概率真度

于西昌　著

山东人民出版社
国家一级出版社　全国百佳图书出版单位

概率真度

于西昌 著

山东人民出版社
国家一级出版社 全国百佳图书出版单位

图书在版编目（CIP）数据

概率真度/于西昌著. -- 济南：山东人民出版社，2016.9

ISBN 978-7-209-10081-6

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①于… Ⅲ. ①数理逻辑－研究 Ⅳ. ①O14

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第239867号

概率真度

于西昌 著

主管部门 山东出版传媒股份有限公司
出版发行 山东人民出版社
社　　址 济南市胜利大街39号
邮　　编 250001
电　　话 总编室（0531）82098914
　　　　 市场部（0531）82098027
网　　址 http://www.sd-book.com.cn
印　　装 山东华立印务有限公司
经　　销 新华书店

规　　格 16开（169mm×239mm）
印　　张 9
字　　数 120千字
版　　次 2016年9月第1版
印　　次 2016年9月第1次
印　　数 1-1000
ISBN 978-7-209-10081-6
定　　价 25.00元

前　言

数理逻辑的特点在于符号化和形式化.数理逻辑和计算数学有着截然不同的风格:前者注重推理,后者注重数值计算;前者强调严格论证,而后者允许近似求解.如果说数理逻辑具有刻板的一丝不苟形象,那么计算数学则有灵活的张弛有度的特征.一个自然的问题是:能不能把数值计算的思想融入数理逻辑以便其具有某种灵活而扩大其可能的应用范围呢?可以说,对此问题的研究一直在继续、深入地探讨.在 20 世纪 50 年代,文献[1]就用“指派真值”来反映逻辑概念的程度化思想,这种程度化的思想在 Pavelka 的系列文献[2～4]中得到了全面的发展,几乎所有概念都已数值化了.近年来,王国俊教授先后提出了模糊值、二值、n 值命题逻辑公式真度的理论[5～7],特别是对连续值命题逻辑利用积分工具引入公式的真度,为连续值命题逻辑系统中近似推理提供了一种可供利用的构架.文献[8～26]从不同的角度对模糊值、二值、n 值命题逻辑公式真度进行了深入的研究,并且得到很多优秀的成果,为后续研究奠定了良好的理论基础.

作者在认真分析、学习前人优秀成果的基础上,注重逻辑概念的程度化思想的研究,并将计算数学的思想融入数理逻辑,推动了逻辑形式推理的程度化方法的成熟与完善.为进一步研究真度理论,引进了概率的基本概念,产生了重要的概念——概率真度.概率真度的适用范围很广,不仅适合多值逻辑系统,也适合连续值逻辑系统.

本书在多种逻辑系统中研究了推理规则、相似度、伪距离、近似推理、数值分布、期望、方差、熵等,并列举了一些应用领域,为后继者提供了理论支撑.本书的研究内容主要来源于作者的论文[27～50],也为新学者提供了一个研究方向.

目　录

第一章　预备知识

1　命题逻辑系统中命题、变量及公式

命题是可辨真假的陈述语句，是命题逻辑系统最基本的要素之一. 既然要辨别真假，那么任给出一个命题，都要求作出一次判断. 所以，在形式逻辑中，命题有时也称为判断. 命题有真有假，真命题用 t(true) 来表示，假命题用 f(false) 来表示，t 和 f 共称为命题的真值.

以下各陈述句都是命题.

(ⅰ) 今天天气很热.

(ⅱ) 并非今天是元宵节.

(ⅲ) 2 是偶数并且是最小的素数.

(ⅳ) 如果明天是植树节，那么我们就去植树.

为方便研究命题的真假性，我们根据命题的复合程度将命题分为简单命题和复合命题.

所谓简单命题，就是不包含其他命题作为组成部分的命题，是命题逻辑系统的最小单位，又称命题变元或原子命题，一般用小写英语字母 $p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$ 来表示. 如上述命题(ⅰ) 就是简单命题.

