



普通高等教育“十三五”规划教材

信息光学教程

(第二版)

李俊昌 熊秉衡 等 编著



科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

信息光学教程

(第二版)

李俊昌 熊秉衡 等 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

为适应面向 21 世纪的信息光学教学的需要,本书系统介绍衍射的数值计算方法,包含了目前大学本科信息光学课程的主要内容.全书内容包括:数学预备知识、标量衍射理论、衍射积分的数值计算及应用、衍射受限成像、光学信息处理、部分相干理论、全息照相、全息干涉计量、数字全息以及光波分复用中的基本器件与网络.为适应现代光信息的数字化发展趋势,光盘还提供了与教材内容相适应并得到实验证实的 MATLAB 数字仿真程序.

本书可以作为高等院校“光学”“光学工程”“电子科学与技术”“光信息科学”等专业的本科生及研究生教材,也可以供相关专业的研究生及科技工作者参考.书中打“*”号部分主要适用于研究生及科技工作者.

图书在版编目(CIP)数据

信息光学教程 / 李俊昌等编著. —2 版. —北京:科学出版社,2017.1
普通高等教育“十三五”规划教材
ISBN 978-7-03-051343-4

I. ①信… II. ①李… III. ①信息光学-高等学校-教材 IV. ①O438
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 000615 号

责任编辑: 窦京涛 / 责任校对: 张凤琴
责任印制: 白 洋 / 封面设计: 迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

保定市中西美凯印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 1 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16

2017 年 1 月第 二 版 印张: 25

2017 年 1 月第二次印刷 字数: 592 000

定价: 59.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

第二版前言

在信息光学领域,标量衍射理论是最基础的理论.如果要定量描述信息光学的实际问题,几乎都涉及衍射计算.由于实际的衍射问题几乎无解析解,必须借助于计算机作数值计算,随着计算机技术的飞速发展,信息光学技术已经与计算机结下不解之缘.然而,衍射计算是一件比较困难的工作,正如玻恩(M.Born)及沃尔夫(E.Wolf)在他们的名著《光学原理》(*Principles of Optics*)一书中指出的那样:“衍射问题是光学中遇到的最困难的问题之一,在衍射理论中很少存在某种意义上可以认为是严格的解……”在目前流行的信息光学著作或教材中,衍射计算方法的讨论较少,在一定程度上成为学习和研究光信息技术的障碍.为此,通过对不同形式衍射积分的研究,对目前流行的计算方法作简要总结,是本书第一版的重要宗旨.

第一版 2011 年出版后,受到相关专业的大专院校师生及科技工作者广泛欢迎.基于书中衍射数值计算的基本内容,作者先后应邀在清华大学、国防科学技术大学、北京理工大学、四川大学、北京工业大学、中国科学院大学及台湾师范大学等多所知名院校为研究生作过讲座,第一次印刷的 3000 册已售罄.几年来的教学实践表明,基于取样定理对衍射积分的数值计算进行认真分析,用便于学习的计算机语言介绍计算程序,并且通过实验验证一些典型的计算实例,将衍射数值计算理论引入大学本科及研究生的教学是完全可行的.作者衷心感谢国内信息光学界专家及科学出版社的大力支持,使本书第二版被列为科学出版社普通高等教育“十三五”规划教材出版.

为适应面向 21 世纪的信息光学教学的需要,第二版除包含大学本科信息光学教学的基本内容外,对衍射数值计算及相关内容作了较大篇幅的扩充,融入了作者的一些新研究成果.例如,在衍射数值计算部分介绍了基于虚拟光波场的衍射计算方法;在相干光成像部分从柯林斯公式出发导出光波通过光学系统的成像公式,对相干传递函数赋予了新的物理含义;在光学信息处理中对阿贝的二次成像过程进行了定量描述;在数字全息部分介绍了基于虚拟光波场的波前重建方法及其在彩色数字全息中的应用.此外,为方便读者的学习和研究,本书光盘还提供了 MATLAB 语言编写并得到实验证实的大量计算机仿真程序,可访问 <http://www.sciencereading.cn> 选择“网上书店”,检索图书名称,在图书详情页“资源下载”栏目中获取本书的光盘资源.由于 MATLAB 语言容易学习,作者期望读者通过这些程序的学习和使用,不但能加深对书本知识的理解,而且能通过对程序的功能扩展,解决学习及应用研究中遇到的问题.

