内容提要

一、基本概念

(1) 随机试验 E:① 可以在相同的条件下重复地进行;② 每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果;③ 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

(2) 样本点 ω :随机试验 E 的每一个可能出现的结果.

(3) 样本空间 Ω 或 S:随机试验 E 的样本点的全体.

(4) 随机事件:由样本空间中的若干个样本点组成的集合,即随机事件是样本空间的一个子集.

(5) 必然事件:每次试验中必定发生的事件.

(6) 不可能事件 $\varnothing$:每次试验中一定不发生的事件.

(7) 基本事件:只含有一个不可再分的试验结果,即由单个样本点构成的集合.

二、事件间的关系和运算

1) 事件间的关系

(1) $A \subset B$(事件 B 包含事件 A):事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

(2) $A \cup B$(和事件):事件 A 与 B 至少有一个发生.

(3) $A\cap B=AB$(积事件):事件 A 与 B 同时发生.

(4) $A-B$(差事件):事件 A 发生而 B 不发生.

(5) $AB=\varnothing$ (A 与 B 互不相容或互斥):事件 A 与 B 不能同时发生.

(6) $AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$ (A 与 B 互为逆事件或对立事件):表示一次试验中 A 与 B 必有一个且仅有一个发生.

2）运算规则

(1) 交换律:$A\cup B=B\cup A, AB=BA$.

(2) 结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (AB)C=A(BC)$.

(3) 分配律:$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC), (AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$.

(4) 德·摩根律:$\overline{A\cup B}=\bar{A}\bar{B}, \overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

另有部分常用公式如下:

$$A\cup A=A,\quad A\cup\Omega=\Omega,\quad A\cup\varnothing=A,\quad A\cap A=A,\quad A\cap\Omega=A,\quad A\cap\varnothing=\varnothing$$

$$A-B=A-AB=A\bar{B},\quad A\cup B=A\cup B\bar{A}=B\cup\bar{B}A$$

3）概率论中事件与集合论的对应关系表

概率论中事件与集合论的对应关系如表 1.1 所示。

表 1.1

记号	概率论	集合论
Ω	样本空间,必然事件	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
ω	样本点	元素
A	事件	全集中的一个子集
$\bar{A}$	A 的对立事件	A 的补集
$A\subset B$	事件 A 发生导致事件 B 发生	A 是 B 的子集
$A=B$	事件 A 与事件 B 相等	A 与 B 相等
$A\cup B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生	A 与 B 的并集
AB	事件 A 与事件 B 同时发生	A 与 B 的交集
$A-B$	事件 A 发生但事件 B 不发生	A 与 B 的差集
$AB=\varnothing$	事件 A 与事件 B 互不相容(互斥)	A 与 B 没有相同的元素

三、概率的定义与性质

1）概率的公理化定义

要求函数 $P(A)$ 满足以下公理:

(1) 非负性:有 $P(A)\geqslant 0$.

(2) 规范性:$P(\Omega)=1$.

(3) 可列可加性:$A_1,A_2,\cdots,A_n\cdots$两两互不相容,并有 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{+\infty}P(A_i)$.

2) 性质

(1) $P(\varnothing)=0$.

(2) 有限可加性:对于 n 个两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

(有限可加性与可列可加性合称加法定理.)

(3) 若 $A\subset B$, 则 $P(A)\leqslant P(B)$, $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

(4) 对于任意事件 A、B, 有 $P(B-A)=P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)$(无条件差公式).

(5) 对于任一事件 A,有 $P(A)\leqslant 1$, $P(\overline{A})=1-P(A)$.

(6) 广义加法定理:对于任意两个事件 A、B,有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

对于任意三个事件,有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

四、等可能(古典)概型

1) 定义

如果试验 E 满足:

(1) 样本空间的元素只有有限个,即 $\Omega=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$;

(2) 每一个基本事件的概率相等,即 $P(e_1)=P(e_2)=\cdots=P(e_n)$.

则称试验 E 所对应的概率模型为等可能(古典)概型.

2) 计算公式

$$P(A)=k/n$$

式中:k 是 A 中包含的基本事件数;n 是 Ω 中包含的基本事件总数.

五、条件概率

1) 定义

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\quad (P(B)>0)$$

$P(A|B)$表示事件 B 发生的条件下,事件 A 发生的概率.

