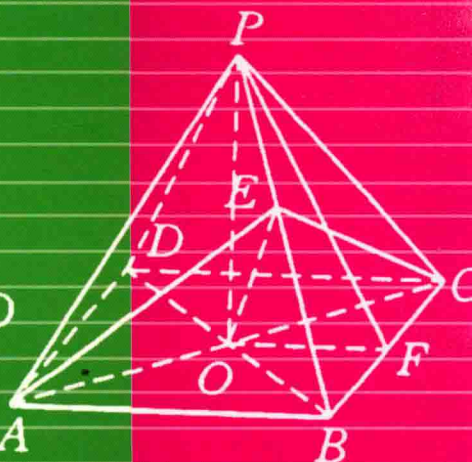
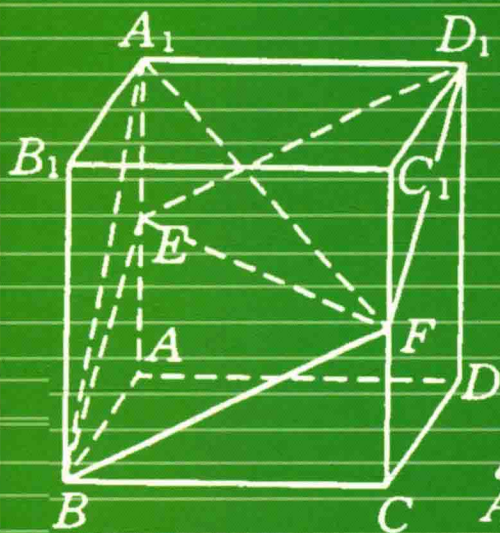


新课标 高中

数学 解题方法全书

陈振宣 杨象富 主编



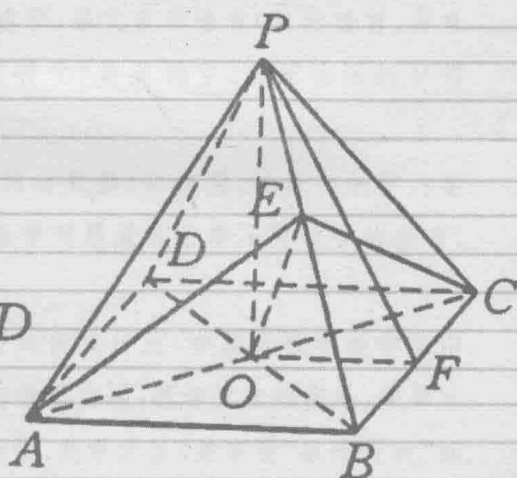
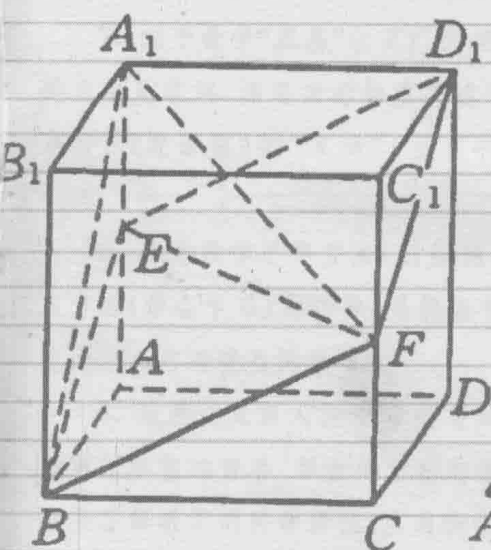
新课标 高中 90/94

