论初等几何定理的机器证明与消去法

朱望规 著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

论初等几何定理的机器证明与消去法

朱望规 著

国防工业出版社
·北京·

内容简介

本书介绍了初等几何机器证明,重点是消去法。首先介绍初等几何定理,如何通过坐标化,将已知条件转化为 h_i 公式组,再形成三角阵列的 F_i 公式组(三角阵列是消去法的前提)。再将定理的结论形成 g_j 公式组。消去法是对 g_j 逐个用 F_i(F_n,F_{n-1},…,F_1)做消去,最后如果所有 $g_j=0$,则结论成立。

本书肯定了 h_i 公式组线性时,用高斯消去法必然成功;同时指出非线性时,有可能得不到期望的结果,也有可能得不到三角阵列的 F_i 公式组,从而做不了消去法。

本书对有志于机器证明的读者有一定参考价值,能在不知不觉中学会做机器证明。对IT行业的从业人员,以及欲进入人工智能领域的读者无疑是一本极为合适的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

论初等几何定理的机器证明与消去法/朱望规著.—北京:国防工业出版社,2016.3
ISBN 978-7-118-10515-5

Ⅰ.①论… Ⅱ.①朱… Ⅲ.①初等几何-机器证明-消去法 Ⅳ.①O123

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第043073号

※

国防工業出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)
三河市腾飞印务有限公司印刷
新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 **印张** 16¾ **字数** 382千字
2016年6月第1版第1次印刷 **印数** 1—1800册 **定价** 88.00元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)88540777 发行邮购:(010)88540776
发行传真:(010)88540755 发行业务:(010)88540717

本书宗旨告诉大家：

“不能用消去法解非线性代数方程组，非线性代数方程组没有精确解，即没有代数形式表达的解，只能有近似解。”

前　言

初等几何(欧几里得几何,书中也简称欧氏几何)的特点是逻辑推理,由已知条件进行逻辑推理得出结果,有些定理的结果实际上又是后面一些定理的已知条件(前提),继续应用逻辑推理,得出这些定理的逻辑结论,即相应结果。大家可以从希尔伯特几何基础的68个定理出发,把所有能找到的初等几何定理形成一个推理网络。这个网络可以存入数据库,并可对它检索。我们把常见的平行线,圆的内切、旁切(外切),共线、共点、共圆,垂直、中线、角平分线,圆心角、圆周角、弦切角等常见问题,综合建立提示优先考虑添加辅助线或应用辅助点(问题中没有给出的交点、直线)的数据词典。我们要实现的初等几何证明系统是一个人机交互作用的系统,不是由计算机自己按一定规则自动执行一切既定程序的系统。这是国际上的主流方向,目前已有很好的系统,比我们想象得还要聪敏。国际上对初等几何用代数证明极为稀少,尤其不用三角函数,更为少见。

我们在这里明确指出:到目前为止,机器还没有思维与推理能力。一切都是由人编程序执行运算。不可能人没有得出的结论,计算机能自说自话自动地得出。

本书重点介绍消去法在初等几何机器证明上的应用。很早以前就有线性情况下的高斯消去法,这是绝对可靠准确的消去法。已有相应标准算法程序。当下面叙述的 F_i 公式组是非线性时,即 F_i 公式中出现某个问题变量的次数是二次或二次以上时,这时的消去法是非线性的。非线性消去法并不可靠,正如正文中指出的:

① 非线性时,有 x_l^i 次项时,在消去 x_l^i 项后,g_j 的相应式子中会保留 $x_l^{i-1},x_l^{i-2},\cdots,x_l$ 项(如 $i=3$,会保留 x_l^2,x_l 及 x_l^0 项),此后再没有机会消去这些项。最后一步所有 x_n,$x_{n-1},\cdots,x_2,x_1$ 都消去后,会有 $(\cdot)x_l^{i-1}+(\cdot)x_l^{i-2}+\cdots+(\cdot)x_l+(\cdot)$。这个式子整体上可以等于零,但不是 $0\times x_l^{i-1}+0\times x_l^{i-2}+\cdots+0\times x_l+0$ 形式,原本最后是 $g_j=0$,但消去法程序不能正常判定 $g_j=0$,从而得不到相应结论。我们称消去法不能正确结束。

② 当 h_i 公式组是非线性时,有可能得不到三角阵列的 F_i 公式组,从而无法去做消去法。

一个初等几何定理用消去法做计算机证明时,必须经过以下步骤:

(1) 问题的数字化定解。

确定定理中已知条件中的点、线、圆、三角形、多边形的坐标,通常是笛卡儿坐标,也可以是其他坐标系。例如,一个已知三角形(三个角、三个点),可以由下面几种方法给定:

① $A(0,0)$,$B(u_1,0)$,$C(u_2,u_3)$;