2) 乘法定理

$$P(AB)=P(A)P(B|A) \quad (P(A)>0); \quad P(AB)=P(B)P(A|B) \quad (P(B)>0)$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$
$$(n\geqslant 2, P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0)$$

3) 全概率公式与贝叶斯公式

$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是样本空间 Ω 的一个划分($B_iB_j=\varnothing, i\neq j, i,j=1,2,\cdots,n$, $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=\Omega$),则

(1) 当 $P(B_i)>0$ 时,有全概率公式 $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)$.

(2) 当 $P(A)>0$, $P(B_i)>0$ 时,有贝叶斯公式

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(AB_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)}$$

六、事件的独立性

1) 定义

两个事件 A、B,满足 $P(AB)=P(A)P(B)$时,称 A、B 为相互独立的事件.

2) 性质

(1) 两个事件 A、B 相互独立$\Leftrightarrow P(B)=P(B|A)$.

(2) 若 A 与 B、A 与 $\bar{B}$、$\bar{A}$ 与 B、$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 中有一对相互独立,则另外三对也相互独立.

3) 三个事件两两相互独立与三个事件相互独立

三个事件 A、B、C 满足 $P(AB)=P(A)P(B)$, $P(AC)=P(A)P(C)$, $P(BC)=P(B)P(C)$,称 A、B、C 三个事件两两相互独立. 若再满足 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$,则称 A、B、C 三个事件相互独立.

4) n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立

有 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,如果对任意 $k(1<k\leqslant n)$满足 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$,有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

则称这 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

1.3 典型例题分析

例 1 设 $0<P(A)<1$, $0<P(B)<1$,证明:

(1) 若 A 与 B 互不相容，则 A 与 B 一定不独立；

(2) 若 A 与 B 相互独立，则 A 与 B 一定是相容的.

【知识点】 互不相容和相互独立的定义.

【证明】 (1) 由于 $AB=\varnothing$，则 $P(AB)=0$，而 $P(A)P(B)\neq 0$，因此 $P(AB)\neq P(A)P(B)$，即 A 与 B 一定不独立.

(2) 由于 A 与 B 相互独立，故有 $P(AB)=P(A)P(B)>0$，因此 $AB\neq\varnothing$，即 A 与 B 一定是相容的.

例 2 一批产品共 N 件，其中 M 件正品. 从中随机地取出 n 件($n<N$). 试求下列三种情况下其中恰有 m 件($m\leqslant M$)正品(记为 A)的概率.

(1) n 件是同时取出的；

(2) n 件是无放回逐件取出的；

(3) n 件是有放回逐件取出的.

【知识点】 排列组合、有放回抽样、无放回抽样.

【解】 (1)
$$P(A)=C_M^m C_{N-M}^{n-m}/C_N^n$$

(2) 由于是无放回逐件取出，故可用排列法计算. 样本点总数有 A_N^n 种，n 次抽取中有 m 次为正品的组合数为 C_n^m 种. 对于固定的一种正品与次品的抽取次序，从 M 件正品中取 m 件的排列数有 A_M^m 种，从 $N-M$ 件次品中取 $n-m$ 件的排列数为 A_{N-M}^{n-m}种，故

$$P(A)=\frac{C_n^m A_M^m A_{N-M}^{n-m}}{A_N^n}$$

由于无放回逐件抽取也可以看成一次取出，故上述概率也可写成

$$P(A)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

可以看出，用第二种方法简便得多.

(3) 由于是有放回的抽取，每次都有 N 种取法，故所有可能的取法总数为 N^n 种，n 次抽取中有 m 次为正品的组合数为 C_n^m 种，对于固定的一种正、次品的抽取次序，m 次取得正品，每次都有 M 种取法，共有 M^m 种取法，$n-m$ 次取得次品，每次都有 $N-M$ 种取法，共有$(N-M)^{n-m}$种取法，故

$$P(A)=C_n^m M^m(N-M)^{n-m}/N^n$$

此题也可用伯努利概型. 共做了 n 重伯努利试验，每次取得正品的概率为 $\frac{M}{N}$，则取得 m 件正品的概率为

$$P(A)=C_n^m\left(\frac{M}{N}\right)^m\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-m}$$

例 3 袋中有 a 个白球和 b 个红球，现按无放回抽样，依次把球一个个取出来，试求第 k 次取出的球是白球的概率($1\leqslant k\leqslant a+b$).

【知识点】 无放回抽样、排列组合.

