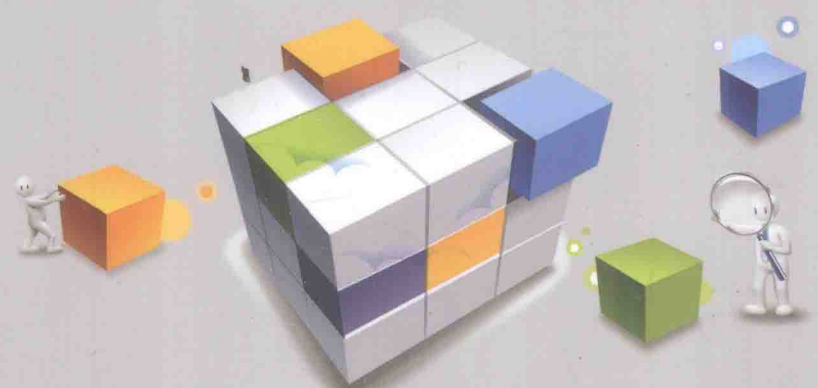
高等职业教育“十二五”规划教材
高职高专基础课程规划教材

经济数学基础与应用模型

JINGJI SHUXUE JICHU YU YINGYONGMOXING

白 健 胡桂萍 主编



天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

高等职业教育“十二五”规划教材

高职高专基础课程规划教材

经济数学基础与应用模型

主　编　白　健　胡桂萍

副主编　温　静　左静贤　赵彦艳

天津大学出版社

内容提要

本书是贯彻教育部教职成[2011]12 号文件关于高职院校要以“培养高端应用型专门人才”为最新目标的精神，根据教育部新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，结合作者多年的高职数学教学经验和课程改革成果编写而成的.

全书共分 6 章，主要内容包括：初等函数、函数与极限、一元函数微分学及其应用、一元函数积分学及其应用、线性代数初步、概率论初步等. 本书体现职业性，兼顾系统性；注重基础性，体现高等性；融入数学文化，提高教育性. 每一部分内容都安排了经济应用模型，以结合经管类专业的应用实际. 例题和习题分梯度安排，适合不同层次学生阅读. 提供数字化教学资源，具体可访问高数网 www.gaoshoo.com. 书后附有积分表、常用初等数学公式等.

本书可作为高职高专经管类专业大学一年级上学期高等数学课使用，也可作为专接本复习参考书. 文科类专业也可选用.

图书在版编目（CIP）数据

经济数学基础与应用模型/白健，胡桂萍主编.—
天津：天津大学出版社，2014.5
ISBN 978-7-5618-5074-9

Ⅰ.①经… Ⅱ.①白… ②胡… Ⅲ.①经济数学
Ⅳ.①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 109749 号

出版发行 天津大学出版社
地　　址 天津市卫津路 92 号天津大学内（邮编：300072）
网　　址 http：//publicsh.tju.edu.cn
印　　刷 北京尚品荣华印刷有限公司
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 210mm×260mm
印　　张 17
字　　数 431 千字
版　　次 2014 年 8 第 1 版
印　　次 2014 年 8 月第 1 版
定　　价 34.00 元

前　言

高等数学课程在高职院校经管类专业人才培养方案的实施中具有不可替代的作用.教材建设是课程建设的重中之重.

本书是贯彻教育部教职成〔2011〕12号文件关于高职院校要以“培养高端应用型专门人才”为最新目标的精神，根据教育部新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，结合作者多年的高职数学教学经验和课程改革成果编写而成，供高职高专经管类专业大学一年级学生上学期使用.

本书从高职人才培养需求出发，以“培养高端应用型专门人才”为目标，充分考虑经管类专业实际和未来需求，力求突出以下特色.

1.突出职业性，保持系统性.教材内容在充分考虑为专业课服务的同时，保证数学学科的系统性和逻辑性.每个单元均编排了经济应用模型一节，结合经济活动中的一些实例，用高等数学方法建立数学模型，以使学生能把数学知识和专业结合起来.

2.注重基础性，体现高等性.教材既注重基础性、应用性，也注重知识的深度与广度，为高端人才的成长提供必需的数学支撑.考虑学生提升学历水平需要，紧扣专接本大纲编写.

