理工社®

不是最好的时光里有你们
而是你们在
我才有了最美的时光！

2017
升级版

考研数学

高等数学必修17课

主编 杨超 陈秋成

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

考研数学

高等数学必修17课

主 编 杨 超 陈秋成

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

考研数学高等数学必修17课 / 杨超，陈秋成主编. —北京：北京理工大学出版社，2016.2
ISBN 978－7－5682－1930－3

Ⅰ.①考… Ⅱ. ①杨… ②陈… Ⅲ. ①高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2016）第042664号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 /（010）68914775（总编室）
（010）82562903（教材售后服务热线）
（010）68948351（其他图书服务热线）
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京盛彩捷印刷有限公司
开　　本 / 710 毫米 ×1000 毫米　1/16
印　　张 / 22
字　　数 / 440千字
版　　次 / 2016年2月第1版　2016年2月第1次印刷
定　　价 / 38.80元

责任编辑 / 陈莉华
文案编辑 / 陈莉华
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

前　　言

近年来考研数学的命题方式和内容，已经清楚地彰显了数学试卷题目的低难度、客观题型对“三基”(基本概念与定义、基本定理与性质、基本方法与结论)拓展的高要求、主观题型对考点的灵活综合。显然，仅仅靠普通的大学数学教学的教材，肯定不能达到考研数学的要求，如何在教材基础上拓展和过渡到考研数学大纲应试的范围和要求，正是作者编写《考研数学高等数学必修 17 课》的原因，旨在基本教材和考研内容要求之间，架设一座桥梁，帮助考生获得最有效的快速提升。

在多年考研数学辅导一线的教学实践中，作者创立了独特的“导学桥”训练新理念，其教学效果获得了考生共鸣。本书具有四大特色：

第一大特色是构架了完备的“三基”立体化体系

系统总结并列举了大纲要求的需要、熟练和必记的“三基”具体内容，利用精选或原创低难度例题帮助考生逐个理解、模仿和应用，避免无的放矢，提高复习效率。比如，精确列举了大纲的全部考点拓展，做到不多余、不遗漏。如历年真题出现概率最多的基本无穷小等价关系，导数定义中 3 个隐含的信息、基本积分公式，多元积分中的常用对称性关系，等等。这样做可以大幅度省去考生做多余的复习笔记的时间和总结提炼的精力，而使考生主要精力放在消化吸收掌握应用方面。

第二大特色是方法的原创性

比如，在多元函数微分内容部分，作者提出了主要方针在证明二重极限不存在上，复合函数因变量对自变量求导是通过“对应法则对位置变量求导”这一桥梁进行的，这些新观点，一方面大大提高了考生的接受能力和认知效率。另一方面，提供了作者解答实际数学题目的快速经验。

第三大特色是内容的完备性

利用题型解法理念弱化抽象概念，理清解题思路，例题融合了多个考点，使诸多知识点相互渗透融合，体现“学而常习之”的经典方法论。对每章内容分层次系统地讲述，引导考生在解答问题时，判断题型，选用方法，如极限的 7 型 10 法训练、不定积分的 5 大换元集合，等等。

第四大特色是重要结论的形象助记

众所周知，对一个概念和结论的理解，最终获得的知识是靠记忆体现的，作者结合当代先进教育心理学的理论，摸索一套形象记忆法，非常有效。比如，函数的连续可以这样形象描述：函数连续像人的一张脸没有痘痘，皮肤越好说明可导的阶次越高；再如，求旋转体体积的题型有 16 类，同时也有 16 个公式，死记硬背比较困难，作者就编写了四句口诀：

上下原函横面积，
左右反函纵面积；
两轴轮换积分内，
平移减函莫忘记。

再通过例题向学生解析口诀的含义和使用方法，取得了非常好的效果。其次，灵活使用数形结合与整体视观等。

《考研数学高等数学必修17课》的前期教学实践已经取得了显著的教学效果和良好的社会反响，希望它的出版能在教材基本知识和国家数学考研命题所要求的知识之间架设真正的桥梁，建议读者利用同济第6或第7版高数教材，与本书章节同步复习，利用本书提供的方法练习教材的习题，然后再配以历年真题和适量的其他习题集训练。