【解1】 把 $a+b$ 个球编号,把球按摸出的先后次序排队,则基本事件总数为 $a+b$个相异元素的全排列,有$(a+b)!$ 种,设 $A=\{$第 k 次取出的球是白球$\}$,这相当于在第 k 个位置上放一个白球,在其余 $a+b-1$ 个位置上放另外的 $a+b-1$ 个球,从而 A 事件包含的基本样本点数为 $a(a+b-1)!$,故所求的概率为

$$P(A)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}$$

【解2】 将球看作是各不相同的,只考虑前 k 个位置,此时基本事件总数为 A_{a+b}^{k},设 $A=\{$第 k 次取出的球是白球$\}$,这相当于在第 k 个位置上放一个白球,有 a 种放法,在其余 $k-1$ 个位置上从余下的 $a+b-1$ 个球中任取 $k-1$ 个球,有 A_{a+b-1}^{k-1} 种放法,从而 A 事件包含的基本样本点数为 $a\mathrm{A}_{a+b-1}^{k-1}$,故所求的概率为

$$P(A)=\frac{a\mathrm{A}_{a+b-1}^{k-1}}{\mathrm{A}_{a+b}^{k}}=\frac{a}{a+b}$$

例 4 一架升降机开始时有六位乘客,并等可能地停于十层楼的每一层.试求下列事件的概率:

(1) $A=\{$某指定的一层有两位乘客离开$\}$;

(2) $B=\{$没有两位及两位以上的乘客在同一层离开$\}$;

(3) $C=\{$恰有两位乘客在同一层离开$\}$;

(4) $D=\{$至少有两位乘客在同一层离开$\}$.

【知识点】 排列组合、互逆事件的概率性质.

【解】 由于每位乘客均可在十层楼中的任一层离开,故所有可能结果为 10^6 种.

(1) $P(A)=\dfrac{\mathrm{C}_6^2 9^4}{10^6}$,也可由 6 重伯努利模型得

$$P(A)=\mathrm{C}_6^2\left(\frac{1}{10}\right)^2\left(\frac{9}{10}\right)^4$$

(2) 六位乘客在十层中任意六层离开,故

$$P(B)=\frac{\mathrm{A}_{10}^6}{10^6}$$

(3) 由于没有规定在哪一层离开,故可在十层中的任一层离开,有 C_{10}^1 种可能结果,再从六位乘客中选两位在该层离开,有 C_6^2 种离开方式.其余四位中不能再有两位同时离开的情况,因此可包含以下三种离开方式:① 四位中有三位在同一层离开,另一位在其余八层中任一层离开,共有 $\mathrm{C}_9^1\mathrm{C}_4^3\mathrm{C}_8^1$ 种可能结果;② 四位同时离开,有 C_9^1 种可能结果;③ 四位都不在同一层离开,有 A_9^4 种可能结果,故

$$P(C)=\frac{\mathrm{C}_{10}^1\mathrm{C}_6^2(\mathrm{C}_9^1\mathrm{C}_4^3\mathrm{C}_8^1+\mathrm{C}_9^1+\mathrm{A}_9^4)}{10^6}$$

(4) $D=\overline{B}$,故

$$P(D)=1-P(B)=1-\frac{A_{10}^{6}}{10^{6}}$$

例5　把一个表面涂有颜色的立方体等分为1000个小立方体，在这些小立方体中，随机地取出1个，试求它有i面涂有颜色的概率$P(A_i)(i=0,1,2,3)$.

【知识点】　样本空间、样本点、古典概率的计算.

【解】　设$A_i=\{$小立方体有i面涂有颜色$\}$，$i=0,1,2,3$.

在1000个小立方体中，只有位于原立方体的角上的小立方体是三面有色的，这样的小立方体共有8个. 只有位于原立方体的棱上(除去八个角外)的小立方体是两面涂色的，这样的小立方体共有96(12×8)个. 同理，原立方体的六个面上(除去棱)的小立方体是一面涂色的，共有384(8×8×6)个. 其余512(1000−(8+96+384))个内部的小立方体是无色的，故所求概率为

$$P(A_0)=\frac{512}{1000}=0.512,\quad P(A_1)=\frac{384}{1000}=0.384$$

$$P(A_2)=\frac{96}{1000}=0.096,\quad P(A_4)=\frac{8}{1000}=0.008$$

例6　在一个盒中装有15个乒乓球，其中有9个新球，在第一次比赛中任意取出3个球，比赛后放回原盒中，第二次比赛同样任意取出3个球，求第二次取出的3个球均为新球的概率.

【知识点】　全概率公式.

【解】　设$A_i=\{$第一次取出的3个球中有i个新球$\}$，$i=0,1,2,3$. $B=\{$第二次取出的3个球均为新球$\}$.