本书第二版的结构与第一版基本相同:第 1 章,数学预备知识;第 2 章,标量衍射理论;第 3 章,衍射积分的数值计算及应用;第 4 章,衍射受限成像;第 5 章,光学信息处理;第 6 章,部分相干理论;第 7 章,全息照相;第 8 章,全息干涉计量;第 9 章,数字全息;第 10 章,光波分复用中的基本器件与网络.各章撰写分工如下:宫爱玲教授,第 1 章;李俊昌教授,第 2、3、4、9 章;伏云昌教授,第 5 章;钱晓凡教授,第 6 章及相关程序;熊秉衡教

授, 第 7、8 章; 李川教授, 第 10 章及相关程序. 全书由李俊昌教授统稿并编写了其余各章的相关程序.

为了让本书既适用于本科生教学, 又能为相关专业的研究生及科技工作者提供有益的参考, 我们在书的目录中用“*”符号标注了部分章节, 这些内容主要适用于研究生及科技工作者参考.

由于作者水平有限, 书中不足及疏漏之处敬请读者指正.

李俊昌

2016 年 6 月

第一版前言

在信息光学研究领域中,光波的衍射理论是最基础的理论,如果要定量描述信息光学的实际技术问题,几乎都涉及衍射计算.由于实际的衍射问题几乎无解析解,必须借助于计算机作数值计算,随着计算机技术的飞速发展,信息光学技术已经与计算机结下不解之缘.然而,衍射计算通常是十分困难的工作.正如玻恩(M.Born)及沃尔夫(E.Wolf)在他们的名著《光学原理》(*Principles of Optics*)一书中指出的那样:“衍射问题是光学中遇到的最困难的问题之一,在衍射理论中很少存在某种意义上可以认为是严格的解……”在目前流行的信息光学著作或教材中,衍射计算方法的讨论较少,在一定程度上成为学习和研究光信息技术的障碍.从光传播的物理概念出发,通过对不同形式衍射积分的研究,对目前流行的计算方法简要总结,为相关专业的大学生、研究生及科技工作者提供方便,是本书的一个重要宗旨.

为适应面向 21 世纪的信息光学教学的需要,本书除系统介绍衍射的数值计算方法外,还包含大学本科信息光学教材的主要内容.全书的结构为:第 1 章,数学预备知识;第 2 章,标量衍射理论;第 3 章,衍射积分的快速傅里叶变换计算;第 4 章,衍射受限成像及成像系统;第 5 章,部分相干理论;第 6 章,光学信息处理;第 7 章,全息照相;第 8 章,全息干涉计量;第 9 章,数字全息;第 10 章,光波复用中的基本器件与网络.

为方便读者学习,本书附录 A 提供了 MATLAB 语言编写的衍射计算及数字全息波前重建程序,所附光盘除提供全书的习题及参考答案外,还介绍了附录 A 中程序的运行方法及运行程序时的相关文件.读者不但可以利用这些程序验证书中衍射计算及数字全息的主要内容,而且能解决许多实际问题.为了让本书既适用于本科生教学,又能为相关专业的研究生及科技工作者提供有益的参考,我们在书的目录中用“*”号标注了部分章节,这些内容主要适用于研究生及科技工作者参考.

本书作者是长期在光信息技术第一线从事教学及科研的工作者,各章撰写分工如下:宫爱玲教授,第 1 章;李俊昌教授,第 2、3、4、9 章及计算程序;钱晓帆教授,第 5 章;伏云昌教授,第 6 章;熊秉衡教授,第 7、8 章;李川教授,第 10 章.全书由李俊昌及熊秉衡教授统稿.

由于作者水平有限,书中不足及疏漏之处敬请读者指正.

李俊昌 熊秉衡

2010 年 6 月

目 录

第二版前言

第一版前言

第 1 章 数学预备知识	1
1.1 常用的几种非初等函数	1
1.2 二维傅里叶变换	9
1.3 线性系统	12
1.4 二维抽样定理	15
习题 1	18
参考文献	18
第 2 章 标量衍射理论	19
2.1 光波的复函数表示	19
2.2 标量衍射理论	23
2.3 夫琅禾费衍射的计算实例	30
2.4 菲涅耳衍射积分的计算及应用实例	34
2.5 柯林斯公式	40
习题 2	47
参考文献	49
第 3 章 衍射积分的数值计算及应用	51
3.1 离散傅里叶变换与傅里叶变换的关系	51
3.2 菲涅耳衍射积分的快速傅里叶变换计算	55
*3.3 经典衍射公式及其快速傅里叶变换计算	66
*3.4 柯林斯公式的计算	75
*3.5 衍射数值计算的应用实例	84
习题 3	94
参考文献	95
第 4 章 衍射受限成像	96
4.1 透镜的光学变换性质	96
4.2 衍射受限系统的相干光照明成像	102
4.3 衍射受限系统的非相干照明成像	111
4.4 相干成像与非相干成像的比较	124
习题 4	132
参考文献	133