深度分析、研究教材和历年真题，善于提炼新的考研数学出版物精华，勤于总结创新，利用先进的教育心理学成果，利用文学备忘，不遗余力更新新一年的著作。这些工作除了耗费大量的精力和时间外，还要求辅导老师呕心沥血于教学实践，才能得到理想的辅导效果。

古人云"蒿草之下，或有兰香；茅茨之下，或有侯王"。我们考研界的每个教师如能相互学习，不断切磋业务和教学艺术，共同为莘莘考研学子投入智慧和心力是作者最大的心愿。

书中笔误和错误在所难免，希望广大考生和同行批评指教，作者将不断完善。

杨超　陈秋成

2016年3月

目　　录

第1课　函数极限与连续

第一节　映射与函数

一、区间、定义域与邻域

数学中区间、定义域和邻域使用集合来表示.集合是指具有某种特定性质的事物总体，组成这个集合的事物称为该集合的元素.集合主要有两种表示方法，一种是列举法：如$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$；另一种为描述法：如$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，区间、邻域和定义域是三类特殊的集合.

区间形式为$[a,b]$，(a,b)，$[a,b)$，$(a,b]$四种情形，其中规定$a<b$，区间长度$b-a\neq 0$.

定义域形式与区间形式一致，唯一不同的是规定$a\leqslant b$，即长度可以等于零，因此定义域可以是离散点，比如函数$y=\sqrt{\cos x-1}$的定义域就是一系列离散的点$x_k=2k\pi$，$k=0,\pm 1,\cdots$.基本初等函数的定义域长度都不为零，而初等函数定义域长度可能为零，所以，基本初等函数在其定义域内无条件连续，而初等函数只能在其定义区间内连续.

邻域分为有心邻域和去心邻域，x_0点的有心邻域简称邻域，表示为$0\leqslant|x-x_0|<\delta$，其中δ为大于0的任意实数，而去心邻域表示为$0<|x-x_0|<\delta$，注意δ可小可大，不过，在很多数学问题中，大的δ对问题解答无影响，常取$0<\delta<1$的情形.另外还有左邻域$(x_0-\delta,x_0)$和右邻域$(x_0,x_0+\delta)$之分.

二、映射与函数

2.1 函数是实数集之间的一类特殊映射

设两个非空集合X，Y，如果存在一个对应法则f，使得对X中的每个元素x，按照法则f，在Y中有唯一的元素y与之对应，则称f为从集合X到集合Y的映射，记作$f:X\rightarrow Y$或记为$y=f(x)$.其中y称为映射f下x的像，x称为映射f下y的逆像或原像；集合X为映射f的定义域，记为D_f，显然$D_f=X$，集合X中全部元素x在集合Y中的像称为映射f的值域，记为R_f，由于集合Y中除了集合X对应的像外，可能还有其余元素，故一般$R_f\neq Y$，但$R_f\subseteq Y$.

如对集合X中任意两个元素$x_1\neq x_2$，它们的像也满足$y_1\neq y_2$，则称f为单射；如果$R_f=Y$则称f为满射；同时满足单射和满射时则称为一一映射，此时的f是可逆映射，其特征是两个集合中的元素一一对应.

如果上述集合X，Y中的元素都是实数，且为满射，则这种映射称为函数，记作$y=f(x)$，x的取值范围称为函数的定义域D_f，y的取值范围称为函数的值域R_f，

集合 $X = D_f, Y = R_f$.