3.重组内容，优化结构.大幅度调整教材内容，打破以往教材内容的编排体系，充分考虑专业课程的时间安排，以适应专业课教学需求.融入数学文化，提高可读性和教育性.

4.低起点，多层次，合理衔接.充分考虑目前高职院校生源复杂、层次多、基础差的现状，内容编排力求低起点、多层次，叙述力求通俗易懂.标有“ * ”号的内容为选学内容.

5.教材版面采用切口留白处理，以利于不同专业增删教学内容、学生记笔记使用.同时，增加批注内容，对教材的难点进行注解和提示，以进一步阐明问题，供不同层次学生参考.

6.分梯度安排例题、习题.例题分易、中、难三个梯度.习题分A、B两组，A组习题为双基训练，以满足课程的基本功能；B组习题为能力提高训练，注重专业应用和高端人才培养.

7.为培养学生的自主学习能力，每章有学习目标.配套《经济数学基础与应用模型实训》一书，包括知识点归纳与解析、典型方法分析与举例、基本知识实训、基本能力实训和应用能力实训.提供丰富的数字教学资源，具体可访问高数网 www.gaoshoo.com.

本书建议学时数为72学时，不同专业可根据人才培养方案选择模块和教学内容.对于课时较紧张的专业，可将线性代数、概率论初步作为选修课内容.

全书由河北建材职业技术学院白健、胡桂萍规划设计，统稿并定稿，由白健、胡桂萍任主编，

温静、左静贤任、赵彦艳为副主编.写作分工如下:第1章由赵彦艳编写,第2章由胡桂萍编写,第3章由胡桂萍、赵彦艳编写,第4章和附录A、B、H由白健编写,第5章和附录G由左静贤编写,第6章和附录C—F由温静编写.

本书在编写过程中,河北省教学名师朱玉春教授给予了热心的指导,北京德鑫文化有限公司和天津大学出版社给予了大力支持;都小菊、王小薇、王宙、张淑欣、宁秀君等专业课教学专家对教材规划提出了宝贵的建议,在此一并表示衷心的感谢! 在编写过程中,参考了一些书籍,详细书目列于书后,在此谨对这些书籍的作者表示诚挚的谢意!

限于作者水平有限,书中不足之处在所难免,敬请读者批评指正.

编　者
2014.5

目　录

第 1 章　初等函数及其应用模型

问题引入

数学是人类有史以来最早诞生的一门学科,它是人类认识世界、改造世界最基本的动力,数学在物理、化学、医疗、生物以及航天技术等各个领域中的重要性已被人们广泛认识. 随着人们对现代经济理论的深入研究,发现数学对经济理论也有着非常重要的作用. 我们遇到一个经济问题,可以将其分解成几个因素,这些因素又可以分成两大类:一类是原因因素,我们称其为自变量,或称为外生变量、解释变量;另一类就是结果因素,我们称其为因变量,或称内生变量、被解释变量. 然后我们研究自变量和因变量的关系,这就是函数. 如果研究因变量变化与自变量变化的关系,这种关系就是导函数,然而导数在经济分析中叫作边际分析. 对各种经济关系,我们可以利用导数特性和函数特性的关系来定性分析这种关系. 对经济学家来说,对其经济环节进行定量分析是非常必要的,而将数学作为分析工具,不仅可以给企业经营者提供客观、精确的数据,而且在分析的演绎和归纳过程中,可以给企业经营者提供新的思路和视角,这也是数学应用性的具体体现. 因此,在当今国内外,越来越多地应用数学知识,使经济学走向了定量化、精密化和准确化.

函数是经济数学研究的主要对象,它的实质是变量之间的对应关系. 本章在中学数学已有的函数知识基础上,进一步研究函数的概念与性质,为以后的学习奠定必要的基础.

学习目标

(1) 掌握函数的概念及其简单性质,熟练掌握函数定义域的求法.

(2) 熟练掌握基本初等函数的形式及性质,了解初等函数的定义.

(3) 熟练掌握复合函数的分解过程.

(4) 了解简单函数模型的建立.

(5) 熟悉经济学中常用的函数模型.