第 5 章 光学信息处理	134
5.1 阿贝二次成像理论和阿贝-波特实验	134
5.2 空间频率滤波系统和空间滤波器	143
5.3 空间滤波器的应用实例	148
5.4 相干光信息处理系统	151
5.5 非相干光信息处理系统	160
习题 5	162
参考文献	162
第 6 章 部分相干理论	163
6.1 引言	163
6.2 可见度	165
6.3 互相干函数及相干度	170
6.4 时间相干和空间相干	173
6.5 恒星干涉仪	176
习题 6	177
参考文献	178
第 7 章 全息照相	179
7.1 全息照相的基本原理	179
7.2 几种其他主要类型的全息图	211
7.3 全息照相的应用概况	224
习题 7	228
参考文献	229
第 8 章 全息干涉计量	231
8.1 单曝光法或实时全息法	231
8.2 二次曝光全息干涉计量或双曝光法	239
8.3 时间平均法原理及其应用	253
8.4 全息系统的智能化、小型化、多功能化	256
习题 8	259
参考文献	261
第 9 章 数字全息	263
9.1 离轴数字全息及波前的 1-FFT 重建	263
9.2 1-FFT 方法重建波前的噪声研究及消除	270
9.3 基于虚拟数字全息图的波前重建	273
9.4 彩色数字全息	276
*9.5 数字全息在光学检测中的应用	280
习题 9	298
参考文献	299
第 10 章 光波分复用中的基本器件与网络	302
10.1 光波在光纤中的传播	302

10.2 光纤布拉格光栅	313
10.3 光波在波导中的传播	315
10.4 平面阵列波导光栅	327
10.5 光信号的发送、接收和放大	327
10.6 光波分复用网络	333
习题 10	335
参考文献	335
附录 A 柯林斯公式推导	337
附录 B 散射光全息干涉图像的理论模型	343
附录 C 本书提供的 MATLAB 程序	348
附录 D 如何在 MATLAB7.X 环境下运行 M 文件	349
附录 E 如何下载本书光盘内容及光盘文件的使用	353
全书习题参考答案	354

第 1 章 数学预备知识

光是电磁波，光波的传播满足麦克斯韦方程。基于麦克斯韦方程并利用标量衍射理论研究光信息的产生、传播、获取、处理及应用，是信息光学的基本研究内容。在标量衍射的理论框架下，光波在介质空间及不同形式光学系统中的传播可以视为二维信息通过线性系统的过程。由于载有信息的光波场的表述涉及一些重要的数学函数，光波通过线性系统时受到的变换涉及基本的数学工具——傅里叶变换，光信息的数字化处理还涉及对光波场的合理离散及取样问题。因此，作为学习信息光学的数学预备知识，本章对常用的数学函数、二维傅里叶变换、二维线性系统以及取样定理进行介绍。

1.1 常用的几种非初等函数

1.1.1 矩形函数

宽度为 a ($a > 0$)、中心在 x_0 的一维矩形函数定义为

$$\text{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right) = \begin{cases} 1, & \left|\frac{x-x_0}{a}\right| \leq 1/2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1-1-1)$$

图 1-1-1 是该函数的图像。

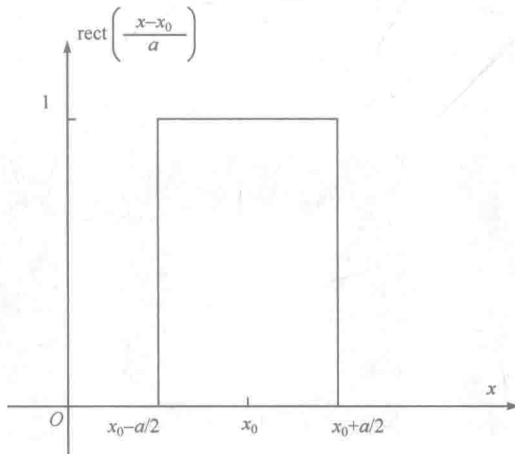


图 1-1-1 中心在 x_0 、宽度为 a 的一维矩形函数

当用 x 代表时间变量时，可以用一维矩形函数来描述照相机的快门，这时式(1-1-1)中的 a 就表示曝光时间；当用 x 代表空间变量时，可以用该函数表示无限大不透明屏上一个宽度为 a 的狭缝的透过率。