② 底边长 a,两个底角 α、β 或 β、γ;

③ $A(u_1,0)$,$B(u_2,0)$,$C(u_3,u_4)$,y 轴位置或者说原点$(0,0)$另外给定。

……

我们这里用 $u_1,u_2,u_3,u_4,\cdots,r$ 及 α、β、γ 等字母表示，称为定解常数。

（2）问题变量。

问题涉及的点坐标、边长、直线的斜率、截距、圆心、半径……就得设为问题变量，问题条件给出的自然的有依赖关系的变量有一个先后次序，依次定为 $x_1,x_2,x_3,\cdots$。要注意这个次序是由问题自然形成的，也是以后消去的次序，消去次序不能是人为地从高到低，或从低到高。

（3）系统判定能力的数字化。

给出点在直线上、圆上、分角线上、圆的切线上等，几条直线共点、几个点共线或共圆，两直线平行或垂直，两圆乃至几个圆相切（内切或旁切），两个角相等、相补、相余，线段的定比分点，圆周角、圆心角、弦切角的相关，图形（直线、点、角、三角形、圆）的对称与镜象……，就以上条件（关系）给出相应的判定式或行列式。

这是消去法约定的 h'_i 公式组。

这里要强调，初等几何是一个灵巧而睿智的学科，必须充分利用已知条件所给出的判定式与行列式，以简化问题。避免不必要的统一处理，以降低问题的难度。

（4）真正的 h_i 公式组的产生。

将 h'_i 公式组设法通分去分母等处理，变成多项式表示的 h_i 公式组。

（5）F_i 公式组的产生。

用消去法将 h_i 公式组改为三角阵列的 F_i 公式组，这是消去法开始的依据，F_i 公式中圆括号内最前面的…是指定解常数 $u_1,u_2,u_3,\cdots$。

$$F_1(\cdots,x_1)=0$$
$$F_2(\cdots,x_1,x_2)=0$$
$$\vdots$$
$$F_{n-1}(\cdots,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})=0$$
$$F_n(\cdots,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n)=0$$

如果 F_i 公式组每个问题变量只出现 1 次或 0 次时，称线性消去法，无论 F_i 公式多么复杂，都有标准的算法去完成消去过程，这是绝对可靠、准确的。如果 n 个 F_i 公式中出现某几个问题变量的 2 次或 2 次以上时，称为非线性消去法。

（6）将定理的结论数字化表示为 g_j 公式组。

（7）对 g_j 逐个使用消去法：

① 当 F_n 中 x_n 出现的最高次项是 $x_n^{k_n}$ 时，我们解出：

$x_n^{k_n}=a_1x_n^{k_n-1}+a_2x_n^{k_n-2}+\cdots+a_{k_{n-1}}x_n+a_{k_n}=f_n(\cdots,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n)$（如 $k_n=3$，$x_n^3=a_1x_n^2+a_2x_n+a_3$）

根据余式定理，这样做与 F_n 去除得的余数是相等的，这样做省去了除式。

用上述 f_n 去消去 g_j 中大于或等于 $x_n^{k_n}$ 项。此时 g_j 记为 R_j^n（其中包括 x_n 的低于 k_n 次项）。

在线性时，就简单了，用 $x_n=b_1x_{n-1}+b_2x_{n-2}+\cdots+b_{n-1}x_1+b_n$ 去消去 g_j 中所有 x_n 的

项,使 g_j 中不再出现 x_n 变量,此时 g_j 记为 R_j^n。

② 对每一个 F_i 都这样做,i 依 $n-1,n-2,\cdots,3,2,1$ 顺序做。

设做到 R_j^{i+1},现在要用 F_i 去做消去,设 F_i 中 x_i 出现的最高次项是 $x_i^{k_i}$,解出:

$x_i^{k_i}=d_1x_i^{k_i-1}+d_2x_i^{k_i-2}+\cdots+d_{k_{i-1}}x_i+d_{k_i}=f_i(\cdots,x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_i)$

例如 $k_i=4$,$x_i^4=d_1x_i^3+d_2x_i^2+d_3x_i+d_4$。

用上述 f_i 去消去 R_j^{i+1} 中大于或等于 $x_i^{k_i}$ 项。此时 R_j^{i+1} 记为 R_j^i(其中包括 x_i 的低于 k_i 次项)。在线性时,直接是 $x_i=c_ix_{i-1}+c_2x_{i-2}+\cdots+c_{i-1}x_i+c_i$。消去 R_j^{i+1} 中所有 x_i 的项,使 R_j^i 不再出现 x_i 变量,此时改为 R_j^i。

