



国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书
丛书主编 王梓坤

Fibonacci-Lucas Sequence and its Application

Fibonacci-Lucas 序列 及其应用

周持中 袁平之 肖果能 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编 王梓坤

Fibonacci- Lucas Sequence and its Application

Fibonacci-Lucas序列 及其应用

周持中 袁平之 肖果能 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书全面系统地研究了斐波那契—卢卡斯序列的理论,主要包括:F-L序列的各种表示方法,有关F-L数的恒等式,同余关系与模周期性,整除性与可除性序列,F-L伪素数,值分布和对模的剩余分布,还专辟两章分别介绍了F-L序列在不定方程中的应用以及在数的表示中的应用,此外还介绍了在素性检验及其他方面的一些应用.

本书可作为从事数论、组合论及相应问题研究的科学工作者、相关专业的大学生和研究生的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

Fibonacci-Lucas 序列及其应用/周持中,袁平之,肖能著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2016.6
(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)

ISBN 978-7-5603-5661-7

I. ①F… II. ①周…②袁…③肖… III. ①lucas 序列—研究 IV. ①O156

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 251394 号

策划编辑	刘培杰	张永芹
责任编辑	张永芹	关虹玲
封面设计	孙茵艾	
出版发行	哈尔滨工业大学出版社	
社 址	哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号	邮编 150006
传 真	0451-86414749	
网 址	http://hitpress.hit.edu.cn	
印 刷	牡丹江邮电印务有限公司	
开 本	787mm×960mm 1/16	印张 38 字数 480 千字
版 次	2016 年 6 月第 1 版	2016 年 6 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978-7-5603-5661-7	
定 价	88.00 元	

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

代

序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍。

你经常去哪里——书店。

你最大的乐趣是什么——读书。

这是友人提出的问题和我的回答。真的，我这一辈子算是和书籍，特别是好书结下了不解之缘。有人说，读书要费那么大的劲，又发不了财，读它做什么？我却至今不悔，不仅不悔，反而情趣越来越浓。想当年，我也曾爱打球，也曾爱下棋，对操琴也有兴趣，还登台伴奏过。但后来却都一一断交，“终身不复鼓琴”。那原因便是怕花费时间，玩物丧志，误了我的大事——求学。这当然过激了一些。剩下来唯有读书一事，自幼至今，无日少废，谓之书痴也可，谓之书橱也可，管它呢，人各有志，不可相强。我的一生大志，便是教书，而当教师，不多读书是不行的。

读好书是一种乐趣，一种情操；一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法，一种和他们展开讨论的方式；一封出席各种社会、体验各种生活、结识各种人物的邀请信；一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券；一股改造自己、丰富自己的强大力量。书籍是全人类有史以来共同创造的财富，是永不枯竭的智慧的源泉。失意时读书，可以使人重整旗鼓；得意时读书，可以使人头脑清醒；疑难时读书，可以得到解答或启示；年轻人读书，可明奋进之道；年老人读书，能知健神之理。浩浩乎！洋洋乎！如临大海，或波涛汹涌，或清风微拂，取之不尽，用之不竭。吾于读书，无疑义矣，三日不读，则头脑麻木，心摇摇无主。

潜能需要激发

我和书籍结缘，开始于一次非常偶然的機會。大概是八九岁吧，家里穷得揭不开锅，我每天从早到晚都要去田园里帮工。一天，偶然从旧木柜阴湿的角落里，找到一本蜡光纸的小书，自然很破了。屋内光线暗淡，又是黄昏时分，只好拿到大门外去看。封面已经脱落，扉页上写的是《薛仁贵征东》。管它呢，且往下看。第一回的标题已忘记，只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新：

日出遥遥一点红，飘飘四海影无踪。

三岁孩童千两价，保主跨海去征东。

第一句指山东，二、三两句分别点出薛仁贵（雪、人贵）。那时识字很少，半看半猜，居然引起了极大的兴趣，同时也教我认识了许多生字。这是我有生以来独立看的第一本书。尝到甜头以后，我便千方百计去找书，向小朋友借，到亲友家找，居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等，樊梨花便成了我心

中的女英雄.我真入迷了.从此,放牛也罢,车水也罢,我总要带一本书,还练出了边走田间小路边读书的本领,读得津津有味,不知人间别有他事.

当我们安静下来回想往事时,往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生.如果不是找到那本《薛仁贵征东》,我的好学心也许激发不起来.我这一生,也许会走另一条路.人的潜能,好比一座汽油库,星星之火,可以使它雷声隆隆、光照天地;但若少了这粒火星,它便会成为一潭死水,永归沉寂.

抄,总抄得起

好不容易上了中学,做完功课还有点时间,便常光顾图书馆.好书借了实在舍不得还,但买不到也买不起,便下决心动手抄书.抄,总抄得起.我抄过林语堂写的《高级英文法》,抄过英文的《英文典大全》,还抄过《孙子兵法》,这本书实在爱得狠了,竟一口气抄了两份.人们虽知抄书之苦,未知抄书之益,抄完毫末俱见,一览无余,胜读十遍.