二维矩形函数可用以两个一维矩形函数的乘积表示:

$$\text{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)\text{rect}\left(\frac{y-y_0}{b}\right), \quad a>0, b>0 \quad (1-1-2)$$

它表示 xOy 平面上以点 (x_0, y_0) 为中心的 $a \times b$ 矩形区域内矩形函数取值为 1, 其他地方处处等于 0, 如图 1-1-2 所示为中心在原点、宽度为 $a \times b$ 的二维矩形函数示意图.

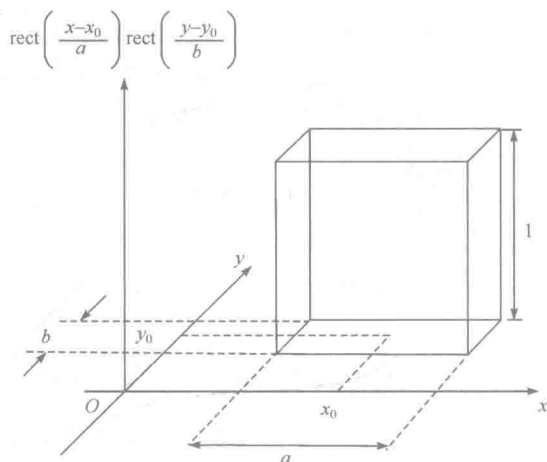


图 1-1-2 中心在原点、宽度为 $a \times b$ 的矩形函数

二维矩形函数可用来描述无限大不透明屏上矩形孔的透过率, 用它与某函数(或图像)相乘, 可以截取矩形孔范围内的函数值, 其他位置处赋予零值. 图 1-1-3 描述了一幅二维图像的截取过程. 图 1-1-3(b)中用黑色代表零, 白色代表 1, 图 1-1-3(c)给出截取结果. 三幅图像的数学描述可以分别写为

图 1-1-3(a):

$$I(x, y)$$

图 1-1-3(b):

$$\text{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)\text{rect}\left(\frac{y-y_0}{b}\right)$$

图 1-1-3(c):

$$I(x, y) \times \text{rect}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)\text{rect}\left(\frac{y-y_0}{b}\right)$$

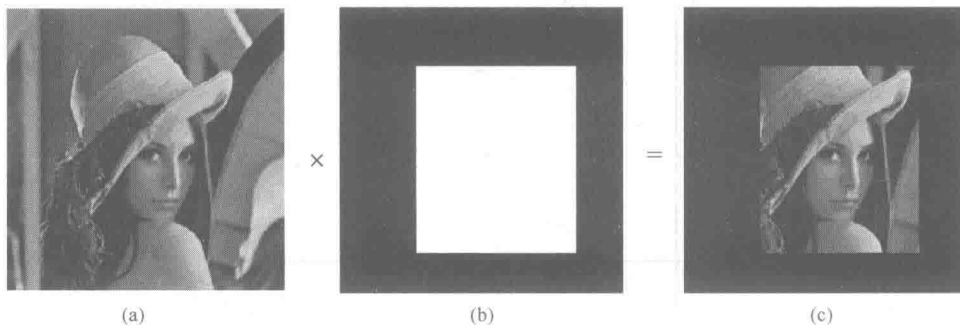


图 1-1-3 矩形函数截取二维图像的过程

1.1.2 sinc 函数

一维 sinc 函数定义为

$$\operatorname{sinc}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{\sin(\pi x/a)}{\pi x/a}, \quad a > 0 \quad (1-1-3)$$

该函数在原点处有最大值 1, 而在 $x = \pm na (n=1,2,3,\dots)$ 处的值等于 0, 其函数图形如图 1-1-4 所示, 原点两侧第一级零点之间的宽度(称为 sinc 函数的主瓣宽度)为 $2a$, 并且它的面积(包括正波瓣和负波瓣)刚好等于 a 。

二维 sinc 函数定义为

$$\operatorname{sinc}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) = \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{a}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{y}{b}\right), \quad a > 0, b > 0 \quad (1-1-4)$$