函数本质上是一种特殊的映射，它是一个动态的概念，函数对应的实体并不是变量，而是两个实数集，即变量的取值范围，变量符号 X, Y 只是借用的记号罢了，所以，函数用什么符号表示并没有关系，而起决定作用的是定义域和对应法则. 对应法则并不抽象，如 $y = 2x + 1$，则 $2x + 1$ 就是对应法则. 对应法则和变量复合形成复合函数，因变量对自变量的求导需要通过对应法则对复合变量求导作为桥梁. 变量复合形成的复合函数，如 $y = f(2x + 1)$，其中 $2x + 1$ 称为复合变量；对应法则复合形成的复合函数，如 $y = f(g(x))$，其中 $u = g(x)$ 称为内层函数，$y = f(u)$ 称为外层函数；对应法则和变量同时复合形成的复合函数，如 $y = f(g(2x + 1))$. 变量的复合又分为显式复合和隐式复合，显式复合如 $y = f(2x + 1)$，特征是自变量和因变量分别位于等式的两边，隐式复合如 $y = f(x + y)$，特征是自变量和因变量混合位于等式的两边，从而形成**显式复合函数**和**隐式复合函数**.

当 f 是可逆映射时，函数 $y = f(x)$ 存在反函数，反函数对应法则一般使用 f^{-1} 或另一个字母比如 g 表示，且满足对偶性 $f(g(x)) = g(f(x)) = x$，在求得反函数后一般还需要交换 x, y 两个变量，以保证习惯上使用 x 表示自变量.

【例 1】 设 $x^2 + y^2 = 1$，讨论 y 与 x 的函数关系.

【解】 根据函数的概念，函数是实数集合之间的满射，映射首先要求，对 X 中的每个元素 x，按照对应法则 f，在 Y 中有**唯一**确定的元素 y 与之对应，显然方程 $x^2 + y^2 = 1$ 不满足映射条件，故 y 与 x 没有函数关系. 但若把 y 分为两个区间 $y \geqslant 0$ 和 $y < 0$，则在每个区间内 y 与 x 存在函数关系. 一般称函数标准表示法 $y = f(x)$ 为显式函数，而 $x^2 + y^2 = 1$ 在每个区间内属于隐式表示，为隐函数，即 y 隐含为 x 的函数，这一点在求导时要特别注意.

隐函数存在定理： 若 $F(x, y, z) = 0$，且 $F(x, y, z)$ 具有连续偏导数，当 $F_z(x, y, z) \neq 0$ 时可以唯一确定一个连续且具有连续偏导的函数 $z = z(x, y)$；同理，若 $F_x(x, y, z) \neq 0$ 时可以唯一确定一个连续且具有连续偏导的函数 $x = x(y, z)$.

【例 2】 设 $f(x)$ 一阶可导，$f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{x}$，求 $f'(1)$.

【解】 $\begin{cases} f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{x}, \\ f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = 3x, \end{cases} \Rightarrow f(x) = 2x - \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(1) = 3.$

【例 3】 已知 $f(x) = \sin x, f[\varphi(x)] = 1 - x^2$，求 $\varphi(x)$ 的解析式及其定义域.

【解】 依题意得 $\sin\varphi(x) = 1 - x^2, \varphi(x) = \arcsin(1 - x^2)$.

由 $-1 \leqslant 1 - x^2 \leqslant 1$ 可知 $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$.

故 $\varphi(x) = \arcsin(1 - x^2), x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

注意函数的复合要点是：将内层函数代入外层函数的表达式和外层函数的定

义域，然后分别联立**内层函数的值域和定义域**不等式组，求得复合函数的定义域和分段表达式.

【例 4】设 $f(x)=\begin{cases}1-x, x\leqslant 0,\\ x+2, x>0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

【解】将内层函数 $g(x)$ 代入外层函数的表达式和定义域，

$$f[g(x)]=\begin{cases}1-g(x), g(x)\leqslant 0,\\ g(x)+2, g(x)>0.\end{cases}$$

(1) 由 $\begin{cases}g(x)\leqslant 0,\\ x\geqslant 0\end{cases}$ 得 $g(x)=-x\leqslant 0$，即 $x\geqslant 0$，

所以，当 $x\geqslant 0$ 时，$f[g(x)]=1+x$.