由全概率公式，有

$$\begin{aligned}P(B)&=\sum_{i=0}^{3}P(B\mid A_i)P(A_i)\\&=\frac{C_6^3}{C_{15}^3}\cdot\frac{C_9^3}{C_{15}^3}+\frac{C_9^1C_6^2}{C_{15}^3}\cdot\frac{C_8^3}{C_{15}^3}+\frac{C_9^2C_6^1}{C_{15}^3}\cdot\frac{C_7^3}{C_{15}^3}+\frac{C_9^3}{C_{15}^3}\cdot\frac{C_6^3}{C_{15}^3}=0.089\end{aligned}$$

例7　按以往概率论考试结果分析，努力学习的学生有90%的可能考试及格，不努力学习的学生有90%的可能考试不及格. 据调查，学生中有80%的人是努力学习的，试问：

(1) 考试及格的学生有多大可能是不努力学习的人?

(2) 考试不及格的学生有多大可能是努力学习的人?

【知识点】　全概率公式、贝叶斯公式.

【解】　设$A=\{$被调查学生是努力学习的$\}$，则$\overline{A}=\{$被调查学生是不努力学习的$\}$. 由题意知，$P(A)=0.8$，$P(\overline{A})=0.2$，又设$B=\{$被调查学生考试及格$\}$. 由题意知，$P(B|A)=0.9$，$P(\overline{B}|\overline{A})=0.9$，故由贝叶斯公式知

(1)　$$P(\overline{A}|B)=\frac{P(\overline{A}B)}{P(B)}=\frac{P(\overline{A})P(B|\overline{A})}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}$$

$$=\frac{0.2\times0.1}{0.8\times0.9+0.2\times0.1}=\frac{1}{37}=0.02703$$

即考试及格的学生中不努力学习的学生仅占 2.703%.

(2) $$P(A|\bar{B})=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(A)P(\bar{B}|A)}{P(A)P(\bar{B}|A)+P(\bar{A})P(\bar{B}|\bar{A})}$$

$$=\frac{0.8\times0.1}{0.8\times0.1+0.2\times0.9}=\frac{4}{13}=0.3077$$

即考试不及格的学生中努力学习的学生占 30.77%.

例 8 有朋友从远方来访，他乘火车、轮船、汽车、飞机的概率分别为 3/10、1/5、1/10、2/5，而乘火车、轮船、汽车、飞机迟到的概率分别为 1/4、1/3、1/12、1/8.

(1) 求此人来迟的概率；

(2) 若已知此人来迟了，求乘火车来的概率.

【知识点】 全概率公式、贝叶斯公式.

【解】 设事件 A 表示"此人来迟了"，事件 A_i 分别表示"此人乘火车、轮船、汽车、飞机来"($i=1,2,3,4$)，则 $\bigcup_{i=1}^{4}A_i=\Omega$，且 $P(A_i)>0$，A_1、A_2、A_3、A_4 两两互不相容.

(1) 由全概率公式得

$$P(A)=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)-P(A\mid A_i)=\frac{3}{10}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\times\frac{1}{12}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{5}$$

(2) 由贝叶斯公式得

$$P(A_1\mid A)=\frac{P(A_1)P(A\mid A_1)}{\sum_{j=1}^{4}P(A_j)P(A\mid A_j)}=\frac{\frac{3}{10}\times\frac{1}{4}}{1/5}=\frac{3}{8}$$

例 9 袋中装有 m 枚正品硬币、n 枚次品硬币(次品硬币的两面均印有国徽). 在袋中任取一枚，将它投掷 r 次，已知每次都得到国徽. 试问这只硬币是正品的概率是多少？

【知识点】 全概率公式、贝叶斯公式.

【解】 设 $A=\{$投掷硬币 r 次都得到国徽$\}$，$B=\{$这枚硬币为正品$\}$，由题知

$$P(B)=\frac{m}{m+n},\quad P(\bar{B})=\frac{n}{m+n}$$

$$P(A|B)=\frac{1}{2^r},\quad P(A|\bar{B})=1$$

则由贝叶斯公式知

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})}$$

$$=\frac{\frac{m}{m+n}\cdot\frac{1}{2^r}}{\frac{m}{m+n}\cdot\frac{1}{2^r}+\frac{n}{m+n}\cdot 1}=\frac{m}{m+2^r n}$$

例 10　设有来自三个地区考生的报名表，分别为 10 份、15 份和 25 份，其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份. 随机地取一个地区的报名表，从中先后抽出两份.