数学 解题方法全书

陈振宣 杨象富 主编

G634.605

2



上海远东出版社

图书在版编目(CIP)数据

新课标高中数学解题方法全书/陈振宣,杨象富主编.
上海:上海远东出版社,2005

ISBN 7-80706-041-7

I. 新... II. ①陈...②杨... III. 数学课—高中—
解题 IV. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 027402 号

目 录

第一编 基础知识、基本方法

一、代 数

第 1 章

集合与简易逻辑 / 3

一、集合 / 3

二、简易逻辑 / 8

三、小结与复习 / 11

第 2 章

函数 / 17

一、映射与函数 / 17

二、指数与指数函数 / 25

三、对数与对数函数 / 28

四、小结与复习 / 31

第 3 章

数列 / 38

一、数列、等差数列 / 38

二、等比数列 / 40

三、小结与复习 / 43

第 4 章

三角函数 / 51

一、任意角的三角函数 / 51

二、两角和与差的三角函数 / 58

三、三角函数的图像和性质 / 70

四、小结与复习 / 81

第 5 章

平面向量 / 92

一、向量及其运算 / 92



第6章

二、解斜三角形 / 100

三、小结与复习 / 107

不等式 / 116

一、不等式及其性质、不等式的证明 / 116

二、不等式的解法 / 124

三、小结与复习 / 130

二、解析几何

第7章

直线和圆的方程 / 141

一、直线方程 / 141

二、曲线和方程、圆 / 148

三、小结与复习 / 155

第8章

圆锥曲线的方程 / 165

一、椭圆 / 165

二、双曲线 / 171

三、抛物线 / 176

四、小结与复习 / 181

第9章

直线、平面、简单几何体 / 194

一、空间直线和平面 / 194

二、简单几何体 / 211

三、小结与复习 / 215

第10章

排列、组合和概率 / 228

一、排列与组合 / 228

二、概率 / 235

三、小结与复习 / 240

第11章

概率与统计 / 253

一、随机变量 / 253

二、统计 / 262



第 12 章

三、小结与复习 / 269

极限 / 278

一、数学归纳法 / 278

二、数列的极限 / 282

三、函数的极限 / 285

四、小结与复习 / 291

第 13 章

导数与微分 / 299

一、导数与微分 / 299

二、导数的应用 / 305

三、小结与复习 / 310

第 14 章

复数 / 321

一、复数及其四则运算 / 321

* 二、复数的三角形式 / 325

三、小结与复习 / 329

第二编 数学创新与高考

一、客观题快速解法拾锦 / 339

二、对称思想 出奇制胜 / 349

三、解析几何方法论与高考题新解 / 358

四、好玩的类比试题 / 367

五、归纳思维浅说 / 374

六、分析综合法与高考压轴题 / 376

七、初等函数最值问题的解法 / 381

八、小型研究课题 / 388

九、小型应用课题 / 393

十、数学欣赏 / 398



第一编

DI YI BIAN

基础知识、基本方法

一、代 数

第1章 集合与简易逻辑

一、集 合



知识与方法提要

1. 集合的基本概念

某些指定的对象集在一起就成为一个集合,简称集.集合中的每个对象叫做这个集合的元素.如果 a 是集合 A 的元素,记作 $a \in A$.不含任何元素的集合叫做空集,记作 $\emptyset$.

集合可分为有限集与无限集.集合的表示法可用列举法、描述法以及图示法.

常见数集: $\mathbf{N}$ (自然数集)、 $\mathbf{Z}$ (整数集)、 $\mathbf{Q}$ (有理数集)、 $\mathbf{R}$ (实数集)、 $\mathbf{C}$ (复数集).

2. 集合与集合的关系

对于两个集合 A 与 B ,如果 A 的任何一个元素都是 B 的元素,就说集合 B 包含集合 A ,记作 $A \subseteq B$,此时也说 A 是 B 的子集.

对于两个集合 A 与 B ,如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$,那么 $A = B$.

补集:如果 $A \subseteq S$,那么 A 在 S 中的补集

$$\complement_S A = \{x \mid x \in S, \text{且 } x \notin A\}.$$

全集:如果一个集合含有要研究的各个集合的全部元素,这个集合就可以看作一个全集,全集通常用 U 表示.

交集: $A \cap B = \{x \mid x \in A, \text{且 } x \in B\}$.



并集: $A \cup B = \{x | x \in A, \text{或} x \in B\}$.