1.1　函数的概念及简单性质

1.1.1　函数的概念

1. 函数的定义

例 1　某物体以 10m/s 的速度做匀速直线运动,则该物体走过的路程 S 和时间 t 的关系为

$$S=10t \quad (0\leqslant t<+\infty).$$

对变量 t 和 S，当 t 在 $[0,+\infty)$ 内每取定一个数值 t_0，都有唯一确定的 S_0 与之对应，这种 t 与 S 的一对一的对应关系，就是函数概念的实质.

定义 1.1.1 设在同一变化过程中，有两个变量 x 和 y，如果在集合 D 内每取定一个数值 x，按照对应法则 f，都有唯一确定的数值 y 与之对应，则称 y 为定义在 D 上的 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 其中 x 叫作**自变量**，y 叫作**因变量**，D 叫作函数的**定义域**.

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$. 当 x 取遍 D 的各个数值时，则对应的函数值的全体组成的数集 $W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的**值域**.

注意 函数的对应法则 f 也可用 φ、h、g、F 等表示，相应的函数记为 $\varphi(x)$、$h(x)$、$g(x)$、$F(x)$ 等.

2. 函数的定义域

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 若不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用解析式表达的函数，则规定函数的定义域是使解析式有意义的一切实数值.

通常求函数的定义域应注意以下几点：

(1) 当函数是多项式时，定义域为 $(-\infty,+\infty)$；

(2) 分式函数的分母不能为零；

(3) 偶次根式的被开方式必须大于或等于零；

(4) 对数函数的真数必须大于零；

(5) 反正弦函数与反余弦函数的定义域为 $[-1,1]$；

(6) 如果函数表达式中含有上述几种函数，则应取各部分定义域的交集.

注意 定义域的表示方法为集合.

例 2 求下列函数的定义域：

(1) $y=3x^2-2x+3$； (2) $y=\sqrt{x+3}-\dfrac{1}{x^2-1}$；

(3) $y=\dfrac{1}{\ln(1-2x)}$； (4) $y=\sqrt{x^2-4}+\arcsin\dfrac{x}{2}$.

解 (1) 函数 $y=3x^2-2x+3$ 是多项式函数，当 x 取任何实数时，y 都有唯一确定的值与之对应，故所求函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$；

(2) 欲使 $\sqrt{x+3}$ 有意义，需满足 $x+3\geqslant 0$，即 $x\geqslant -3$，欲使 $\dfrac{1}{x^2-1}$ 有意义，需满足 $x^2-1\neq 0$，即 $x\neq\pm 1$，所以函数的定义域为 $[-3,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$；

(3) 欲使 $\dfrac{1}{\ln(1-2x)}$ 有意义，需满足 $1-2x>0$ 且 $\ln(1-2x)\neq 0$，即 $x<\dfrac{1}{2}$ 且 $x\neq 0$，所以函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$；

(4) 欲使 $\sqrt{x^2-4}$ 有意义，需满足 $x^2-4\geqslant 0$，即 $x\geqslant 2$ 或 $x\leqslant -2$，欲使 $\arcsin\dfrac{x}{2}$ 有意义，需

满足 $\left|\frac{x}{2}\right| \leqslant 1$，即 $-2 \leqslant x \leqslant 2$，所以函数的定义域为 $\{x \mid x = \pm 2\}$.

3. 函数的两个要素

定义域 D 与对应法则 f 唯一确定函数 $y=f(x)$，故定义域与对应法则称为**函数的两个要素**. 如果函数的两个要素相同，那么它们是相同的函数，否则就是不同的函数.

例 3　判断下列函数是否是相同的函数：

(1) $y=1$ 与 $y=\frac{x}{x}$；

(2) $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$；

(3) $y=\ln 2x$ 与 $y=\ln 2 \cdot \ln x$.

解　(1) 函数 $y=1$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，函数 $y=\frac{x}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，故不是同一函数；

(2) 两个函数的定义域与对应法则都相同，故是同一函数；

(3) 函数 $y=\ln 2x$ 与 $y=\ln 2 \cdot \ln x$ 的定义域都是 $(0,+\infty)$，但对应法则不同，故不是同一函数.

对数的性质

$\ln ab=\ln a+\ln b$

$\ln \frac{a}{b}=\ln a-\ln b$

4. 函数的表示法

函数的表示法有解析法、图示法以及表格法等.