复合命题是包含其他命题作为组成部分，由其他命题组成的命题. 复合命题是我们研究最多的命题. 如上述命题(ⅱ)(ⅲ)(ⅳ) 都是复合命题，因为它们都是由简单命题通过连接词“并非”“并且”“或者”“如果……，那么……”等复合而成的.

逻辑连接词是将简单命题连接起来构成复合命题的词项，是命题逻辑系统最基本的要素之一，通过它将原子命题复合起来去表达各种复杂的复合命题. 常用的连接词有“非”“并且”“或者”“蕴涵”“括号”等，分别用符号$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，(　)来表示. 如上述命题(ⅱ)可用$\neg p$来表示，(ⅲ)可用“$p \wedge q$”来表示.

在这里需要注意的是逻辑连接词也有运算.

定义 1.1　设$S=\{p_1,p_2,\cdots,p_n,\cdots\}$是一个可数集，$\neg$，$\vee$和$\rightarrow$分别是$S$上的一元、二元和二元运算. $F(S)$是由S生成的($\neg$，$\vee$，$\rightarrow$)型自由代数. 我们称$F(S)$中的元素为命题或公式，S中的元素$p_1,p_2,\cdots,p_n,\cdots$为原子命题或原子公式.

由定义1.1知，(ⅰ)若$p_i \in S$，则$p_i \in F(S)$；(ⅱ)若$X,Y \in F(S)$，则$\neg X$，$X \rightarrow Y$，$X \vee Y \in F(S)$；(ⅲ)$F(S)$中的元素都能由S中的元素通过(ⅰ)(ⅱ)的方式产生.

一般用大写字母$X,Y,Z,\cdots$或$X_1,X_2,X_3,\cdots$表示命题变量公式. 若命题变量公式包含命题变量$p_1,p_2,\cdots,p_n,\cdots$则它可以记作$X(p_1,p_2,\cdots,p_n,\cdots)$.

例 1　p_1，$\neg p_2$，$p_1 \rightarrow p_2$，$p_1 \vee p_2$，$\neg p_1 \vee p_2$，$\neg(p_1 \rightarrow p_2)$都是命题变量公式；$X(\neg p_1)$，$X(p_1 \rightarrow p_2)$，$X(p_1 \vee p_2)$，$X(\neg p_1 \vee p_2)$，$X(\neg(p_1 \rightarrow p_2))$也都是命题变量公式.

2　语义理论

定义 2.1　设映射$v:F(S) \rightarrow \{0,1\}$，若$v$是($\neg$，$\rightarrow$)型的同态，满足条件：

(ⅰ)对于任一公式$A \in F(S)$，$v(\neg A)=1-v(A)$；

(ⅱ)对于任二公式$A,B \in F(S)$，$v(A \rightarrow B)=0$当且仅当$v(A)=1$且$v(B)=0$.

则称v为$F(S)$的赋值，$v(A)$也叫公式的赋值，$F(S)$的全体赋值之集记作Ω.

既然$F(S)$是由S产生的($\neg$，$\rightarrow$)型自由代数，对任意一种映射都可扩张为一个赋值.

例 2　$\{0,1\}$ 是$(\neg,\rightarrow)$型自由代数.

在$\{0,1\}$中我们规定：$\neg 0=1,\neg 1=0,0\rightarrow 0=0\rightarrow 1=1\rightarrow 1=1,1\rightarrow 0=0$.

定义 2.2　设 $v:F(S)\rightarrow\{0,1\}$ 是一个映射，若 v 是$(\neg,\rightarrow)$型的同态，满足条件：

$$v(\neg A)=\neg v(A),v(A\rightarrow B)=v(A)\rightarrow v(B),$$

则称 v 为 $F(S)$ 的赋值，$v(A)$ 也叫公式的赋值，$F(S)$ 的全体赋值之集记作 Ω.