(2) 由 $\begin{cases}g(x)>0,\\ x<0\end{cases}$ 得 $g(x)=x^2>0$，即 $x<0$，

所以，当 $x<0$ 时，$f[g(x)]=x^2+2$.

故

$$f[g(x)]=\begin{cases}x^2+2, x<0,\\ 1+x, x\geqslant 0.\end{cases}$$

【例 5】设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，$f_n(x)=\underbrace{f(f(\cdots f(x))\cdots)}_{n次}$，

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin[f_n(x)]$.

【解】因为 $f_2(x)=f[f(x)]=\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Bigg/\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

$$f_3(x)=f[f_2(x)]=\frac{f_2(x)}{\sqrt{1+f_2^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},$$

比较以上两式可知 $f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$（由数字归纳法可证），

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin[f_n(x)]=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{1+nx^2}}=\frac{x}{|x|}.$$

【例 6】求 $y=\sin x$，$\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{3\pi}{2}$ 的反函数.

【解】定义在 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 区间上的三角正弦函数存在反函数，故必须把原区间平移

$$\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leqslant x-\pi \leqslant \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leqslant \pi - x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} y = \sin x = \sin(\pi - x) &\Rightarrow \pi - x = \arcsin y \\ &\Rightarrow x = \pi - \arcsin y \\ &\Rightarrow y = \pi - \arcsin x. \end{aligned}$$

2.2 四个常用的经典分段函数

(1)绝对值函数 $y = |x| = \begin{cases} x, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$

(2)符号函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0, \end{cases}$ 重要关系：$|x| = x\operatorname{sgn} x$.

符号函数在积分或求导中可以视为常数处理，比如：

$$(x^k |x|)' = (x^{k+1}\operatorname{sgn} x)' = (k+1)x^k \operatorname{sgn} x = (k+1)x^{k-1}|x|,$$

$$\int |x| \mathrm{d}x = \int x\operatorname{sgn} x \mathrm{d}x = \operatorname{sgn} x \int x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{sgn} x + C = \frac{1}{2}x|x| + C.$$

(3)取整函数 $y = [x]$.

即取不大于 x 的最大整数，简称“取近小”，即取距离 x 最近的小于等于 x 的第一个整数.

如 $[1]=1$, $[1.01]=1$, $[-1.01]=-2$, $[0.01]=0$, $[-0.01]=-1$.

一般地 $\lim\limits_{x\to k^+}[x]=k$; $\lim\limits_{x\to k^-}[x]=k-1$; $[x+n]=[x]+n$，其中 k 为整数，n 是正整数.

(4)狄利克雷函数 $D(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbf{Q}(\text{即 } x \text{ 为有理数}), \\ 0, x \in \mathbf{R}-\mathbf{Q}(\text{即 } x \text{ 为无理数}), \end{cases}$ 注意任何两个有理数之间有无穷个无理数，任何两个无理数之间有无穷个有理数. 狄利克雷函数主要用于举反例中.

2.3 函数的四个基本性质

(1)函数有界性.

设函数定义域为 D_f，数集 $D \subset D_f$，任意 $x \in D$，$\exists$ 数 k，$f(x) \leqslant k$，则函数在 D 上有上界；$f(x) \geqslant k$，则函数在 D 上有下界；$|f(x)| \leqslant k$，则函数在 D 上有界.

如果对于任何正整数 M，总 $\exists x_1 \in D \Rightarrow f(x_1) > M$，则函数在 D 上无界.

证明或判别函数有界性的思路：

① 有界性的定义；

② 连续函数在闭区间上一定有界；

③ 若极限存在，由极限局部有界性，可知函数在某区间上有界.

(2)函数单调性.

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x)$ 单调增加；$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(x)$ 单调减少.

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2) \Rightarrow f(x)$ 单调不减；$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2) \Rightarrow f(x)$ 单调不增.