例 4　设有容积为 10m^3 的无盖圆柱形桶，其底用铜制，侧壁用铁制. 已知铜价为铁价的 5 倍，试建立做此桶所需费用与桶的底面半径 r 之间的函数关系.

解　设铁价为 k，铜价为 $5k$，所需费用为 y，桶的容积为 V，桶高为 h.

由容积与底面半径及桶高的关系，有 $V=\pi r^2 h$，则 $h=\frac{V}{\pi r^2}$，侧面面积为

$$2\pi r h=2\pi r \frac{V}{\pi r^2}=\frac{2V}{r},$$

又知 $V=10\text{m}^3$，则侧面面积为 $\frac{20}{r}$，故所需费用与桶的底面半径 r 之间的函数关系为

$$y=\frac{20k}{r}+5\text{k}\pi r^2. \quad (0<r<+\infty)$$

例 5　火车站收取行李费的规定如下：当行李不超过 50kg 时，按基本运费计算，如从上海到某地每千克收 0.20 元；当行李超过 50kg 时，超重部分按每千克 0.30 元收费. 试求上海到该地的行李费 y(元)与行李重量 x(kg)之间的函数关系式，并画出该函数的图像.

解　当 $x\in[0,50]$ 时，$y=0.2x$；

当 $x\in(50,+\infty)$ 时，$y=0.2\times 50+0.3(x-50)=0.3x-5$.

所求函数 $y=\begin{cases} 0.2x, & 0\leqslant x\leqslant 50, \\ 0.3x-5, & x>50. \end{cases}$

函数图像如图 1-1.

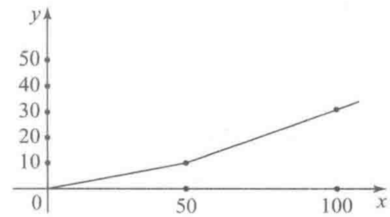


图 1-1

5. 分段函数

定义 1.1.2 在自变量的不同变化范围内，对应法则用不同式子来表示的函数，叫作**分段函数**.

例 6 设有分段函数

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & -1<x\leqslant 0, \\ x^2, & 0<x\leqslant 1, \\ 3-x, & 1<x\leqslant 2. \end{cases}$$

(1) 画出函数的图像；

(2) 求此函数的定义域；

(3) 求 $f(-\frac{1}{2})$，$f(\frac{1}{2})$，$f(\frac{3}{2})$的值.

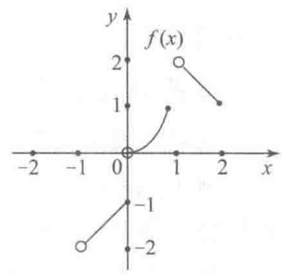


图 1-2

解 (1) 函数图像如图 1-2 所示；

(2) 函数的定义域为 $(-1,2]$；

(3) $f(-\frac{1}{2})=-\frac{3}{2}$，$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$，$f(\frac{3}{2})=\frac{3}{2}$.

注意 分段函数的定义域是各段定义域的并集.

常见互为反函数的函数有：

(1) $y=a^x$，$y=\log_a x$

(2) 三角函数与反三角函数

$y=\sin x$，$y=\arcsin x$；

$y=\cos x$，$y=\arccos x$；

$y=\tan x$，$y=\arctan x$；

$y=\cot x$，$y=\text{arccot}\, x$.

1.1.2 反函数

定义 1.1.3 设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，值域为 W. 如果对于任一数值 $y\in W$，在 D 中都有唯一确定的值 x，使 $f(x)=y$，则得到一个以 y 为自变量，x 为因变量的新的函数，这个新的函数叫作函数 $y=f(x)$的**反函数**，记作

$$x=f^{-1}(y),$$

其定义域为 W，值域为 D.

说明 由于人们习惯于用 x 表示自变量，而用 y 表示因变量，因此我们将函数 $y=f(x)$的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 用 $y=f^{-1}(x)$表示. $y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称，如图 1-3 所示.