例 3　$v(p_1)=1,v(p_2)=0,v(p_3)=1$，则

$$\begin{aligned} v[(p_1\rightarrow\neg p_2)\rightarrow p_3] &= [v(p_1)\rightarrow v(\neg p_2)]\rightarrow v(p_3) \\ &= (1\rightarrow\neg 0)\rightarrow 1=(1\rightarrow 1)\rightarrow 1=1. \end{aligned}$$

显然，对于任意包含命题变量 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 的公式 X，$v(X(p_1,p_2,\cdots,p_n,\cdots))$ 是一个 n 元函数 $f_X:\{0,1\}^n\rightarrow\{0,1\}$，称为 X 的Boole函数，或真值函数.

定义 2.3　对任意一种赋值 $v\in\Omega$，若有 $v(X(p_1,p_2\cdots,p_n,\cdots))=1$，即

$$f_X(p_1,p_2,\cdots,p_n)=1,(p_1,p_2,\cdots,p_n)\in\{0,1\}^n,$$

则称 X 为重言式，记作 $|=X$. 对任意一种 $v\in\Omega$，若有 $v(X(p_1,p_2,\cdots,p_n,\cdots))=0$，则称 X 为矛盾式.

例 4　通过对 p_1 及 p_2 进行各种可能的赋值，容易验证 $p_1\rightarrow p_1,p_1\rightarrow(p_2\rightarrow p_1)$ 等都是重言式，$\neg p_1\wedge p_1$ 是矛盾式.

定义 2.4　设 $A,B\in F(S)$，若对任意 $v\in\Omega$ 均有 $v(A)=v(B)$，则称 A 与 B 逻辑等价，记作 $A\approx B$.

命题 2.5　设 $A,B\in F(S)$，则下列各式是等价的：

(ⅰ) $A\approx B$.

(ⅱ) $|=A\rightarrow B$ 且 $|=B\rightarrow A$.

(ⅲ) $|=A\leftrightarrow B$. $[A\leftrightarrow B=(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)]$.

(ⅳ) $A\rightarrow B\approx B\rightarrow A$.

定义 2.6　设 $A=A(p_1,\cdots,p_n)\in F(S)$ 是含有 n 个命题变元的复合公式，它由原子公式 $p_1,\cdots,p_n$ 通过 $\neg,\vee,\rightarrow$ 连接而成，则 A 对应一个 n 元函数

$\overline{A}:[0,1]^n \to [0,1]$. 这里的 $\overline{A}(x_1,\cdots,x_n)$ 通过算子 $\neg$, $\vee$, $\to$ 连接而得的公式，其方式恰如 A 由 $p_1,\cdots,p_n$ 通过 $\neg$, $\vee$, $\to$ 连接而得的公式，称 $\overline{A}(x_1,\cdots,x_n)$ 为由公式 A 导出的 Boole 函数，又称公式 A 诱导的公式函数(或称 $\overline{A}$ 为 A 的真值函数).

例 5 若 $A = p_1 \to p_2$，则真值函数 $\overline{A}(x_1,x_2) = x_1 \to x_2$；

若 $A = (\neg p_1 \to p_2) \to p_3$，则真值函数 $\overline{A}(x_1,x_2,x_3) = (\neg x_1 \to x_2) \to x_3$；

若 $A = (p_1 \vee p_2) \to \neg p_3$，则真值函数 $\overline{A}(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \vee x_2) \to \neg x_3$.

3 语构理论

判断一个公式是否是重言式的基本方法有两个，一个是验证法，另一个是推导法. 所谓推导法，就是首先明确 $F(S)$ 中一些最基本的重言式，再定义推理规则与证明方法，然后将 $F(S)$ 中的所有重言式推导出来. 为此我们将引进形式系统、公理、推理规则与证明等基本概念.

定义 3.1 命题演算的形式系统 L 是一个特殊的形式逻辑系统，它由字符表、公式集、公理集、推理规则等四部分组成，其中：

(ⅰ) 字符表为：$\neg$, $\to$, (,) , $p_1,p_2,p_3,\cdots,X,Y,\cdots,S,F$.