(3)函数奇偶性

若 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数，偶函数的特征是关于 y 轴对称；若 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数，奇函数的一个重要性质是 $f(0) = 0$. 奇函数求导一次后变为偶函数，偶函数求导一次后变为奇函数；奇函数积分一次后变为偶函数，偶函数积分一次后不一定变为奇函数，如$\int x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C$就不是奇函数.

【例 7】验证函数 $f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ 为奇函数，其中 $x \in (-1,1)$.

【解】$f(-x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x} = -\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$,

所以 $f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ 为奇函数.

【例 8】求证 $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$ 在$(-\infty, +\infty)$ 上有界.

【证】令 $g(x) = \int_0^x t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$,

因为 $g(-x) = \int_0^{-x} t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t \xlongequal{\text{令 } u=-t} \int_0^x -u\mathrm{e}^{(-u)^2}(-\mathrm{d}u) = \int_0^x u\mathrm{e}^{u^2}\mathrm{d}u$,

所以 $g(x)$ 为偶函数，因此 $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}g(x)$ 也为偶函数.

故只需证明 $f(x)$ 在$[0, +\infty)$ 上有界即可.

因为 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\int_0^x t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{x^2}} \xlongequal{L'} \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{x^2}\cdot 2x} = \frac{1}{2}$,

取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$，$\exists X > 0$，当 $x \in [X, +\infty)$ 时，$\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$,

即 $0 < f(x) < 1$.

又 $f(x)$ 在$[0,x]$ 上连续，

于是 $\exists l > 0$，使对 $\forall x \in [0,x]$，恒有 $0 \leqslant f(x) \leqslant l$，取 $M = \max\{1,l\}$，则对于 $\forall x \in [0, +\infty)$，有 $0 \leqslant f(x) \leqslant M$.

同理可证$(-\infty, 0]$ 的情况，故 $f(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$ 上有界.

(4)函数周期性.

若 $f(x+T) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，函数的周期 T 是指最小的正周期.

如 $f(x) = x - [x]$,

因为 $f(x+n)=(x+n)-[x+n]=(x+n)-([x]+n)$

$$=x-[x]=f(x),$$

故 $f(x)$ 为周期函数，最小正周期为 1. 有些函数没有最小正周期，例如狄利克雷函数.

三角函数 $y=\sin(ax+b)$ 的周期为 $T=\frac{2\pi}{|a|}$；$y=\tan(ax+b)$ 的周期为 $T=\frac{\pi}{|a|}$；两个周期函数和差的周期必须是以 π 为单位的最小公倍数，如 $\sin 2x+\tan 3x$ 的周期为二者的最小公倍数 π；而 $\sin 2\pi x+\tan 3x$ 为非周期函数. 周期函数的重要性质是求导不改变其周期，任意周期积分相等.

【例 9】讨论狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbf{Q},\\0, x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}\end{cases}$ 的周期性、单调性和有界性.

【解】(1) 对于任意有理数 $r\neq 0$，有 $x+r=\begin{cases}\text{有理数}, x\text{ 为有理数},\\\text{无理数}, x\text{ 为无理数},\end{cases}$ 对于任意的实数 x，有 $D(x+r)=\begin{cases}1, x\text{ 为有理数},\\0, x\text{ 为无理数}\end{cases}=D(x)$，故任意非零有理数 r 都是它的周期. 但任意无理数都不是 $D(x)$ 的周期，因为任取无理数 α，

$$D(-\alpha)=0\Rightarrow D[\alpha+(-\alpha)]=D(0)=1\neq D(-\alpha).$$

(2) 对于任意的有理数 x_1 和无理数 x_2，当 $x_1>x_2$ 或 $x_1<x_2$ 时都有 $D(x_1)=1>0=D(x_2)$，故不具有单调性.

(3) $|D(x)|\leqslant 1$，故 $D(x)$ 是全体实数 $\mathbf{R}$ 上的有界函数.

2.4 六个基本初等函数

(1) 幂函数 $y=x^{\alpha}$ $(0<\alpha<1$，或 $\alpha=1$，或 $\alpha>1$，或 $\alpha<0)$，并掌握对应的 4 个曲线图形.