3. 不等式的解法

含绝对值的不等式

$|x| < a$ ($a > 0$) 的解集是 $\{x | -a < x < a\}$;

$|x| > a$ ($a > 0$) 的解集是 $\{x | x < -a, \text{或} x > a\}$.

一元二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ ($a > 0$) 的解集 (其中 x_1, x_2 是对应二次方程的根):

当 $\Delta > 0$ 时, 解集为 $\{x | x < x_1, \text{或} x > x_2\}$ ($x_1 < x_2$); 当 $\Delta = 0$ 时, 解集为 $\{x | x \in \mathbf{R}, \text{且} x \neq -\frac{b}{2a}\}$; 当 $\Delta < 0$ 时, 解集为 $\mathbf{R}$.

一元二次不等式 $ax^2 + bx + c < 0$ ($a > 0$) 的解集:

当 $\Delta > 0$ 时, 解集为 $\{x | x_1 < x < x_2\}$; 当 $\Delta \leq 0$ 时, 解集为 $\emptyset$.



范例

例 1 用列举法表示下列集合:

(1) $\{(x, y) | x + y = 5, x \in \mathbf{N}^*, y \in \mathbf{N}^*\}$;

(2) $\{(x, y) | y = x^2 - 1, |x| \leq 2, x \in \mathbf{Z}\}$.

分析 这里的元素是有序数对 (x, y) , 可理解为直角坐标平面上点的坐标. 因此, 如果 $a \neq b$, 则 (a, b) 与 (b, a) 是不同的元素.

解 (1) 因为 x, y 都是正整数, 而 $1 + 4 = 5 = 2 + 3$, 故集合 (1) 即 $\{(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)\}$;

(2) $\because |x| \leq 2, x \in \mathbf{Z}, \therefore x = 0, \pm 1, \pm 2$, 相应的 $y = -1, 0, 3$, 故集合 (2) 即 $\{(0, -1), (1, 0), (-1, 0), (2, 3), (-2, 3)\}$.

例 2 用适当的符号, 表示下列元素与集合, 或集合与集合的关系:

(1) 0 与 $\{0\}$;

(2) 0 与 $\emptyset$;

(3) $\emptyset$ 与 $\{0\}$;

(4) $\{0, 1\}$ 与 $\{(0, 1)\}$; (5) $\{(a, b)\}$ 与 $\{(b, a)\}$.

分析 首先要分清是“元素与集合”的关系, 还是“集合与集合”的关系. 若是后者, 又要辨别两集合的元素是否相同.

解 (1) $\{0\}$ 是含单元素 0 的集合, 0 与 $\{0\}$ 的关系是“属于与否”的关系, 所以 $0 \in \{0\}$;

(2) 空集 $\emptyset$ 不含任何元素, 所以 $0 \notin \emptyset$;

(3) 集合 $\emptyset$ 与 $\{0\}$ 的元素不同, 所以 $\emptyset \neq \{0\}$, $\emptyset \subseteq \{0\}$;

(4) $\{0, 1\}$ 是含两个元素 0 与 1 的集合, 而 $\{(0, 1)\}$ 是以“有序数对”为元素的单元素 $(0, 1)$ 的集合, 所以 $\{0, 1\} \neq \{(0, 1)\}$;

(5) 当 $a = b$ 时, $\{(a, b)\} = \{(b, a)\}$;

当 $a \neq b$ 时, $\{(a, b)\} \neq \{(b, a)\}$.



说明 空集是重要的特殊集合,值得重视.(5)中的 $a=b$ 是可能出现的特殊情况,不可不考虑到.

例3 设 $U = \{2, 3, a^2 + 2a - 3\}$, 且 $A = \{|a+7|, 2\}$, $\complement_U A = \{5\}$, 求 a 的值.