(ⅱ) 公式集 $F(S)$ 是由 $S=\{p_1,p_2,p_3,\cdots\}$ 生成的($\neg$, $\to$) 型自由代数.

(ⅲ) L 的公理集包含以下三种形式的公式：

$(L_1) A \to (B \to A)$,

$(L_2) [A \to (B \to C)] \to [(A \to B) \to (A \to C)]$,

$(L_3) (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$.

(ⅳ) 分离规则(又称 Modus Ponens，简称 MP)：由公式 $A \to B$ 及 B 可以推得 B.

定义 3.2 一个证明是一个公式序列：

$$X_1, X_2, \cdots, X_n,$$

这里对每个 $i \leqslant n$，X_i 是公理，或者有 $j < i$，$k < i$，使 X_i 是由 X_j 与 X_k 运用 MP

而得到的公式，这时 X_n 叫定理，上述证明叫 X_n 的证明，记作 $\vdash X_n$.

定义 3.3　设 $\Gamma \subset F(S)$，$X \in F(S)$. 从 Γ 到 X 的证明是一个公式序列：

$$X_1, X_2, \cdots, X_n,$$

这里 $X_n = X$，且对每个 $i \leqslant n$，X_i 是公理或 $X_i \in \Gamma$，或者有 $j < i$，$k < i$，使 X_i 是由 X_j 与 X_k 运用 MP 而得到的公式，存在从 Γ 到 X 的证明，记作 $\Gamma \vdash X$.

定理 3.4(演绎定理)[14]　设 $\Gamma \subset F(S)$，$X, Y \in F(S)$. 如果 $\Gamma \cup \{X\} \vdash Y$，则 $\Gamma \vdash X \to Y$.

定理 3.5(三段论规则，简称 HS)[14]　$\{X \to Y, Y \to Z\} \vdash X \to Z$.

定义 3.6　设 $X, Y \in F(S)$. 如果 $\vdash X \to Y$ 且 $\vdash Y \to X$，则称 X 与 Y 可证等价.

4　[0,1] 上常用的几个蕴涵算子

在[0,1]中，当 $\alpha, \beta \in [0,1]$ 时我们一般规定以下一元、二元运算：$\alpha \vee \beta \in \max\{\alpha, \beta\}$，$\alpha \wedge \beta \in \min\{\alpha, \beta\}$，$\neg \alpha = 1 - \alpha$，二元函数 $\alpha \to \beta$ 的表示内容比较丰富，其含义为 $\to : [0,1]^2 \to [0,1]$.

为方便起见，我们用统一的符号 R 来记此函数，并称 R 为蕴涵算子. 为加一区别，往往在 R 的右下方加注系统字母，用来表示本系统的蕴涵算子.

定义 4.1[14]　设 $\otimes$ 是[0,1]上的三角模，$\to : [0,1]^2 \to [0,1]$ 是[0,1]上的二元函数. 若 $a \otimes b \leqslant c$ 当且仅当 $a \leqslant b \to c$，$a, b, c \in [0,1]$，则称 $\to$ 是与 $\otimes$ 相伴随的蕴涵算子，称($\oplus$, $\to$) 为伴随对. 特别的，若 $\otimes$ 是左连续三角模，则称 $\to$ 为正则蕴涵算子.

(ⅰ) Lukasiewicz 伴随对：

$$x \otimes_{LU} y = (x + y - 1) \vee 0,$$

$$R_{LU} = x \to y = \begin{cases} 1, x \leqslant y, \\ 1 - x + y, x > y, \end{cases} \quad x, y \in [0,1].$$

(ⅱ) Gödel 伴随对:

$$x\otimes_G y=x\wedge y,$$

$$R_G=x\to y=\begin{cases}1,x\leqslant y,\\ y,x>y,\end{cases}\quad x,y\in[0,1].$$

(ⅲ) Goguen(Π) 伴随对:

$$x\otimes y=x\times y,$$

$$R_\Pi=x\to y=\begin{cases}1,x\leqslant y,\\ \dfrac{y}{x},x>y,\end{cases}\quad x,y\in[0,1].$$