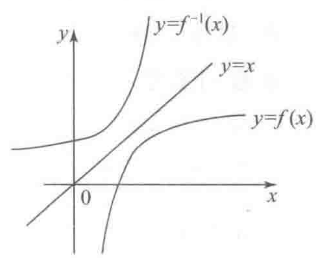


图 1-3

例 7 求下列函数的反函数：

(1) $y=3x$； (2) $y=2^x+1$.

解 (1) 由 $y=3x$ 得 $x=\frac{y}{3}$，因此函数 $y=3x$ 的反函

数为 $y=\frac{x}{3}$；

(2) 由 $y=2^x+1$ 得 $2^x=y-1$，即 $x=\log_2(y-1)$，因此函数 $y=2^x+1$ 的反函数为 $y=\log_2(x-1)$.

1.1.3　函数的简单性质

设函数 $f(x)$ 在某区间 I 内有定义.

函数的四个性质的两个要点：
(1)定义；
(2)具有该性质的图像特点.

1. 奇偶性

设 I 为关于原点对称的区间，若对于任意的 $x\in I$，都有 $f(-x)=f(x)$，则 $f(x)$ 叫作**偶函数**；若 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)$ 叫作**奇函数**. 奇函数的图像关于原点对称，如图 1-4 所示；偶函数的图像关于 y 轴对称，如图 1-5 所示.

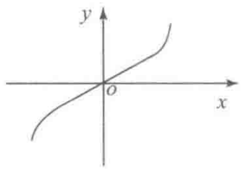


图 1-4

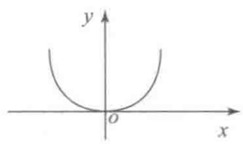


图 1-5

例如，$y=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是奇函数，$y=x^2+1$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是偶函数. 有的函数既不是奇函数也不是偶函数，如 $y=\sin x+\cos x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是非奇非偶函数.

2. 单调性

若对区间 I 内任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加，区间 I 称为单调增区间；若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上单调减少，区间 I 称为单调减区间. 单调增区间或单调减区间统称为单调区间. 在单调增区间内，函数图像随着 x 的增大而上升，如图 1-6 所示；在单调减区间内，函数图像随着 x 的增大而下降，如图 1-7 所示.

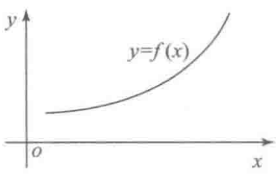


图 1-6

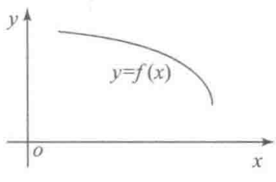


图 1-7

例如，$y=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 内是单调增加的，在区间 $(-\infty,0]$ 内是单调减少的，在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $y=x^2$ 不是单调函数.

3. 周期性

若存在不为零的数 T，使得对于任意的 $x\in I$，都有 $x+T\in I$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，其中 T 叫作函数周期，通常周期函数的周期是指它的最小正周期.

例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；$y=\tan x$，$y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

注意 周期函数图像特征：在相邻的两个长度为 T 的区间内图像完全一样.

4. 有界性

若存在一个正数 M，使得在区间 I 上恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 I 上是**有界的**；否则称 $f(x)$ 在 I 上是**无界**的.

例如，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内无界，但在区间 $(1,2)$ 内有界.

注意 (1) 有界指的是既有上界又有下界.

(2) 有界函数图像特点：曲线在两条平行于 x 轴的直线所夹的带形区域内.

习题 1.1

A 组

1. 判断下列各组函数是否相同，并说明理由：

(1) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$； (2) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$；

(3) $f(x)=\lg x^5, g(x)=5\lg x$； (4) $f(x)=\sin x, g(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\arcsin(x-1)$； (2) $y=\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{1-x^2}$；

(3) $y=\ln x^2$； (4) $y=x^5+3x^3+x+4$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\leqslant -1, \\ 2x+1, & x>-1. \end{cases}$

求：(1) $f(x)$ 的定义域；(2) $f(-2)$，$f(-1)$，$f(0)$ 的值.

B 组

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\lg \sin x$； (2) $y=\dfrac{\ln(2-x)}{\sqrt{1-x^2}}$；

(3) $y=\arccos(x-2)+\sqrt[3]{x-2}$； (4) $y=\sqrt{1-x}+\arccos\dfrac{x+1}{2}$.