所有消去过程做完,$R_j^1=0$,证明了定理结论准确。

对非线性消去法,消去过程做完,整体应该是 0,但不是 $0\times x_i^{ki-1}+\cdots+x_i^{ki-2}+\cdots+0\times x_i+0$形,程序不能判定 $g_j=0$,从而不能判定结论准确。

消去过程中为了能反解出 f_i 公式 $x_i=f_i(u_1,u_2,\cdots,u_m,x_1,x_2,\cdots,x_{i-1})$,$F_i$ 公式组必须是三角阵列的,否则消去法就有问题,做不了。

以上整个过程只是将最麻烦的步骤(7)交给计算机做。其他六步都是解题人自己手工做。而且这是仁者见仁、智者见智的事,各人做法可能不太一样。线性情况下,由 F_i 公式组(或 h_i 公式组)交给高斯消去法标准算法解出各个问题变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,直接由计算机验证 $g_j=0$ 即可。这与上述逐个消去 x_i 的消去过程完全一致,并无本质区别。

在正文中已经说明,其实不必用消去法,直接用原汁原味的笛卡儿几何——解析几何——就可以了,消去法本来就是在运用笛卡儿几何。本书第 3 章说明凡用消去法的,笛卡儿几何一定能行,而且原汁原味,充分反映了初等几何的特色。

本书为读者打开了一扇窗,让读者看到计算机里面是怎么做题的。但需要说明的是计算机多项式运算用的是一个个单项式的和,(由计算机内部表示多项式的数据结构限定)有时多达几千项,不容易看。本书用的是因子的乘积,是为了简化,容易看、容易运算。读者不妨仔细读一读,模仿着做一做,一定受益匪浅。

在此我要深深地感谢我的四位已故恩师朱公瑾、徐桂芳、游兆永和周为群教授,是他们帮助我打下数学的坚实基础,令我行进在数学大道上。恩师朱公瑾教授和师叔赵孟养教授“为人低调少言、治学严瑾勤奋、待人慷慨平和”的人格深深地影响着我。感谢北京理工大学王遇科教授,是他领我进入人工智能的大门。感谢原北京有线电厂(738 厂)陈明远、陈万芳高工,是他们帮助我完成 751 光笔图形显示器软件系统,使我具有编制系统软件和编译器的能力。感谢原总参谋部 61 所所长王鸿武教授和总工李德毅院士对我在原总参谋部 61 所工作期间的关心和帮助。感谢汪应洛院士、林彬高工、张学琴教授在工作和生活上对我的关心和帮助。感谢本书责任编辑刘炯同志为本书出版所做的努力与工作。

感谢王玉蓉、朱文媛、王辰昊、王赞秋、李玉欣、王金凤、王书艳、王爱珠、吴农潮、吴畏、高露、许丽雅等为本书素材的收集、图表的绘制和文字的校对提供的大力支持,在此向他们表示衷心的感谢!

最后我还要深深地感谢西安交通大学给我的教导和培养。我在那里学习、工作、成长，那里有我难忘的一切，令我动情、回忆。好比孩子对哺育自己的母亲，我怀念那里的领导、老师、同事、朋友，怀念那里的一切。

想写本书的想法已有二十余年，十五六年来我一直在不断地积累、整理、验证资料，丰富着底稿，但由于方方面面的原因，拖延了不少时间。其中有不当之处，敬请读者不吝赐教。

朱望规

2016 年 2 月于北京

目　录

第1章 几何定理的机器证明

1.1 欧几里得几何、笛卡儿几何、公理系统概述

一、欧几里得“几何原本”的理解

现在属于初等几何学的内容已经完全包含在“几何原本”中了。“几何原本”在将近2000年的时间中被认为是几何学的标准教科书。

“几何原本”以最初的假设作为基础。它有23个关于点、线、面、角度和平行定义，有5个公设及5个公理。几何证明的主要方法是分析法、综合法和归谬法。分析法是分析应该成立的条件，经一些步骤，从条件出发到达结果成立。综合法是从以前证明过的事实出发，逐步导出要证明的结果。归谬法是保留命题的假设，否定结论，由此导出和已经证明的事实相互矛盾的结果。

欧几里得“几何原本”中的缺陷主要有：

(1) 使用叠合法证明全等方面的定理，它论述说，重合的图形自然是恒等或相等的。它是用图形移动重合的办法来证明的。这是一种经验性质的事情，不属于纯直觉知识，是属于外部感官的经验(这一点也可以说缺少运动公理)。