(ⅳ) R_0(L*) 伴随对:

$$x\otimes y=\begin{cases}x\wedge y,x+y>1,\\ 0,x+y\leqslant 1,\end{cases}$$

$$R_0=x\to y=\begin{cases}1,x\leqslant y,\\ (1-x)\vee y,\end{cases}\quad x,y\in[0,1].$$

5 连续值命题演算

定义 5.1[8] 设 $F(S)$ 的赋值格 $M=[0,1]$,在 M 中规定 $\neg x=1-x$,$x\vee y=\max(x,y)$,$x\to y=R(x,y)$,则 M 成为($\neg$, $\vee$, $\to$)型代数 Fuzzy 命题逻辑系统.其中 $R:[0,1]^n\to[0,1]$ 是某蕴涵算子,如 $R=R_0$ 或 R 为 Lukasiewicz 算子 R_{LU}.

设 $\int_{\Delta_n} f\mathrm{d}\omega_n=\int_0^1\cdot\cdots\cdot\int_0^1 f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdot\cdots\cdot\mathrm{d}x_n$,$f(x_1,x_2,\cdots,x_n):[0,1]^n\to[0,1]$,以 Δ_n 记 n 维方体$[0,1]^n$,以 $\mathrm{d}\omega_n$ 表示 $\mathrm{d}x_1\cdot\cdots\cdot\mathrm{d}x_n$,则$\int_{\Delta_n} f\mathrm{d}\omega_n=\int_0^1\cdot\cdots\cdot\int_0^1 f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdot\cdots\cdot\mathrm{d}x_n$.

定义 5.2[5] 设 $f:[0,1]^n\to[0,1]$,则 f 的 k 次扩张定义为

$f^{(k)}(x_1,\cdots,x_{n+k})=f(x_1,\cdots,x_n)$,$\forall(x_1,\cdots,x_{n+k})\in[0,1]^{n+k}$,这里 $k=0,1,$

$2, \cdots$ 当 $k=0$ 时 $f^{(0)}=f$.

定理 5.3(积分不变性定理)[5]　任一 n 元函数 $f:[0,1]^n \to [0,1]$ 和它的 k 次扩张 $f^{(k)}$ 在各自定义域上的积分相等,即

$$\int_{[0,1]^n} f \, \mathrm{d}\omega_n = \int_{[0,1]^{n+k}} f^{(k)} \, \mathrm{d}\omega_{n+k}.$$

第二章　Lukasiewicz 系统中公式的概率真度

概率真度在命题逻辑系统研究工作中，表现出一种“内蕴型”随机性，为计量逻辑学、概率逻辑学的研究提供了一种可供借鉴的工具，又提供了一种程度化的推理方法。本章基于连续值 Lukasiewicz 命题逻辑系统建立了公式概率真度的基本理论框架，基本组织结构：通过引进一般性的赋值密度函数、边缘密度函数等基本概念，定义了公式概率真度的基本概念；提出了概率真度的推理规则并给予证明，为今后研究提供了证明思路；研究了概率真度值在[0,1]中的分布，为今后研究提供了数据规划；引入相似度，定义伪距离，给出了二者之间的关系，为概率赋值情形下逻辑系统中的近似推理做了一定的奠基工作；给出了三种相似度的定义并讨论了其性质及关系，定义了三种伪距离并确定了三者之间的比例关系，为推理程度的数值化提供了依据；建立了近似推理的基本思路，为形式化逻辑推理提供了工具。

1　公式的概率真度

定义 1.1　（ⅰ）设 $f_1(x):[0,1]\to R^+\cup\{0\}$，且 $\int_0^1 f_1(x)\mathrm{d}x=1$，称 $f_1(x)$ 为一元赋值密度函数.

（ⅱ）设 $f_n(x_1,\cdots,x_n)=f_1(x_1)g_1(x_2)\cdot\cdots\cdot h_1(x_n)$，且 $\int_{\Delta_n} f_n\mathrm{d}\omega_n=1$，称 $f_n(x_1,\cdots,x_n)$ 为 n 元独立性赋值密度函数.