2. 设 $f(t)=2t^2+\dfrac{2}{t^2}+\dfrac{5}{t}+5t$，证明 $f(t)=f(\dfrac{1}{t})$.

3. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[1,3]$，求函数 $f(1+x^2)$ 的定义域.

1.2 初等函数

1.2.1 基本初等函数

定义 1.2.1 幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为**基本初等函数**.

1. 幂函数 $y=x^{\mu}$(μ 为常数)

$\mu>0$ 时,函数在第一象限单调递增,如图 1-8 所示.

$\mu<0$ 时,函数在第一象限单调递减,如图 1-9 所示.

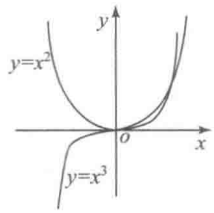


图 1-8

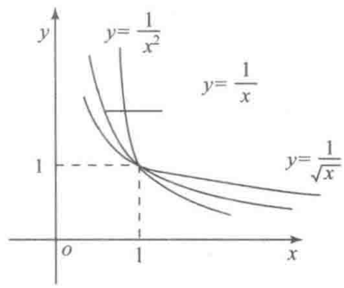


图 1-9

2. 指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$

$D:x\in(-\infty,+\infty)$. $W:y\in(0,+\infty)$.

函数图像恒过点(0,1);

当 $a>1$ 时,函数单调递增;

当 $0<a<1$ 时,函数单调递减.

如图 1-10 所示.

3. 对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$

$D:x\in(0,+\infty)$. $W:y\in(-\infty,+\infty)$.

函数图像恒过点(1,0);

当 $a>1$ 时,函数单调递增;

当 $0<a<1$ 时,函数单调递减.

如图 1-11 所示.

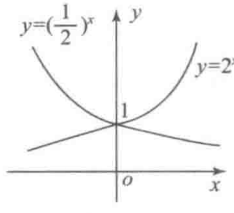


图 1-10

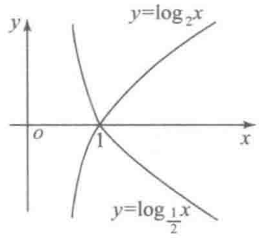


图 1-11

4. 三角函数

1）正弦函数 $y=\sin x$

D：$x\in(-\infty,+\infty)$. W：$[-1,+1]$.

奇函数，周期为 2π，有界.

在$\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$单调递增；

在$\left[2k\pi+\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$单调递减.

如图 1-12 所示.

2）余弦函数 $y=\cos x$

D：$x\in(-\infty,+\infty)$. W：$[-1,+1]$.

偶函数，周期为 2π，有界.

在$[2k\pi,2k\pi+\pi](k\in\mathbf{Z})$单调递减；

在$[2k\pi-\pi,2k\pi](k\in\mathbf{Z})$单调递增.

如图 1-13 所示.

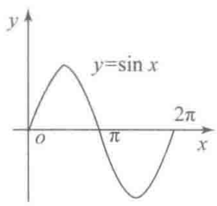


图 1-12

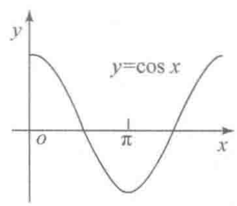


图 1-13

3）正切函数 $y=\tan x$

D：$\left\{x\,\middle|\,x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right\}$. W：$y\in(-\infty,+\infty)$.

奇函数，周期为 π，在$\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$

单调递增. 如图 1-14 所示.

4）余切函数 $y=\cot x$

D：$\{x\,|\,x\neq k\pi\}$. W：$y\in(-\infty,+\infty)$.

奇函数，周期为 π，在$(k\pi,(k+1)\pi)(k\in\mathbf{Z})$

单调递减. 如图 1-15 所示.

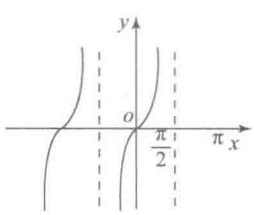


图 1-14

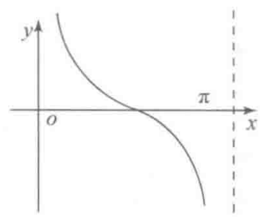


图 1-15