(2) 指数函数 $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1, x\in(-\infty,+\infty))$，并掌握对应的 2 个曲线图形.

(3) 对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1, x\in(0,+\infty))$，一般使用 $y=\ln x$ 形式.

(4) 三角函数：

$$y=\sin x, x\in(-\infty,+\infty); y=\cos x, x\in(-\infty,+\infty);$$

$$y=\tan x, x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}; y=\cot x, x\neq k\pi;$$

$$y=\sec x, x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}; y=\csc x, x\neq k\pi.$$

(5) 反三角函数：

$y=\arcsin x$ $\left(x\in(-1,1], y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$，其图像如图 1.1 所示；

$y=\arccos x\ (x\in[-1,1],y\in[0,\pi])$，其图像如图 1.2 所示；

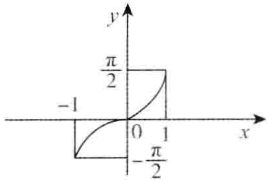

图 1.1

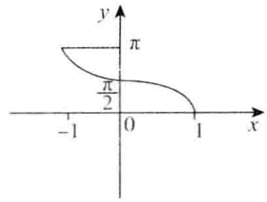

图 1.2

$y=\arctan x\left(x\in(-\infty,\infty),y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$，其图像如图 1.3 所示；

$y=\operatorname{arccot}x(x\in(-\infty,\infty),y\in(0,\pi))$，其图像如图 1.4 所示.

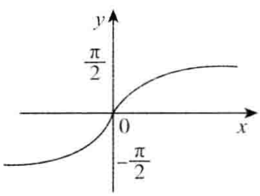

图 1.3

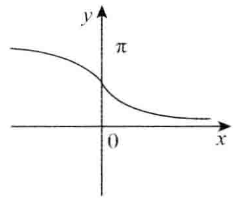

图 1.4

(6) 常数函数 $y=\text{const}$.

必须掌握 6 个基本初等函数图形，因为从图形中很容易看出他们的定义域与值域及其渐近线.

由 6 个基本初等函数经有限次四则运算和有限次复合并能用一个数学式子表达出来的函数称为**初等函数**；否则，称为**非初等函数**.

如 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}=1-|x-1|$ 为非初等函数，因绝对值不属于四则运算.

又如 $f(x)=x-[x]=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1,\\ x-1, & 1\leqslant x<2,\end{cases}x\in[0,2)$ 为非初等函数. 而 $y=\mathrm{e}^{-x^2}$ 则为初等函数.

2.5 考研数学常用的四类不等式

◎ 三角形不等式：$||a|-|b||\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$，其中 a,b 为任意实数.

◎ 三角函数不等式：$\dfrac{2}{\pi}x\leqslant\sin x\leqslant x\leqslant\tan x$，其中 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

◎ 取整函数不等式：$x-1<[x]\leqslant x$，其中 x 为任意实数.

◎ 平均值不等式：$\dfrac{a^2+b^2}{2}\geqslant ab\geqslant\dfrac{2}{\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)}$，$a,b$ 均为任意实数.

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\geqslant\frac{2}{\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)},a,b\text{ 均为正数.}$$

第二节　数列的极限

一、数列极限的定义

设$\{x_n\}$为一数列，如果存在常数a，对于$\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 正整数N，使得$n>N$时，$|x_n-a|<\varepsilon$都成立，则称a为数列$\{x_n\}$的极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$或$x_n\to a(n\to\infty)$.

◎◎◎ 数列极限定义隐含的信息如下 ◎◎◎

1. 数列是序列，是点集的子集，即能用通式表达出来的点集，一般的点集是不能用通式表达出来的. 如点集$A=\left\{1,2,\frac{1}{2},3,\frac{1}{3},4,\frac{1}{4},\cdots\right\}$，但我们可以选择其中的子集$A_1=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n}\right\}$，显然$A_1$是一个数列，它存在极限0，这个极限0称为点集$A$的聚点.