该函数是两个一维 sinc 函数的乘积, 零点位置在 $(\pm ma, \pm nb)$, m, n 均为正整数。

对光波衍射研究中将看到, 一维 sinc 函数表示单缝(即一维矩形函数)的夫琅禾费衍射的振幅分布, 二维 sinc 函数可以表示矩孔(即二维矩形函数)的夫琅禾费衍射的振幅分布, 其平方则表示衍射的光强分布图样。图 1-1-5(a)、(b)分别给出二维 sinc 函数平方的三维曲线及二维强度分布图像, 这两幅图像是用书附 MATLAB 语言编写的程序 LXM1.m 绘出的。由于使用 MATLAB 语言编程不但能绘出不同形式的函数图像, 而且能方便地进行科学计算, 本书的后续章节将根据教学内容的需要, 使用 MATLAB 进行信息光学物理过程的计算及仿真显示。

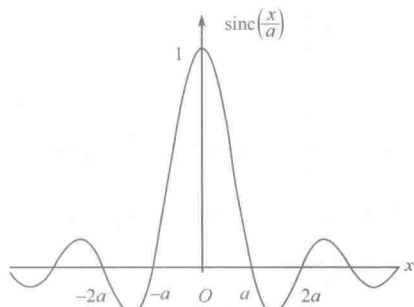
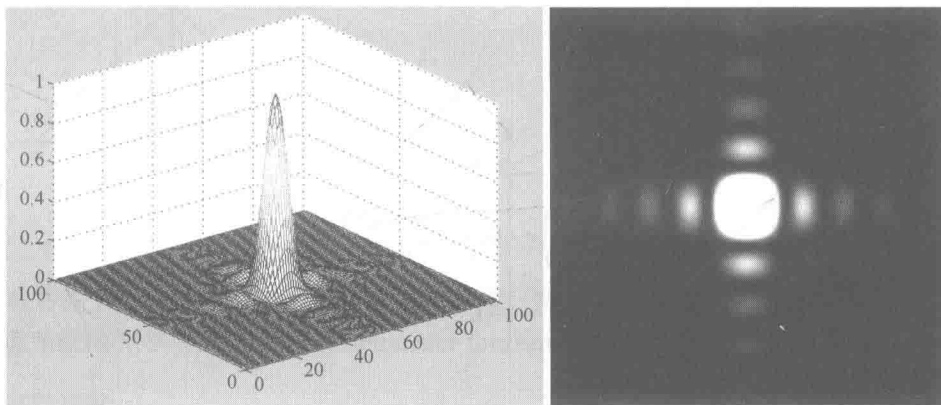


图 1-1-4 一维 sinc 函数图像



(a) 三维曲线

(b) 二维强度分布图像

图 1-1-5 中心在(50,50)、瓣宽 20×20 的二维 sinc 函数平方值分布图像

1.1.3 阶跃函数

一维阶跃函数定义为

$$\operatorname{step}\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} 0, & \frac{x}{a} < 0 \\ \frac{1}{2}, & \frac{x}{a} = 0 \\ 1, & \frac{x}{a} > 0 \end{cases} \quad (1-1-5)$$

其函数图形如图 1-1-6 所示.

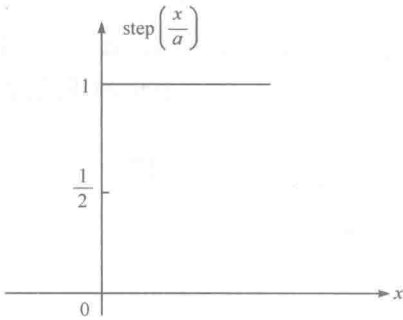


图 1-1-6 中心在原点的一维阶跃函数
通常无关紧要.

二维阶跃函数定义为

$$f(x, y) = \text{step}\left(\frac{x}{a}\right) \tag{1-1-6}$$

二维阶跃函数在 y 方向上等于常数, 而在 x 方向上等同于一维阶跃函数, 即相当于一维阶跃函数在 y 方向上延伸. 参照图 1-1-3, 这种函数可以用来描述光学直边(或刀口)的透过率.

1.1.4 符号函数

一维符号函数定义为

$$\text{sgn}\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} +1, & \frac{x}{a} > 0 \\ 0, & \frac{x}{a} = 0 \\ -1, & \frac{x}{a} < 0 \end{cases} \tag{1-1-7}$$

其函数图形如图 1-1-7 所示.