(ⅲ) 若存在一个 $f_n(x_1,\cdots,x_n)$，且$\int_{\Delta_n} f_n \mathrm{d}\omega_n = 1$，称 $f_n(x_1,\cdots,x_n)$ 为 n 元一般性赋值密度函数.

(ⅳ) 若存在一个 $f_n(x_1,\cdots,x_n)$，且$\int_{\Delta_n} f_n \mathrm{d}\omega_n = 1$，称 $f_1(x_1)=\int_0^1 \mathrm{d}x_2\int_0^1 \mathrm{d}x_3 \cdot \cdots \cdot \int_0^1 f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_n$ 为 n 元一般性赋值密度函数的边缘密度函数.

(ⅴ) 若存在一个 $f_n(x_1,\cdots,x_n)$，且 $\int_{\Delta_n} f_n \mathrm{d}\omega_n = 1$，称 $f_2(x_1,x_2)=\int_0^1 \mathrm{d}x_3\int_0^1 \mathrm{d}x_4 \cdot \cdots \cdot \int_0^1 f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_n$ 为 n 元一般性赋值密度函数的联合密度函数. 同样可以类推 $f_3(x_1,x_2,x_3)$ 等联合密度函数.

备注：

(1) 虽然要求赋值密度函数的积分等于 1，但积分等于 1 的赋值密度函数不是唯一的.

(2) 为适应公式(含有不同个数的原子公式)的需要及后面推理的要求，我们将一系列赋值密度函数 $f_1(x_1),f_2(x_1,x_2),f_3(x_1,x_2,x_3),\cdots,f_n(x_1,\cdots,x_n)$ 分别记作一元、二元、三元、…、n 元赋值密度函数. 在不引起混淆的情况下，把 $f(x_1),f(x_1,x_2),f(x_1,x_2,x_3),\cdots,f(x_1,\cdots,x_n)$ 分别记作一元、二元、三元、…、n 元赋值密度函数.

(3) $f_1(x),g_1(x),\cdots,h_1(x)$ 代表不同的一元赋值密度函数.

定义 1.2　设 $A\in F(S)$，$R:[0,1]^n\to[0,1]$ 是 Lukasiewicz 蕴涵算子，$\overline{A}$ 为 A 的真值函数，$f_n(x_1,\cdots,x_n)$ 为赋值密度函数，则称 $\tau_{R_L-p}(A)=\int_{\Delta}\overline{A}_R\cdot f_n(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}\omega$ 为 A 的概率真度，简记为 τ_{R_L} 或 τ.

例 1　设 p,q 为原子公式，$f(x,y)=4xy$，求 $\tau(p\vee q),\tau(p\wedge q),\tau(p\to q)$.

解　显然$\int_{\Delta_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$，$f(x)=\int_0^1 4xy\mathrm{d}y=2x$，$f(y)=\int_0^1 4xy\mathrm{d}x=2y$.

因为 $f(xy)=f(x)f(y)$，所以这里的 $f(x),f(y)$ 为独立性赋值密度函数.

$$\tau(p\wedge q)=\int_{\Delta_2}(x\wedge y)\cdot 4xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\Delta_2(x\geqslant y)} y \cdot 4xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\Delta_2(x<y)} x \cdot 4xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{8}{15},$$

$$\tau(p \vee q) = \int_{\Delta_2} (x \vee y) \cdot 4xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\Delta_2(x\geqslant y)} x \cdot 4xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\Delta_2(x<y)} y \cdot 4xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{4}{5},$$

$$\tau(p \to q) = \int_{\Delta_2} (x \to y) \cdot 4xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\Delta_2(x\geqslant y)} (1 - x + y) \cdot 4xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\Delta_2(x<y)} 4xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x (1 - x + y) \cdot 4xy\mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y 4xy\mathrm{d}x = \frac{11}{30} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{13}{15}.$$

例 2 设 p, q 为原子公式，$f(x,y) = x + y$，求 $\tau(p \vee q)$，$\tau(p \wedge q)$，$\tau(p \to q)$.