(2) 平行公设。

(3) 公理不完备，如缺少运动公理、连续公理和顺序公理。

(4) 不少定义不严格，没有足够的抽象。用了一些没有解释的概念，如“放置”、“介于”、“同侧”、“异侧”、“角度之和”、“运动”、“连续”等。

(5) “点”、“直线”、“平面”的定义，做了没有明确数学内容的定义，原本应是不加定义的初始概念。

(6) 证明有漏洞，有的证明使用归纳法由特殊来推测一般性结论。有的证明暗中使用了某些没有明确给出的公理。

经不少前辈数学家努力，逐步推进，终于迎来了希尔伯特(Hilbert)公理系统。

二、笛卡儿几何的理解

笛卡儿几何就是众所周知的解析几何，也称为坐标几何。

在笛卡儿看来，希腊人的几何方法过于抽象，欧几里得几何中的每个证明，总要求新的奇妙的想法，且证明过多地依赖图形；笛卡儿也不满意当时流行的代数，说它完全从属于法则和公式。他想把逻辑、几何、代数这三方面的优点组合在一起，并去掉它们的缺点。

帕普斯(Pappus)问题的解决，使笛卡儿打开了解析几何的大门。

笛卡儿的具体思路是：

(1) 从坐标观念出发，将代数学对应于几何学，建立平面上点与实数对的对应关系。

(2) 从应用代数学解决几何作图问题入手，提出用代数方程表示几何曲线的方法。

(3) 用求解代数方程的根，解决几何作图问题。

笛卡儿的几何解析法的基本步骤是：

首先，假设提出的几何作图问题已经解决，用代数符号（字母）表示在作图中所必需的已知和未知的线段。其次，分析这些已知和未知线段之间的相互关系，列出代数方程。一般说来，代数方程的个数和未知线段数相同；在作图结果是一条曲线时，代数方程个数要多一个。最后，解代数方程，使用已知线段可以表示未知线段，最终解决这个作图问题。

几何代数化思想的发展是：

(1) 对代数方程所表达的曲线与坐标系的关系上，进一步指出：曲线的次数与坐标轴选择无关。若两条曲线用同一坐标系，则两条曲线的代数方程的联立解就是两条曲线的交点。

(2) 提出了用代数方程作为辨别“几何的”或“非几何的”曲线的标准做法。几何曲线是指那些可以用唯一的含 x 和 y 的有限次代数方程表示出来的曲线。使几何曲线的范围扩大，并提出一些全新的曲线。

(3) 笛卡儿进一步对几何曲线进行了分类。

(4) 笛卡儿的解析法，还给代数方程以几何的解释，即用几何曲线直观地表达代数语言。

笛卡儿运用坐标方法，“数”与“形”的对应方法及辩证分析方法建立新的学科——解析几何。笛卡儿几何用的就是实数系，本来就是用代数解几何问题。因而用解析几何做计算机机器证明，顺理成章，不需要任何附加条件，不需要机械化定理。其实消去法只是解析几何中的一个数学方法。

三、公理系统的理解

通常是一门数学学科的公理系统，它是从尽可能少的无定义的原始概念开始，用一组不证自明的命题（基本公理）出发，利用纯逻辑推理法则，把一门数学学科重建起来。强调的是推出整个这门数学学科。过程中还要解决公理系统的相容性、互相独立性和完备性。

Hilbert 几何基础以及其后俄罗斯几何学家的努力，实实在在把欧氏初等几何重建起来了，为近代欧氏几何的发展铺平了道路。

要注意公理系统是一个整体，其任何一个子集（或部分），都是或只是这门数学学科的部分，而非整个，对这个数学学科是没有意义的。应该用公理系统整体去描述整个数学学科。

公理系统中公理的先后次序可以不一样，它们是一起起作用的。俗话是一组公理合起来组成这门学科的初始开发平台。

虽然欧氏几何原本已有公理系统，但Hilbert第一个完整地解决了公理系统相容性、互相独立性和完备性。他既重建了欧氏几何又将欧氏几何数字化（坐标化）后等价于笛卡儿几何，打开了欧氏几何计算机证明的大门。

1.2 Hilbert公理系统的理解

下面介绍五组公理。

I 关联公理

I_1 对于两点A、B，恒有一直线a，它同A和B这两点的每一点相关联。（可以理解为：过任意不同的两点A、B，可以连接一条直线a，使A与B在直线a上。）

I_2 对于两点A、B，至多有一直线，它同A和B这两点的每一点相关联。（可以理解为：过任意不同的两点A、B，至多有一条直线，A、B在直线上。）

I_3 一直线上恒至少有两个点，至少有三个点不在同一直线上。（可以理解为：一条直线上至少有两个点，及不在直线上的第三点，这三个点不在同一直线上。）

I_4 对于不在同一直线上的任意三点A、B和C，恒有一平面α，它同A、B、C三点的每一点相关联。对于任一平面，恒有一点同这平面相关联。（可以理解为：过不在同一直线上的任意不相同的三点A、B、C，有一个平面α，使A、B、C三点在平面α上。任一平面至少有一个点。）