解 根据补集的意义,应有

$$\begin{cases} |a+7| = 3, \\ a^2 + 2a - 3 = 5. \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a = -4 \text{ 或 } -10, \\ a = -4 \text{ 或 } 2. \end{cases}$$

$$\therefore a = -4.$$

例4 已知元素 $(1, 2) \in (A \cap B)$, $A = \{(x, y) \mid y^2 = ax + b\}$, $B = \{(x, y) \mid x^2 - ay - b = 0\}$, 求 a, b 之值.

分析 按题意, $x=1, y=2$ 满足 $y^2 = ax + b, x^2 - ay - b = 0$.

$$\text{解} \quad \begin{cases} 4 = a + b, \\ 1 - 2a - b = 0, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} a + b = 4, \\ 2a + b = 1. \end{cases}$$

$$\therefore a = -3, b = 7.$$

例5 (选择题)集合 $P = \{s \mid s = x^2 + 3x + 1\}$, $T = \{t \mid t = y^2 - 3y + 1\}$ 之间的关系是().

$$\text{A. } P \cap T = \emptyset \qquad \text{B. } P \cup T = \left\{-\frac{5}{4}\right\}$$

$$\text{C. } P \cap T = \{0\} \qquad \text{D. } P = T$$

分析 集合 P, T 的元素分别为 s, t , 而不是 x, y .

$$\text{解} \quad \because s = x^2 + 3x + 1 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \geqslant -\frac{5}{4},$$

$$\therefore P = \left\{s \mid s \geqslant -\frac{5}{4}\right\}.$$

$$\because t = y^2 - 3y + 1 = \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \geqslant -\frac{5}{4},$$

$$\therefore T = \left\{t \mid t \geqslant -\frac{5}{4}\right\}.$$

$\therefore P = T$, 选 D.

例6 设集合 A, B 都是全集 $U = \{1, 2, 3, 4\}$ 的子集, 已知 $(\complement_U A) \cap B = \{1\}$, $A \cap B = \{3\}$, $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \{2\}$, 求 $\complement_U (A \cup B)$.

分析 本题涉及集合 A, B 及其补集、交集和并集, 关系比较复杂, 可借助图形来表示和考虑.

解 如图 1-1, 用方框表示全集 U , 用两条封闭曲线分别表示集合 A 与 B .

由 $(\complement_U A) \cap B = \{1\}$, 就在 A 之外 B 之内填上 1; 由 $A \cap B = \{3\}$, 就在 A, B 的公共部分填上 3; 又由 $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \{2\}$, 就在 A 与 B 之外, 方框之



内填上 2.

已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, 因此应在 A 之内 B 之外填写 4. 由此, 从图上可知 $A \cup B = \{1, 3, 4\}$, 从而 $\complement_U(A \cup B) = \{2\}$.

说明 1. 用来说明各个集合之间关系的图叫做韦恩图.

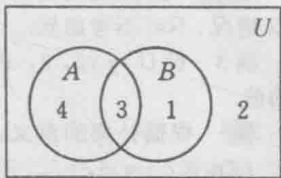


图 1-1

“画出韦恩图”是解本题的关键和诀窍.

“一图抵百语”, 韦恩图常常可以帮助我们直观地理解某些关系, 也有利于记忆和思考问题, 值得重视.

2. 从本题我们发现:

$$\complement_U(A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B).$$

例 7 设关于 x 的方程 $x^2 + px - 12 = 0$, $x^2 + qx + r = 0$ 的解集分别为 A, B , 且 $A \neq B$, $A \cup B = \{-3, 4\}$, $A \cap B = \{-3\}$, 求 p, q, r 的值.

解 由 $A \cap B = \{-3\}$, 可知方程 $x^2 + px - 12 = 0$ 有根 -3 , 故有 $(-3)^2 - 3p - 12 = 0$, 即 $3p = -3$, $\therefore p = -1$, 此时

$$A = \{x \mid x^2 - x - 12 = 0\}, \text{ 即 } A = \{-3, 4\}.$$

又由 $A \neq B$, $A \cup B = \{-3, 4\}$, $A \cap B = \{-3\}$, 可知方程 $x^2 + qx + r = 0$ 只能有重根 -3 , 即这个方程为 $(x+3)^2 = 0$, 亦即 $x^2 + 6x + 9 = 0$, 故 $q = 6, r = 9$.

$$\therefore p = -1, q = 6, r = 9.$$

例 8 设 $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - ax + 2 = 0\}$, 若 $A \cup B = A$, 求由 a 的值组成的集合.