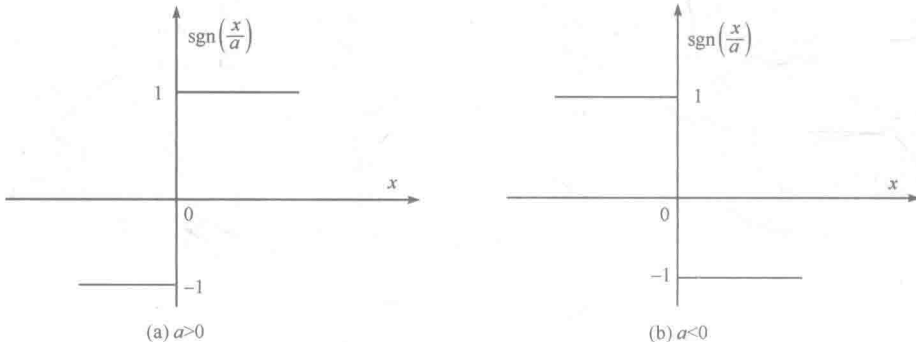


图 1-1-7 $a > 0$ 及 $a < 0$ 时中心在原点的符号函数示意图

符号函数 $\text{sgn}(x)$ 与某函数相乘, 可使被乘的函数以某点为界, 此点一侧的函数值极性发生翻转. 在实际应用中, 如可用于表示某光学孔径的一半嵌有 π 相位板, 与另一半的相位相

反, 符号函数描述该光学孔径的负振幅透过率.

1.1.5 三角函数

一维三角函数定义为

$$\Lambda\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{a}, & \frac{|x|}{a} < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad a > 0 \quad (1-1-8)$$

该函数表示底边宽度为 $2a$ 、高度为 1 的三角形, 函数图形如图 1-1-8 所示.

二维三角形函数定义为

$$\Lambda\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) = \Lambda\left(\frac{x}{a}\right)\Lambda\left(\frac{y}{b}\right) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|x|}{a}\right)\left(1 - \frac{|y|}{b}\right), & \frac{|x|}{a}, \frac{|y|}{b} < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1-1-9)$$

式中, $a > 0, b > 0$. 该函数可视为两个一维三角函数的乘积, 其函数图形如图 1-1-9 所示.

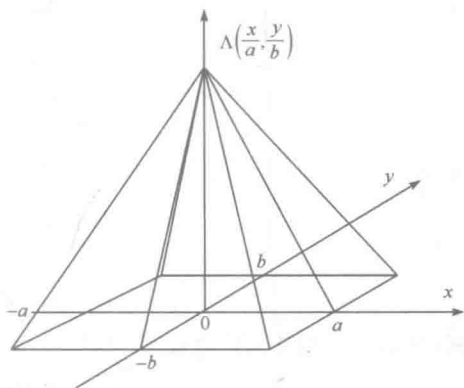
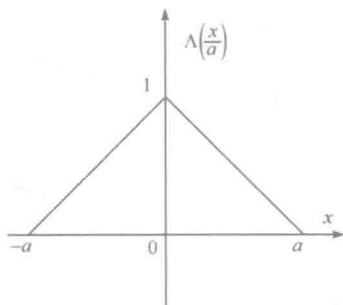


图 1-1-8 中心在原点、宽度为 a 的一维三角函数

图 1-1-9 中心在原点、宽度为 $a \times a$ 的二维三角函数

在本书关于光学成像的讨论中将看到, 二维三角形函数可用来表示一个光瞳为矩形的非相干成像系统的光学传递函数(optical transfer function, OTF).

1.1.6 高斯函数

一维高斯函数定义为

$$\text{Gauss}\left(\frac{x}{a}\right) = \exp\left(-\pi \frac{x^2}{a^2}\right) = \exp\left(-\frac{x^2}{\left(\frac{a}{\sqrt{\pi}}\right)^2}\right) \quad (1-1-10)$$

式中, $a > 0$, 函数图形如图 1-1-10 所示, 通常将 $a/\sqrt{\pi}$ 称为高斯函数半径. 当 $x = a/\sqrt{\pi}$ 时, 函数值变为 $1/e$.