I_5 对于不在同一直线上的三点A、B和C，至多有一平面，它同A、B和C这三点的每一点相关联。（可以理解为：过不在同一直线上的三个不同点A、B、C，至多有一个平面α，使三个点A、B、C在平面α上。）

I_6 若一直线a的两点A和B在一个平面α上，则a的每个点都在平面α上。这时我们也说直线a在这平面α上。（它给出了直线a在平面α上的定义。）

I_7 若两个平面α和β有一个公共点A，则它们至少还有一个公共点B。（我们可以进一步说：平面α与β有一条公共直线a，它通过A、B两点。）

I_8 至少有四个点，不在同一平面上。（可以这样理解：不在同一直线上的三个点A、B、C，有一个平面且至多有一个平面α，使A、B、C在平面α上。对平面α外的任一个点D，则这四个点不在同一平面上。）

统观关联公理实际上对对象点、直线、平面而言，点与直线的关系：点在直线上，点在直线外；过两个不同的点，有且仅有一条直线a，使A、B在直线a上，至少有三个点不在一条直线上。点与平面的关系：点在平面上，点在平面外；过不在同一直线上的三个不同的点，有且仅有一个平面α，使三个点在平面α上。直线与平面的关系：若点A、B在平面α上，则通过A、B的直线a在平面α上（或说一条直线a上有两个点在平面α上，我们说直线a在平面α上）。关联公理对对象点、直线、平面的关系，做了明确的限定。

Ⅱ 顺序公理

定义：在一直线上的点有一定的相互关系，用“介于”或“在……之间”来描述（有了在……之间，再定从哪一点开始排，就可得到次序，即序）。

Ⅱ₁ 若一点 B,在点 A 和点 C 之间,则 A、B 和 C 是在一条直线上的不同的三点,这时 B 也在 C 和 A 之间,见图 1－1。

图 1－1

Ⅱ₂ 对于两点 A 和 C,直线 AC 上恒至少有一点 B,使 C 在 A 和 B 之间,见图 1－2。

图 1－2

Ⅱ₃ 一直线的任意三点中,至多有一个点在其他两点之间。

有了公理Ⅱ₁、Ⅱ₂、Ⅱ₃,则在一条直线上,就可有任意有限个点,而且有一定的次序,使之能记为 A、B、C、D、E、…、K。甚至可有有序的无穷多个点。可以是$\aleph_0$(可数无穷)个点,这里是离散的点,直到有了连续公理Ⅴ,才有可能充满连续的直线,才逐渐走向笛卡儿几何。前面有了点、直线、平面,现在再引入线段。

定义: 直线 a 上有两个点 A、B,我们把一对点 A 和 B 所成的点组称为线段,在 A 和 B 之间的点称为线段 AB 的点,或称为线段 AB 内部点,此时 A、B 称为线段的端点,直线 a 上其他的点,称为线段 AB 的外部点。

Ⅱ₄ 设 A、B、C 是不在同一直线上的三点,设 a 是平面 ABC 上的一条直线,但不能通过 A、B、C 这三点中的任意一点,若直线 a 通过线段 AB 的一个点,则必也通过线段 AC 的一点,或线段 BC 的一点,见图 1－3。

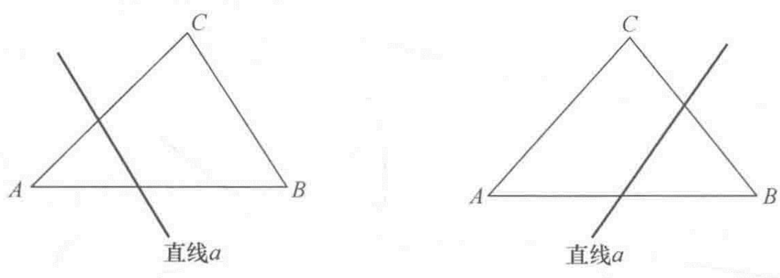

图 1－3

有了直线、线段,我们可以定义直线上相对于一点 O 的同侧和异侧,进一步定义射线,才可定义角。

定义: 设直线 a 上有四个点 A、A'、O 与 B。若 O 在 A、B 之间,但不在 A、A'之间,则说 A、A'在直线 a 上点 O 的同侧,而 A 和 B 在直线 a 上点 O 的异侧。直线 a 上点 O 同侧的点的全体称为从点 O 开始的一条射线,见图 1－4。

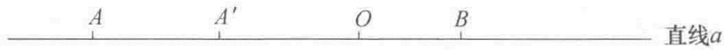

图 1－4

定义: 设 α 是任一平面,而且 h、k 是平面 α 上从点 O 开始的且不属于同一直线的两条射线,把射线 h、k 组成的射线组称为一个角,用 $\angle(h,k)$ 表示,点 O 称为这个角的顶点。进一步可定义 $\triangle ABC$。