解 由 $A \cup B = A$, 可知 $B \subseteq A$,

而 $A = \{1, 2\}$, 故 B 可为 $\{1, 2\}, \{1\}, \{2\}$, 或 $\emptyset$.

当 $B = \{1, 2\} = A$ 时, 显然有 $a = 3$.

当 $B = \{1\}, \{2\}$, 或 $\emptyset$ 时, 方程 $x^2 - ax + 2 = 0$ 有等根或无实根, 故 $\Delta \leq 0$, 即 $a^2 - 8 \leq 0$.

$$\text{解得 } -2\sqrt{2} \leq a \leq 2\sqrt{2}.$$

但 $a = \pm 2\sqrt{2}$ 时, 得出 $B = \{-\sqrt{2}\}$ 或 $\{\sqrt{2}\}$, 不能满足 $B \subseteq A$. 故所求 a 值的集合为 $\{3\} \cup \{a \mid -2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}\}$.

说明 解答本题的常见错误是:

(1) 未能通过检验剔除 $a = \pm 2\sqrt{2}$; (2) 遗漏 $B = \emptyset$ 的情况.

空集有许多特殊的性质, 在解题时宜特别留心, 如:

$$\emptyset \cup A = A, \emptyset \cap A = \emptyset, \emptyset \subseteq A, \emptyset \subseteq (A \cap B),$$

$$\emptyset = A \cap (\complement_U A), \emptyset = \complement_U U, \complement_U \emptyset = U.$$

在进行集合的运算时, 空集是必不可少的, 其作用可以与数值计算中数 0



的作用类比,值得重视.

例 9 解下列不等式:

$$(1) \frac{|x|}{2} > 1; \quad (2) \frac{1}{|x|} > 2; \quad (3) |2x| - 3 < |x|.$$

解 (1) 两边同乘以 2, 得 $|x| > 2$,

故 $x < -2$, 或 $x > 2$, 即解集为 $\{x | x < -2, \text{ 或 } x > 2\}$.

(2) 两边同乘以 $|x|$ ($|x| > 0$), 得 $1 > 2|x|$.

即有 $|x| < \frac{1}{2}$, 故 $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$. 解集为 $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right\}$.

(3) $\because |2x| = 2|x|$, 原不等式即 $2|x| - 3 < |x|$.

整理得 $|x| < 3$, 故 $-3 < x < 3$. 解集为 $\{x | -3 < x < 3\}$.

例 10 解下列不等式:

$$(1) |2 - 3x| \leq 2; \quad (2) |3x - 2| > 2.$$

解 (1) 由原不等式可得 $-2 \leq 2 - 3x \leq 2$.

各加上 -2 , 得 $-4 \leq -3x \leq 0$,

各除以 -3 , 得 $\frac{4}{3} \geq x \geq 0$.

故解集为 $\left\{x \mid 0 \leq x \leq \frac{4}{3}\right\}$.

(2) 由原不等式可得 $3x - 2 < -2$, 或 $3x - 2 > 2$.

整理得 $3x < 0$, 或 $3x > 4$,

$\therefore x < 0$, 或 $x > \frac{4}{3}$.

故解集为 $\left\{x \mid x < 0, \text{ 或 } x > \frac{4}{3}\right\}$.

说明 因为 $|2 - 3x| = |-(3x - 2)| = |3x - 2|$,

故本题的两个不等式即 $|3x - 2| \leq 2$, 与 $|3x - 2| > 2$ 的解集的并集是实数集, 即 $\left\{x \mid 0 \leq x \leq \frac{4}{3}\right\} \cup \left\{x \mid x < 0, \text{ 或 } x > \frac{4}{3}\right\} = \mathbf{R}$.