(1) 求先抽到的一份是女生的报名表的概率 p；

(2) 已知后抽到的一份是男生的报名表，求先抽到的一份是女生的报名表的概率 q.

【知识点】　条件概率、乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式.

【解】　设 $A_i=\{$报名表是取自第 i 区的考生$\}(i=1,2,3)$，$B_j=\{$第 j 次取出的是女生的报名表$\}(j=1,2)$，则

$$P(A_i)=\frac{1}{3},\quad i=1,2,3$$

$$P(B_1|A_1)=\frac{3}{10},\quad P(B_1|A_2)=\frac{7}{15},\quad P(B_1|A_3)=\frac{5}{25}$$

(1)
$$p=P(B_1)=\sum_{i=1}^{3}P(B_1\mid A_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{25}\right)=\frac{29}{90}$$

(2)
$$q=P(B_1|\overline{B_2})=\frac{P(B_1\overline{B_2})}{P(\overline{B_2})}$$

而
$$P(\overline{B_2})=\sum_{i=1}^{3}P(\overline{B_2}\mid A_i)P(A_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{10}+\frac{8}{15}+\frac{20}{25}\right)=\frac{61}{90}$$

$$P(B_1\overline{B_2})=\sum_{i=1}^{3}P(B_1\overline{B_2}\mid A_i)P(A_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}+\frac{7}{15}\times\frac{8}{14}+\frac{5}{25}\times\frac{20}{24}\right)=\frac{2}{9}$$

故

$$q=P(B_1|\overline{B_2})=\frac{P(B_1\overline{B_2})}{P(\overline{B_2})}=\frac{2/9}{61/90}=\frac{20}{61}$$

例 11　设电路由三个相互独立且串联的电子元件构成，它们分别以 0.03、0.04、0.06 的概率被损坏而发生断路，求电路发生断路的概率.

【知识点】　随机事件的加法公式、随机事件相互的独立性质.

【解】　设 A_i 表示"第 i 个电子元件被损坏"$(i=1,2,3)$，则有 $P(A_1)=0.03$，$P(A_2)=0.04$，$P(A_3)=0.06$. 依题意，所求概率为

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup A_3)&=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)\\&\quad-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)\\&=0.03+0.04+0.06-0.03\times0.04-0.04\times0.06-0.03\\&\quad\times0.06+0.03\times0.04\times0.06\\&=0.124672\end{aligned}$$

例 12 若 $P(A|B)=P(A|\bar{B})$，证明事件 A 与事件 B 相互独立.

【知识点】 随机事件的关系和运算、全概率公式、随机事件的独立性质.

【证明】 由于 $A=AB\cup A\bar{B}$，且 $AB\cap A\bar{B}=\varnothing$，因此

$$\begin{aligned}P(A)&=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})\\&=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|B)\\&=[P(B)+P(\bar{B})]P(A|B)=P(A|B)\end{aligned}$$

从而有

$$P(AB)=P(A|B)P(B)=P(A)P(B)$$

故由独立性定义知，事件 A 与事件 B 相互独立.

1.4 课后习题全解

习 题 1.1

1. 写出下列随机试验的样本空间：

(1) 同时掷出两颗骰子，观察两颗骰子点数之和.

【解】 $\Omega=\{2,3,4,\cdots,12\}$.

(2) 抛出一枚硬币，观察其正反面出现的情况.

【解】 $\Omega=\{$正，反$\}$.

(3) 抽查某位同学概率论考试通过与否.

【解】 $\Omega=\{$通过，没通过$\}$.

(4) 观察某十字路口红绿灯的颜色.

【解】 $\Omega=\{$红，黄，绿$\}$.

2. 设 A、B、C 是三个随机事件，试用 A、B、C 表示下列事件：

(1) A 与 B 都发生，而 C 不发生.

【解】 $AB\bar{C}$.

(2) A、B、C 中恰好发生一个.

【解】 $A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$.

(3) A、B、C 中至少发生一个.

【解】 $A\cup B\cup C=\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$.

(4) A、B、C 都不发生.

【解】 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}=\overline{A\cup B\cup C}$.

(5) A、B、C 中至少有两个发生.

【解】 $AB\cup BC\cup AC=AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC+ABC$.

3. 若事件 A、B 满足 $B\subset A$，则下列命题中正确的是(　　).

A. A 与 B 必同时发生　　B. A 发生，B 必发生