平面 α 上,不在同一直线上的三个点 A、B、C 形成三个角:$\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle ACB$ 。这

三个角的公共区域是$\triangle ABC$。进一步说公共区域是$\triangle ABC$的内部。除三条线段AB、BC、AC及$\triangle ABC$的内部以外，平面α的点是$\triangle ABC$的外部。

进一步可定义多边形。

公理II_4是说：对于$\triangle ABC$而言，一条直线a，从AB进入三角形，必定还会离开三角形，离开时要不经过（与它相交）AC，要不经过C，要不经过（与它相交）BC，三者必居其一。

有了顺序公理我们就引入平面上直线的同侧、异侧概念：

平面α上有一条直线a，对不在直线a上的两个不同的点A、B：若线段AB不与直线a相交，称A、B在直线a的同侧；若AB与直线a相交于C点，当C是线段AB内点时称A、B在直线a的异侧，当C是线段AB的外点时称A、B在直线a的同侧。

Ⅲ　合同公理（我们不妨直接理解为关于“相等”的公理）

III_1　设A和B是一直线a上的两点，A'是这直线或另一直线a'上的一点，而且给定了直线a'上A'的一侧，则在直线a'上A'的一侧，恒有一点B'，使得线段AB和线段$A'B'$合同或相等，用$AB \equiv A'B'$表示。

（注意：这里有A'的一侧，即有序的要求，否则就没有合同的唯一性了！没有序的要求，合同公理必须改动。）

III_2　若两个线段$A'B'$和$A''B''$都与另一线段AB合同（相等），则这两线段$A'B'$和$A''B''$也合同；或者说：若两线段都与第三线段合同，则它们彼此也将合同。

（注意：合同关系具有自反性，即每个线段和它自己合同，合同公理III_2是合同关系的可传递性，由此可见合同关系是一个严格定义的关系。）

III_3　设两线段AB和BC在同一直线a上，除端点B外无公共点；设另有线段$A'B'$和$B'C'$在这直线上或另一直线a'上，除端点B'外，没有公共点。若$AB \equiv A'B'$，且$BC \equiv B'C'$，则$AC \equiv A'C'$，见图 1－5。

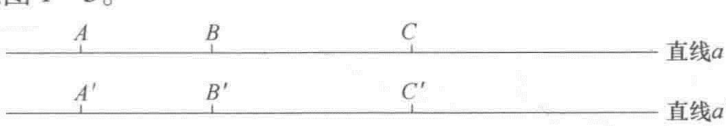

图 1－5

这条公理使线段能够相加。

角的相等需要下述合同公理III_4。

III_4　设给定了平面α上的一个角$\angle(h,k)$，另一平面α'上有一直线a'，在平面α'上直线a'的一侧。设h'是a'直线上的，从一点O'开始的一条射线，则平面α'上恰有一条射线k'，使$\angle(h,k)$与$\angle(h',k')$合同或相等，而且使$\angle(h,k)$的内部在a'的给定了的一侧，用记号表示：$\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$。且每一角和它自己合同，即$\angle(h,k) \equiv \angle(h,k)$。这个角合同也是自反的、可传递的。

III_5　若$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$有下列合同式：

$$AB \equiv A'B',\ AC \equiv A'C',\ \angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

则也恒有合同式$\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$和$\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$，也可以再得：$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$。

进一步可推出两个三角形的边角边、角边角、边边边合同的定理。

Ⅳ 平行公理(欧几里得公理)

设 a 是任一直线,A 是 a 外的任一点,在 a 与 A 决定的平面 α 上,至多有一条直线通过 A,而且不和 a 相交。

我们将后一条直线 b,称为通过 A 的 a 的平行线 b,记作 $a /\!/ b$。

进一步可得:①若两条平行直线被第三条直线所截,则同位角合同,内错角、外错角都合同,同旁内角之和、同旁外角之和为 $\pi(180°)$;②三角形三个内角之和为 $\pi(180°)$。

再进一步可得圆的概念与相关定理。

Ⅴ 连续公理

V_1 阿基米德公理(度量公理)

若 AB 和 CD 是任意两线段,则必存在一个数 n,使得沿 A 到 B 的射线上,自 A 作首尾相接的 n 个线段 CD,必将越过 B 点。

V_2 直线完备公理

一直线上的点集连同其顺序关系与合同关系不可能再这样地扩充,使得这条直线上原来元素之间所具有的关系,从关联公理Ⅰ到合同公理Ⅲ所推出的直线顺序与合同的基本性质以及连续公理 V_1 都仍旧保持。

根据直线完备公理,我们可以证明:

完备定理 几何元素(点、直线、平面)形成一个集合,它保持关联公理、顺序公理、合同公理和阿基米德公理,从而在保持全体公理的条件下,不可能经由点、直线和平面再行扩充。

只有阿基米德公理,连同公理Ⅰ~Ⅳ,并不足以证明我们的几何和通常的笛卡儿解析几何完全相同。但加上实数的完备公理就能证明有界集合确界存在定理及凝聚点存在的波尔查诺定理。从而证明了欧氏几何在坐标化(加上角的数字化)后,和笛卡儿几何相同。

我们特别强调:初等几何数字化后(所有定解的点坐标化后)的计算机证明就是用的笛卡儿解析几何,其数系是实数系。虽然计算机进行的是所要求精度下的近似计算,但仍不失为实数系。

计算机初等几何的机器证明的主流是从已知条件到结果的逻辑演释证明,它利用推理网络和人工智能语言。这里先不讨论这方面的问题。

做笛卡儿几何时,不需要研究能在坐标化后计算机实现。著名的四色问题证明也没有人去讨论四色问题能不能用计算机实现证明。直到今天机器还没有自行思考的能力,所谓联想能力是逻辑推演下去可能的走向,这也是要人预先安排的。计算机不可能在人还没有得到结果时,自说自话去推出一个结果。所谓初等几何的机器证明,其实就是用解析几何,即对初等几何坐标化(包括角度的数字化)后,用代数、三角去推导,从定解条件(已知)去推出结果。人怎么去做,计算机就去怎么实现,只是运算能力比人快很多。其实早在20世纪六七十年代,作为计算机算法研究,就在用汇编语言、FORTRAN语言做初等几何定理的推演,以及计算机算法的汇集。没有任何人去做相应的计算机实现的可行性,即所谓的机械化定理。如今的计算代数和计算几何也不需要。至于算法的可行性研究,那是另一回事,不相关的。

要成为初等几何机器证明系统,首先要有一个平台,有一个出发点,那些是系统已经认可的、准确的定理与结论。

我们仅理解5条公理是不够的。要推出整个欧氏初等几何,需先做下列工作:

（1）从关联公理推出定理 1 ~ 2[1]；

（2）从关联公理和顺序公理推出定理 3 ~ 10[1]；

（3）从合同公理推出定理 11 ~ 29[1]；

（4）从平行公理推出定理 30 ~ 31[1]；

（5）从连续公理推出定理 32[1]。

从而有了推演出整个欧氏初等几何的基础。从公理出发时只有点、线、平面，引出了线段概念、平行线概念、角概念、三角形概念；点的同侧与异侧、角的内外、三角形内外、内角平分线、外角平分线、等角、补角、同位角、同旁内角、同旁外角、内错角、外错角；再有多边形、圆、圆心角、圆周角、弦切角、圆的弦、切线，两圆的内切、旁切，三角形的内切圆、外接圆……。从数系来讲，不管从什么数系出发，用不用德沙格数系，最终利用计算机时必须是实数系。最终必须是满足 5 条公理的整体的欧氏几何，否则不能用计算机的数值计算证明。请注意两个系统同构时才能用一个系统去研究另一个系统的性质，计算机系统不能论证无序几何，两者的系统不同构。

就消去法而言，不管你用不用，拐不拐到无序几何、垂直几何，最终所用到的十几个关系：

① 线段相等；②两点的中点；③两线平行；④两线垂直；⑤三线共点；⑥三点共线；⑦两角相等；⑧点在分角线上；⑨线段比相等；⑩一点分两点的线段成定比；⑪一点在圆上；⑫四点共圆；⑬点到直线的距离；⑭直线的法式方程，等等。

用的都是笛卡儿几何的结论，绕开有序，这些关系怎么得来？请注意消去法自身不管自觉不自觉，均是在笛卡儿几何里做事。这些都是通常解析几何的结论。

从欧氏几何的体系来讲，有了 5 条公理和 32 个定理外，苏联数学家做了许多有益有用且精彩的补充，造就了完整的希尔伯特的几何基础体系，希尔伯特使欧氏几何在数字化后等价于笛卡儿几何。这是希尔伯特对数学的贡献，是他首先研究了一门数学学科的公理体系。他无愧于数学界亚历山大大帝的称号。

从几何基础体系的功能划分来讲，除了共点（多条直线共点、多圆共点）、共线、共圆外，尚有：

（1）比例论（几组线段成比例，三角形相似等）。

这里有巴斯噶（Pascal）定理、德沙格（Desargues）定理、梅奈劳斯（Menelaus）定理及逆定理、塞瓦（Ceva）定理及逆定理、托勒密（Ptolomy）定理、莫莱（Morley）定理、卡诺（Carnot）定理、西姆松（Simson）定理，等等。