例 11 解下列关于 x 的不等式:

$$(1) |mx| > 2 \ (m > 0); \quad (2) |mx| < 2 \ (m < 0);$$

$$(3) |mx - 1| < 3 \ (m > 0).$$

解 (1) 由原不等式可得 $mx < -2$, 或 $mx > 2$.

因为 $m > 0$, 故解集为 $\left\{x \mid x < -\frac{2}{m}, \text{ 或 } x > \frac{2}{m}\right\}$.

(2) 由原不等式可得 $-2 < mx < 2$.

因为 $m < 0$, 故 $-\frac{2}{m} > x > \frac{2}{m}$, 解集为 $\left\{x \mid \frac{2}{m} < x < -\frac{2}{m}\right\}$.

(3) 由原不等式可得 $-3 < mx - 1 < 3$, 即 $-2 < mx < 4$.



因为 $m > 0$, 故解集为 $\left\{x \mid -\frac{2}{m} < x < \frac{4}{m}\right\}$.

例 12 (1) 已知 $x^2 - mx + n \leq 0$ 的解集为 $\{x \mid -5 \leq x \leq 1\}$, 求 m, n ;

(2) 已知不等式 $ax^2 + bx + 1 \geq 0$ 的解集为 $\{x \mid -5 \leq x \leq 1\}$, 求 a, b ;

(3) 已知 $a > b$, 且 $a^2 + 7a = 9, b^2 + 7b = 9$, 写出一个解集为 $\{x \mid b < x < a\}$ 的二次不等式.

解 (1) 由题意可知, -5 与 1 是 $x^2 - mx + n = 0$ 的两根,

$\therefore m = (-5) + 1 = -4, n = (-5) \cdot 1 = -5$.

(2) 由题意可知: $a < 0$, 且 -5 与 1 是 $ax^2 + bx + 1 = 0$ 的两根, 故有

$$\begin{cases} -\frac{b}{a} = (-5) + 1 = -4, \\ \frac{1}{a} = (-5) \cdot 1 = -5. \end{cases} \quad \text{解得 } a = -\frac{1}{5}, b = -\frac{4}{5}.$$

(3) 由题意可知 a 与 b 是 $x^2 + 7x - 9 = 0$ 的两根, 故满足条件的不等式可为 $x^2 + 7x - 9 < 0$.

说明 这是一组“逆向”的题目, 由不等式的解集写出相应的不等式. “正向”、“逆向”, 正反相益, 计算自如, 才算熟练掌握了基本技能.

二、简易逻辑



知识与方法提要

1. 逻辑联结词

命题: 可以判断真假的语句叫做命题.

“或”、“且”、“非”这些词叫做逻辑联结词.

不含逻辑联结词的命题叫做简单命题.

由简单命题与逻辑联结词构成的命题叫做复合命题.

2. 四种命题

(1) 原命题 若 p 则 q ;

(2) 逆命题 若 q 则 p ;

(3) 否命题 若 $\neg p$ 则 $\neg q$;

(4) 逆否命题 若 $\neg q$ 则 $\neg p$.

一个命题与它的逆否命题等价.

3. 充分条件与必要条件

如果已知 $p \Rightarrow q$, 就说 p 是 q 的充分条件, q 是 p 的必要条件.



如果已知 $p \Leftrightarrow q$, 就说 p 是 q 的充要条件.



范例

例 1 把下列常见的写法, 改写成复合命题“ p 或 q ”, “ p 且 q ”或“非 p ”的形式:

(1) $a = \pm b$;

(2) $a \neq \pm b$;

(3) $a > b \geq 0$;

(4) $\begin{cases} x = 2, \\ y = -1; \end{cases}$

(5) $AB \parallel CD$;

(6) -5 不是 25 的算术平方根.

解 (1) 这是“ p 或 q ”的形式, 其中 $p: a = b$; $q: a = -b$.