解 显然$\int_{\Delta_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$，$f(x) = \int_0^1 (x+y)\mathrm{d}y = \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = x + \frac{1}{2}$.

因为 $f(xy) \neq f(x)f(y)$，所以这里的 $f(x)$，$f(y)$ 为一般性赋值密度函数的边缘密度函数，$f(x,y) = x + y$ 为一般性赋值密度函数.

$$\tau(p \wedge q) = \int_{\Delta_2} (x \wedge y) \cdot (x + y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\Delta_2(x\geqslant y)} y \cdot (x + y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\Delta_2(x<y)} x \cdot (x + y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x y(x + y)\mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y x(x + y)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{5}{24} + \frac{5}{24} = \frac{5}{12},$$

$$\tau(p \vee q) = \int_{\Delta_2} (x \vee y) \cdot (x + y)\mathrm{d}x = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3}{4},$$

$$\tau(p \to q) = \int_{\Delta_2} (x \to y)(x + y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

备注:

(1) 逻辑等价的公式在相同的赋值密度函数下有概率真度,反之不然.

(2) 相同的公式在不同的赋值密度函数下的概率真度不一定相同.

(3) 对上述概率真度而言,$\tau(\neg A)=1-\tau(A)$.

2　逻辑公式概率真度的推理规则

在推理规则中,不引入公理系统,而是以真度为 1 的公式取代公理.

定理 2.1(概率真度的 MP 规则)　设 $A,B\in F(S)$,$R:[0,1]^n\to[0,1]$ 是 Lukasiewicz 蕴涵算子,$\overline{A},\overline{B}$ 为 A,B 的真值函数,$f(x)$ 为赋值密度函数. 若 $\tau(A)\geqslant\alpha$,$\tau(A\to B)\geqslant\beta$,则 $\tau(B)\geqslant\alpha+\beta-1$.

证明　由积分不变性定理,不妨设 A 与 B 含有同样的原子公式 $p_1,\cdots,p_n$,由定义 $\tau(A)=\int_\Delta\overline{A}_R\cdot f\mathrm{d}\omega$ 及前题条件 $\tau(A)=\int_\Delta\overline{A}_R\cdot f\mathrm{d}\omega\geqslant\alpha$,$\tau(A\to B)\geqslant\beta$ 知

$$\tau(B)=\int_\Delta\overline{B}\cdot f\mathrm{d}\omega=\int_\Delta[\overline{A}+(1-\overline{A}+\overline{B})-1]\cdot f\mathrm{d}\omega$$

$$\geqslant\int_\Delta[\overline{A}+(1-\overline{A}+\overline{B})\wedge 1-1]\cdot f\mathrm{d}\omega$$

$$=\int_\Delta\overline{A}\cdot f\mathrm{d}\omega+\int_\Delta[(1-\overline{A}+\overline{B})\wedge 1]\cdot f\mathrm{d}\omega+\int_\Delta 1\cdot f\mathrm{d}\omega$$

$$\geqslant\alpha+\beta-1.$$

定理 2.2(概率真度的 HS 规则)　设 $A,B\in F(S)$,$R:[0,1]^n\to[0,1]$ 是 Lukasiewicz 蕴涵算子,$\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 为 A,B,C 的真值函数,$f(x)$ 为赋值密度函数. 若 $\tau(A\to B)\geqslant\alpha$,$\tau(B\to C)\geqslant\beta$,则 $\tau(A\to C)\geqslant\alpha+\beta-1$.