二维高斯函数定义为

$$\text{Gauss}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) = \exp\left(-\pi \frac{x^2}{a^2} - \pi \frac{y^2}{b^2}\right), \quad a > 0, b > 0 \quad (1-1-11)$$

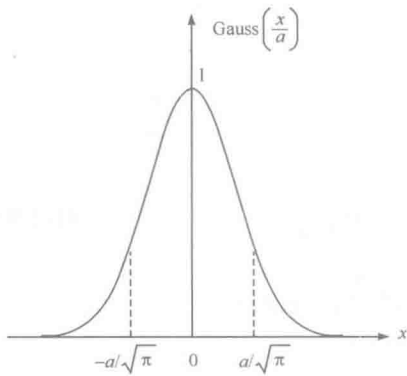


图 1-1-10 中心在原点的一维高斯函数

通常用二维高斯函数表述基横模激光束在垂直于传播方向的振幅分布. 由于光波场强度与振幅平方成正比, 功率为 P_0 、半径为 w 的高斯光束的强度分布为

$$I_{\text{Gauss}}(x, y) = \frac{2P_0}{\pi w^2} \exp\left(-2\frac{x^2 + y^2}{w^2}\right) \quad (1-1-12)$$

式中, $\frac{2P_0}{\pi w^2}$ 为归一化因子. 容易证明, 上述表达式在 xy 平面的积分值为 P_0 .

高斯函数是光滑函数, 且各阶导数都是连续的. 在傅里叶变换研究中将看到, 高斯函数的傅里叶变换也是高斯函数.

1.1.7 圆域函数

圆域函数通常用于极坐标中涉及圆孔衍射问题的计算, 在极坐标及直角坐标系中的定义分别如下:

$$\text{circ}(r) = \text{circ}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = \begin{cases} 1, & r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \\ 0, & r = \sqrt{x^2 + y^2} > 1 \end{cases} \quad (1-1-13)$$

不透明屏 xy 上中心在 (x_0, y_0) 、半径为 a 的圆孔的透过率可以表示为

$$\text{circ}\left(\frac{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}{a}\right)$$

圆域函数的图像绘于图 1-1-11.

1.1.8 狄拉克 δ 函数

1. δ 函数的定义

狄拉克 δ 函数(简称 δ 函数)用于描述脉冲这一类物理现象, 如单位能量的瞬间电脉冲可用时间为变量的 $\delta(t)$ 来描述; 空间变量的 δ 函数可以表述单位电量点电荷的电流密度以及单位质量质点的质量密度. 在信息光学研究中, 空间变量的 δ 函数通常用于表示单位光通量的点光源. 这些物理量的特点在数学上可抽象为在脉冲所在点之外其值为零, 而包含脉冲所在点在内的任意范围的积分等于 1. 数学上将具有这种性质的函数定义为 δ 函数. 定义 δ 函数的数学表达式有多种, 以下导出其中一种表达式.

分析函数序列 $f_N(x) = N\text{rect}(Nx)$ ($N=1,2,3,\dots$) 当 N 逐渐增大时的情况. 图 1-1-12 给出了 $N=1,2,4$ 时的函数图像. 由图可见, 当 N 逐渐变大时, 函数不为零的范围逐渐变小, 而在此范围内的函数值却逐渐变大. 不难想象, 当 N 增大至无穷时, 函数的值将也增到无穷大, 但无论如何, 函数曲线与横轴围成的面积始终为 1. 于是, 利用矩形函数可以将 δ 函数定义为

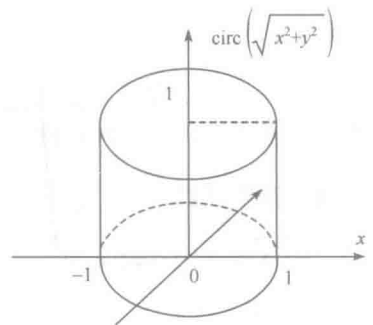
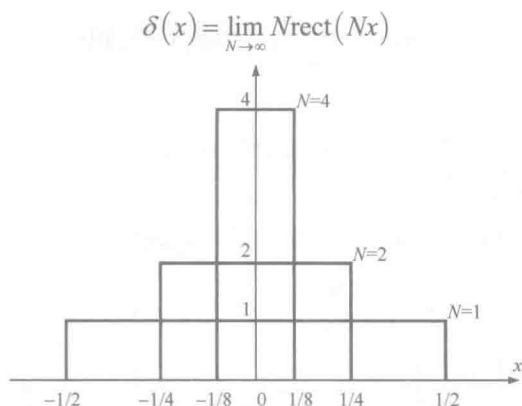