(2) 这是“ p 且 q ”的形式, 其中 $p: a \neq b$; $q: a \neq -b$.

(3) 这是“ p 且 q ”的形式, 其中 $p: a > b$; $q: b \geq 0$.

(4) 这是“ p 且 q ”的形式, 其中 $p: x = 2$; $q: y = -1$.

(5) 这是“ p 且 q ”的形式, 其中 $p: AB \parallel CD$; $q: AB = CD$.

(6) 这是“非 p ”的形式, 其中 $p: -5$ 是 25 的算术平方根.

例 2 已知下列各组命题, 分别指出各组的“ p 或 q ”, “ p 且 q ”和“非 p ”形式的复合命题的真假:

(1) $p: 111$ 是奇数; $q: 111$ 是质数.

(2) $p: \text{若 } a < 1, \text{ 则 } \frac{1}{a} > 1$; $q: a^2 + b^4 + c^6 > 0$.

分析 对(1), 注意 $111 = 3 \times 37$.

对(2), p 中的 a 可取负值, q 中的 a, b, c 可同时取 0 .

解 (1) 因为 p 真 q 假, 所以“ p 或 q ”为真, “ p 且 q ”为假, “非 p ”为假;

(2) 因为 p 假 q 真, 所以“ p 或 q ”为真, “ p 且 q ”为假, “非 p ”为真.

说明 关于复合命题的“真值表”应在理解的基础上记住.

例 3 判断下列命题的真假:

(1) 命题“在 $\triangle ABC$ 中, 若 $AB > AC$, 则 $\angle C > \angle B$ ”的逆命题;

(2) 命题“若 $ab = 0$, 则 $a \neq 0$ 且 $b = 0$ ”的否命题;

(3) 命题“若 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$, 则 $ab \neq 0$ ”的逆否命题;

(4) 命题“若 $a \neq 0$ 或 $b \neq 0$, 则 $a^2 + b^2 > 0$ ”的逆否命题.

分析 对(1), “在 $\triangle ABC$ 中”是大前提, 写逆命题时应该保留.

对(4), “若 $a \neq 0$ 或 $b \neq 0$ ”的反面是“ $a = 0$ 且 $b = 0$ ”.

解 (1) 逆命题为: “在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\angle C > \angle B$, 则 $AB > AC$ ”, 这是真命题.

(2) 否命题为: “若 $ab \neq 0$, 则 $a = 0$ 或 $b \neq 0$ ”, 这是假命题.

(3) 逆否命题为: “若 $ab = 0$, 则 $a = 0$ 或 $b = 0$ ”, 这是真命题.



(4) 逆否命题为:“若 $a^2 + b^2 \leq 0$, 则 $a = 0$ 且 $b = 0$ ”, 这是真命题.

说明 这里的(3)与(4)又一次说明: 原命题为真, 它的逆否命题一定也真.

例 4 证明“若 $a^2 + 2ab + b^2 + a + b - 2 \neq 0$, 则 $a + b \neq 1$ ”为真命题.

分析 由于原命题与逆否命题同真或同假, 在原命题不容易证明时, 可改证它的逆否命题.

证明 改证与原命题等价的逆否命题:

“若 $a + b = 1$, 则 $a^2 + 2ab + b^2 + a + b - 2 = 0$ ”.

由 $a + b = 1$, 得 $a + b - 1 = 0$, 故

$$\begin{aligned} & a^2 + 2ab + b^2 + a + b - 2 \\ &= (a + b)^2 + (a + b) - 2 \\ &= (a + b - 1)(a + b + 2) = 0. \end{aligned}$$

说明 看来, 我们对表示四种命题相互关系的“方形图”, 必须给予足够的重视. 它简单明确地表示出四种命题间的关系, 也隐示了逻辑的严密性(如原命题与逆命题或否命题不等价)和灵活性(如原命题与逆否命题等价), 是“明辨真伪的金科玉律”(数学教育家魏庚人语).