证明　设 $\Delta^*=\{\omega\in\Delta\mid(1-\overline{A}+\overline{C})\cdot f(\omega)>1\}$,则

$$\tau(A\to C)=\int_\Delta\overline{A\to C}\cdot f\mathrm{d}\omega=\int_{\Delta^*}f\mathrm{d}\omega+\int_{\Delta-\Delta^*}(1-\overline{A}+\overline{C})\cdot f\mathrm{d}\omega$$

$$=\int_{\Delta^*}f\mathrm{d}\omega+\int_{\Delta-\Delta^*}[(1-\overline{A}+\overline{B})+(1-\overline{B}+\overline{C})-1]\cdot f\mathrm{d}\omega$$

$$= \int_{\Delta^*} f\mathrm{d}\omega + \int_{\Delta-\Delta^*} (1 - \overline{A} + \overline{B}) \cdot f\mathrm{d}\omega + \int_{\Delta-\Delta^*} (1 - \overline{B} + \overline{C}) \cdot f\mathrm{d}\omega - \int_{\Delta-\Delta^*} f\mathrm{d}\omega$$

$$= (\int_{\Delta^*} f\mathrm{d}\omega + \int_{\Delta-\Delta^*} (1-\overline{A}+\overline{B}) \cdot f\mathrm{d}\omega) + (\int_{\Delta^*} f\mathrm{d}\omega + \int_{\Delta-\Delta^*} (1-\overline{B}+\overline{C}) \cdot f\mathrm{d}\omega - \int_{\Delta} f\mathrm{d}\omega)$$

$$= \int_{\Delta} [(1-\overline{A}+\overline{B}) \wedge 1] \cdot f\mathrm{d}\omega + \int_{\Delta} [(1-\overline{B}+\overline{C}) \wedge 1] \cdot F\mathrm{d}\omega - \int_{\Delta} 1 \cdot f\mathrm{d}\omega$$

$$\geqslant \alpha + \beta - 1.$$

定理 2.3(概率真度交推理规则) 设 $A,B,C \in F(S)$, $R:[0,1]^n \to [0,1]$ 是 Lukasiewicz 蕴涵算子,$\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 为 A,B,C 的真值函数,$f(x)$ 为赋值密度函数. 若 $\tau(A \to B) \geqslant \alpha$, $\tau(A \to C) \geqslant \beta$, 则 $\tau(A \to B \wedge C) \geqslant \alpha + \beta - 1$.

证明方法类似于定理 2.2.

定理 2.4 设 $A,B,C \in F(S)$, $R:[0,1]^n \to [0,1]$ 是 Lukasiewicz 蕴涵算子,$\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 为 A,B,C 的真值函数,$f(x)$ 为赋值密度函数,则:

(ⅰ) $\tau(A \to B) \leqslant \tau(A) \to \tau(B)$;

(ⅱ) $\tau(A \to B) \otimes \tau(B \to C) \leqslant \tau(A \to C)$.

证明 (ⅰ) 因为 $(1-\overline{A}+\overline{B}) \wedge 1 \leqslant 1-\overline{A}+\overline{B}$,

所以 $\overline{B} \geqslant \overline{A} + (1-\overline{A}+\overline{B}) \wedge 1 - 1$,

从而有 $\tau(B) = \int_{\Delta} \overline{B} \cdot f\mathrm{d}\omega \geqslant \int_{\Delta} [\overline{A} + (1-\overline{A}+\overline{B}) \wedge 1 - 1] \cdot f\mathrm{d}\omega$

$$= \tau(A) + \tau(A \to B) - 1,$$

即 $\tau(A \to B) \leqslant 1 - \tau(A) + \tau(B)$, $\tau(A \to B) \leqslant 1$,

所以 $\tau(A \to B) \leqslant [1 - \tau(A) + \tau(B)] \wedge 1$.

(ⅱ) 因为 $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$, 由(ⅰ)知 $\tau(A \to B) \leqslant \tau(B \to C) \to (A \to C) \leqslant \tau(B \to C) \to \tau(A \to C)$, 故 $\tau(A \to B) \otimes \tau(B \to C) \leqslant \tau(A \to C)$.

定理 2.5 设 $A,B \in F(S)$, $f(x)$ 为赋值密度函数,则:

(ⅰ) 若 $\vdash A \to B$, 则 $\tau(A) \leqslant \tau(B)$;