摒弃角及角的相等，不用三角函数，仅用距离公式上述定理是很难证明的，勉强去证也是极为困难的。

消去法重点是西姆松定理与莫莱定理的证明、德沙格定理的引入。而没有考虑其他几个定理的证明，就不能成为一个完整的几何基础系统。

（2）面积论（有众多面积相等、面积成比例的定理）。

不用三角函数很难证明 $\triangle ABC$ 三边长 a、b、c 对应三个角 A、B、C，三角形面积 $=\frac{1}{2}ab\sin C$，正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，还有许多面积比等于正弦（sin）比的定理。

初等几何还有作图题和轨迹题。一个作图方法给出，做好了，还需要证明作出的图满足要求；轨迹题是先判定轨迹是什么，再证明满足要求。这一切也离不开几何证明。仅用

有理分式与多项式是不能解决初等几何问题的。否则就不会有初等几何不能问题。

希尔伯特机械化定理(即希尔伯特著,《希尔伯特几何基础》中的定理62[1]):

设一种平面几何中,关联公理 $\mathrm{I}_1 \sim \mathrm{I}_3$,顺序公理Ⅱ,平行公理Ⅳ都满足,而且巴斯噶定理正确。几何中的每一条纯粹的交点定理,可以通过作适当的辅助点和辅助线,表示为有限个巴斯噶构形的组合。

这个定理是说:利用巴斯噶定理,交点定理的证明不再需要求助于合同公理与连续公理。巴斯噶构形是巴斯噶定理的图示构形,是指利用平行与相交的基本构形。如《希尔伯特几何基础》[1]书中:p34 图 38,p35 图 41,p36 图 42,p67 图 76,p68 图 77。这与机械化定理无关。另外,初等几何定理也不是都由交点定理来解决的。

现成的《希尔伯特几何基础》初等几何公理体系,数字化(坐标化)后等价于笛卡儿几何,就是用代数去证明几何定理,这就足够了。就不需要机械化定理了。就初等几何公理体系而言,实际上是从希尔伯特的5条公理、32个定理出发,再经过比例论、面积论、几何作图……引出整个初等几何。

实数全体 $\mathbf{R}$ 构成一个具有下述性质的体系。

关联定理 R1 ~ R6:

R1　从一个数 a 和一个数 b,经过“加”产生一个确定的数 c,即对任意 a、$b \in \mathbf{R}$,存在 $c \in \mathbf{R}$ 使 $a+b=c$ 或 $c=a+b$。

R2　设 a、b 是两个给定的数,恒恰有一个数 x 存在,和恒恰有一个数 y 存在,即对任意 a、$b \in \mathbf{R}$,存在 $x \in \mathbf{R}$ 及 $y \in \mathbf{R}$ 使 $a+x=b$,$y+a=b$。

R3　有一个确定的数,叫作0(零),使得每一个数 a,同时有:$a+0=$,$0+a=a$。

R4　从一个数 a 和一个数 b,经过“乘”产生一个确定的数 c,即对任意 a、$b \in \mathbf{R}$,存在 $c \in \mathbf{R}$ 使 $a \times b=c$,$c=a \times b$。

R5　设 a 和 b 是任意两个数,而且 a 不是0。恒恰有一个数 x 存在,也恒恰有一个数 y 存在,即对任意 a、$b \in \mathbf{R}$,$a \neq 0$,存在 $x \in \mathbf{R}$ 且 $y \in \mathbf{R}$ 使 $a \times x=b$,$y \times a=b$。

R6　有一个确定的数,叫作1,使得对于每一个数 a,同时有:$a \times 1=a$,$1 \times a=a$。

运算律(R7 ~ R12):

设 a、b、c 是任意三个数,下列运算律恒成立:

R7　$a+(b+c)=(a+b)+c$　　R8　$a+b=b+a$

R9　$a \times (b \times c)=(a \times b) \times c$　　R10　$a \times (b+c)=a \times b+a \times c$

R11　$(a+b) \times c=a \times c+b \times c$　　R12　$a \times b=b \times a$

顺序定理(R13 ~ R16):

R13　设 a 和 b 是任意两个不同的数。两个数中恒恰有一个大于另一个。设前者是 a,后者 b,也称为 b 小于 a。用记号表示即 $a>b$ 和 $b<a$。对任意数 a,$a>a$ 不成立。

R14　若 $a>b$ 而且 $b>c$,则 $a>c$。

R15　若 $a>b$,则恒有 $a+c>b+c$。

R16　若 $a>b$,而且 $c>0$,则恒有 $a \times c>b \times c$。

连续定理(R17 ~ R18):

R17(阿基米德定理)　设 $a>0$ 和 $b>0$ 是任意两个数。恒能把 a 加上它自己,加到