例 5 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边分别为 a, b, c , 若 $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b}$, 求证: $\angle B$ 必为锐角.

分析 “正难则反”, 可考虑用反证法. “ $\angle B$ 必为锐角”的反面是“ $\angle B$ 为直角或钝角”.

证明 假设 $\angle B$ 为直角或钝角, 则 $\angle A, \angle C$ 必都为锐角, 那么

$$\begin{cases} \angle B > \angle A, \\ \angle B > \angle C. \end{cases} \quad \text{故} \quad \begin{cases} b > a, \\ b > c. \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} \frac{1}{b} < \frac{1}{a}, \\ \frac{1}{b} < \frac{1}{c}. \end{cases}$$

$\therefore \frac{2}{b} < \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$, 这与已知矛盾, 故 $\angle B$ 必为锐角.

说明 反证法是证明问题的精良武器, 必须逐步掌握它. 反证法的实质是: 肯定已知而否定结论, 因此导致矛盾.

例 6 从“充分而不必要的条件”、“必要而不充分的条件”与“充要条件”中选出适当的一种填空:

(1) “ $x \leq -1$ ”是“ $x \leq 1$ ”的_____;

(2) “ $x^2 - y^2 - 6x + 8y = 7$ ”是“ $x + y = 7$ ”的_____;

(3) “ $a^2 - ab + \frac{b^2}{4} > 0$ ”是“ $ab < 0$ ”的_____;

(4) 当 $a \in \mathbf{N}^*, b \in \mathbf{N}^*$ 时, “ $a^3 + b^3$ 是奇数”是“ $a + b$ 是奇数”



的_____.

解 (1) 因为 $x \leq -1 \Rightarrow x \leq 1$, 而 $x \leq 1 \not\Rightarrow x \leq -1$, 故应填“充分而不必要的条件”.

(2) 因为 $x^2 - y^2 - 6x + 8y - 7 = (x + y - 7)(x - y + 1)$,

可知 $x^2 - y^2 - 6x + 8y = 7 \not\Rightarrow x + y = 7$,

而 $x + y = 7 \Rightarrow x^2 - y^2 - 6x + 8y = 7$.

故应填“必要而不充分的条件”.

(3) 由 $ab < 0$, 可知 $-ab^2 > 0$, 故可得 $a^2 - ab + \frac{b^2}{4} > 0$; 反过来, 由 $a^2 - ab + \frac{b^2}{4} = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 > 0$, 仅可得 $a \neq \frac{b}{2}$, 推不出 $ab < 0$. 故应填“必要而不充分的条件”.

(4) 因为“ $a+b$ 是奇数” $\Leftrightarrow$ “ a, b 一奇一偶”, 又“ a^3+b^3 是奇数” $\Leftrightarrow$ “ a, b 一奇一偶”. 故“ a^3+b^3 是奇数” $\Leftrightarrow$ “ $a+b$ 是奇数”, 应填“充要条件”.

三、小结与复习



本章知识的逻辑结构

“集合”与“简易逻辑”是高中数学的启始章, 具有奠基性的重要作用. 本章的主要内容是:

1. 集合的有关概念、简单集合的表示法, 以及集合与集合之间的关系;
2. 逻辑联结词“或”、“且”、“非”的意义, 四种命题及其相互关系, 充分条件和必要条件.

集合与逻辑有密切的内在联系, 集合论离不开逻辑, 又很容易应用于逻辑. 利用集合的概念、表示和运算, 能把各种逻辑关系清楚地描画出来.



范例

例 1 (1) 设集合 $P = \{y \mid y = x^2 + 1\}$, $Q = \{y \mid y = x + 1\}$, 则 $P \cap Q$ 等于().

A. $\{1, 2\}$

B. $\{(0, 1), (1, 2)\}$

C. $\{0, 1\}$

D. $\{y \mid y \geq 1\}$

(2) 设 $A = \{x \mid -5 < x < 2\}$, $B = \{x \mid |x| = y + 1, y \in A\}$, 则 $A \cap$