图 1-1-11 圆域函数的图像

图 1-1-12 $N=1,2,4$ 时 $f_N(x) = N \text{rect}(Nx)$ 的函数图像

利用类似的方法, 还可以得出 δ 函数的如下表达式:

$$\delta(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} N \exp(-N^2 \pi x^2)$$

$$\delta(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} N \text{sinc}(Nx)$$

二维 δ 函数是一维 δ 函数的简单推广, 下面列举几种常用的定义:

$$\delta(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^2 \text{rect}(Nx) \text{rect}(Ny) \quad (1-1-14)$$

$$\delta(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^2 \exp[-N^2 \pi(x^2 + y^2)] \quad (1-1-15)$$

$$\delta(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^2 \text{sinc}(Nx) \text{sinc}(Ny) \quad (1-1-16)$$

$$\delta(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^2}{\pi} \text{circ}(N\sqrt{x^2 + y^2}) \quad (1-1-17)$$

$$\delta(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} N \frac{J_1(2\pi N\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (1-1-18)$$

以上最后一个表达式中 J_1 为一阶贝塞尔函数. 实际应用中, δ 函数的某种定义可能会比另一种定义使用起来更方便些, 因此可以根据情况选择相应的表达式. 按照同样的原则, 我们可以对三维以至于多维空间的 δ 函数作出恰当的定义.

2. δ 函数的主要性质

1) δ 函数的坐标缩放性质

若 a 为任意常数, 则

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (1-1-19)$$

2) δ 函数的相乘性质

若 $\varphi(x)$ 在 x_0 点连续, 则

$$\varphi(x) \delta(x - x_0) = \varphi(x_0) \delta(x - x_0) \quad (1-1-20)$$

3) δ 函数的卷积性质

定义如下表达式为 δ 函数与函数 φ 的卷积:

$$\delta(x) * \varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_0) \varphi(x - x_0) dx_0$$

则有

$$\delta(x) * \varphi(x) = \varphi(x) * \delta(x) = \varphi(x) \quad (1-1-21)$$

4) δ 函数的筛选性质

δ 函数的筛选性质在进行分析和计算中非常有用, 仅以一维 δ 函数为例介绍其性质, 并给出相应证明.

若 $\varphi(x)$ 在 x 点连续, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \varphi(x) dx = \varphi(x_0) \quad (1-1-22)$$

证明 令 $x - x_0 = x'$, 式(1-1-22)左边可重写为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x + x_0) dx = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \delta(x) \varphi(x + x_0) dx + \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x) \varphi(x + x_0) dx + \int_{+\varepsilon}^{\infty} \delta(x) \varphi(x + x_0) dx$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 上式右端第一、三项仍然为零, 于是

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \varphi(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x) \varphi(x + x_0) dx = \varphi(x_0) \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x) dx = \varphi(x_0)$$

对于二维以上的 δ 函数, 通过类似的讨论也可以证明其具有相似的筛选特性.

1.1.9 梳状函数

δ 函数可以用来描述线光源或点光源, 若在同一直线排列无穷多个等距离的这样的点光源, 则可以用该直线上无穷多个等距离的 δ 函数之和来表示. 同样, 若在一个平面上纵横排列着无穷多个各自等距离的点光源, 则可用该平面上无穷多个等间隔排列的 δ 函数之和来表示. 为了描述这种情况, 引入梳状函数.

梳状函数是一等距离排列的 δ 函数, 由于在描述光栅这一类光学器件的透过率及将连续函数离散时很方便, 一维梳状函数定义如下:

$$\text{comb}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1-1-23)$$

图 1-1-13 给出了 $\delta(x)$ 函数及梳状函数 $\text{comb}(x)$ 的图像.

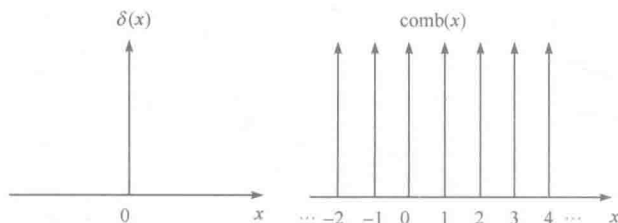


图 1-1-13 $\delta(x)$ 函数及梳状函数 $\text{comb}(x)$ 的图像

二维梳状函数可基于一维定义表示为

$$\text{comb}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(y - m), \quad n, m = 1, 2, 3, \dots \quad (1-1-24)$$

梳状函数与普通函数的乘积, 可以视为对该函数进行等间距的抽样, 只取出梳状函数有