2. $|x_n-a|<\varepsilon\Rightarrow a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$，相当于只有位于$x=a\pm\varepsilon$之间的$x_n$取值有作用，之外的取值与数列的极限没有关系，故数列极限可以等价描述为下列两种形式：

对于$\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 正整数N，使得$n>N$时，有无限个点落在区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$内；或等价描述为

对于$\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 正整数N，使得$n>N$时，有有限个点落在区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$外.

3. 显然，ε的大小对极限无影响，所以一般只讨论$0<\varepsilon<1$的情形，且ε取值是任意的，而N取值受ε限制，这种因果关系不可颠倒.

4. 极限的趋向变量$n\to\infty$是逼近，不是等于，是近似值，而极限的结果是等于，是精确值.

5. 利用极限定义可以证明若$\{x_n\}$收敛，则$\{|x_n|\}$也收敛，但$\{|x_n|\}$收敛，则$\{x_n\}$可能收敛，也可能发散.

【证】因$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，对于任意的$\varepsilon>0$，存在$N$，当$n>N$时，有$|x_n-a|<\varepsilon$，从而$||x_n|-|a||\leqslant|x_n-a|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

但$\{|x_n|\}$收敛，则$\{x_n\}$可能收敛，也可能发散，例如$\{|(-1)^n|\}$是收敛的，但$\{(-1)^n\}$发散.

【例 10】设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，且$a\neq0$，则当$n$充分大时有　　(　　)

(A) $|a_n|>\frac{|a|}{2}$　　(B) $|a_n|<\frac{|a|}{2}$

(C) $a_n>a-\frac{1}{n}$　　(D) $a_n>a+\frac{1}{n}$

【分析】本题主要考查数列极限的有关概念，是一道基本概念题，其中选项(A)

和(B)考查数列极限的定义,而选项(C)和(D)则既与极限定义有关,又涉及一些无穷小量的阶的概念.

【解】选(A).

由题设知$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$,根据数列极限的定义,对于任意给定的$\varepsilon>0$,当$n\to\infty$时,可以使得不等式$||a_n|-|a||<\varepsilon$成立.

于是,如果取$\varepsilon=\frac{|a|}{2}$,则当$n\to\infty$时,就有$||a_n|-|a||<\frac{|a|}{2}$,由不等式的性质知

$$|a|-\frac{|a|}{2}<|a_n|<|a|+\frac{|a|}{2},即\frac{|a|}{2}<|a_n|<\frac{3|a|}{2},$$

从而有$|a_n|>\frac{|a|}{2}$.

由上述推导过程可知(B)是不正确的.

再看选项(C)和(D),它们可以统一表示成不等式$|a_n-a|<\frac{1}{n}$,而由数列极限的概念可知,不等式$|a_n-a|<\frac{1}{n}$是$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$的充分条件,而不是必要条件.例如,若取$a_n=\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a=1$,但是当$n$充分大时$a_n-a=\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{1}{n}$是不能成立的,故选项(D)不正确;又例如,若取$a_n=\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a=1$,但是当$n$充分大时$a_n-a=-\frac{1}{\sqrt{n}}>-\frac{1}{n}$是不能成立的,故选项(C)也不正确.

综上可知,应选择(A).

【例11】设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$均为非负数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有 (　　).

(A)$a_n<b_n$对任意n成立　　(B)$b_n<c_n$对任意n成立

(C)$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$不存在　　(D)$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在

【解】选(D).

由数列极限的定义,数列$\{a_n\}$的极限与a_n在某个N(足够大)之后的性质有关,前面的有限多项则无关紧要.因此选项(A),(B)中"任意n"的条件显然不成立."$0\cdot\infty$"型的极限是未定式,选项(C)不成立,故选(D).

事实上,当$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b\neq0$,$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$时,由无穷大量的定义得到$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n=\infty$.

如举反例:取$a_n=\frac{2}{n}$,$b_n=1$,$c_n=\frac{n}{2}$,则可以直接排除选项(A),(B),(C).