始于精于一,返于精于博

关于康有为的教学法,他的弟子梁启超说:“康先生之教,专标专精、涉猎二条,无专精则不能成,无涉猎则不能通也.”可见康有为强烈要求学生把专精和广博(即“涉猎”)相结合.

在先后次序上,我认为要从精于一开始.首先应集中精力学好专业,并在专业的科研中做出成绩,然后逐步扩大领域,力求多方面的精.年轻时,我曾精读杜布(J. L. Doob)的《随机过程论》,哈尔莫斯(P. R. Halmos)的《测度论》等世界数学名著,使我终身受益.简言之,即“始于精于一,返于精于博”.正如中国革命一

样,必须先有一块根据地,站稳后再开创几块,最后连成一片。

丰富我文采,澡雪我精神

辛苦了一周,人相当疲劳了,每到星期六,我便到旧书店走走,这已成为生活中的一部分,多年如此。一次,偶然看到一套《纲鉴易知录》,编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材。这部书提纲挈领地讲中国历史,上自盘古氏,直到明末,记事简明,文字古雅,又富于故事性,便把这部书从头到尾读了一遍。从此启发了我读史书的兴趣。

我爱读中国的古典小说,例如《三国演义》和《东周列国志》。我常对人说,这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全。即以近年来极时髦的人质问题(伊朗人质、劫机人质等),这些书中早就有了,秦始皇的父亲便是受害者,堪称“人质之父”。

《庄子》超尘绝俗,不屑于名利。其中“秋水”“解牛”诸篇,诚绝唱也。《论语》束身严谨,勇于面世,“己所不欲,勿施于人”,有长者之风。司马迁的《报任少卿书》,读之我心两伤,既伤少卿,又伤司马;我不知道少卿是否收到这封信,希望有人做点研究。我也爱读鲁迅的杂文,果戈理、梅里美的小说。我非常敬重文天祥、秋瑾的人品,常记他们的诗句:“人生自古谁无死,留取丹心照汗青”“谁言女子非英物,夜夜龙泉壁上鸣”。唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》,丰富我文采,澡雪我精神,其中精粹,实是人间神品。

读了邓拓的《燕山夜话》,既叹服其广博,也使我动了写《科学发现纵横谈》的心。不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信。以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”。

从学生时代起，我就喜读方法论方面的论著。我想，做什么事情都要讲究方法，追求效率、效果和效益，方法好能事半功倍。我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验。我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书，并从他的传记中去寻找答案。文史哲和科学的海洋无边无际，先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵，我衷心感谢他们的恩惠。

读书的另一面

以上我谈了读书的好处，现在要回过头来说说事情的另一面。

读书要选择。世上有各种各样的书：有的不值一看，有的只值看20分钟，有的可看5年，有的可保存一辈子，有的将永远不朽。即使是不朽的超级名著，由于我们的精力与时间有限，也必须加以选择。决不要看坏书，对一般书，要学会速读。

读书要多思考。应该想想，作者说得对吗？完全吗？适合今天的情况吗？从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书，带着问题去读，或偏重某一方面去读。这时我们的思维处于主动寻找的地位，就像猎人追找猎物一样主动，很快就能找到答案，或者发现书中的问题。

有的书浏览即止，有的要读出声来，有的要心头记住，有的要笔头记录。对重要的专业书或名著，要勤做笔记，“不动笔墨不读书”。动脑加动手，手脑并用，既可加深理解，又可避忘备查，特别是自己的灵感，更要及时抓住。清代章学诚在《文史通义》中说：“札记之功必不可少，如不札记，则无穷妙绪如雨珠落大海矣。”

许多大事业、大作品，都是长期积累和短期突击相结合的产物。涓涓不息，将成江河；无此涓涓，何来江河？

爱好读书是许多伟人的共同特性，不仅学者专家如此，一些大政治家、大军事家也如此。曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷，嗜书如命的人。他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关。

王梓坤

◎ 序

1202 年,意大利数学家斐波那契(Fibonacci)在他的重要著作《算盘书》中有这样的问题:由一对兔子开始,一年后可以繁殖成多少对兔子?于是,引出下面的整数序列

$$F_0=0, F_1=1, F_{n+2}=F_{n+1}+F_n (n \geq 0) \quad (1)$$

如今,人们就把序列(1)叫作斐波那契序列,序列(1)中的数叫作斐波那契数.

19 世纪,法国数学家卢卡斯(Lucas)研究了整数序列

$$L_0=2, L_1=1, L_{n+2}=L_{n+1}+L_n (n \geq 0) \quad (2)$$

人们把序列(2)叫作卢卡斯序列.

更一般的,设 α, β 是整系数二次方程

$$x^2 - Px + Q = 0$$

的两个根,其中整数 P, Q 满足 $(P, Q) = 1$ (即 P, Q 互素),由此,可产生整数序列

$$u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} (n \geq 0) \quad (3)$$

和

$$v_n = \alpha^n + \beta^n (n \geq 0) \quad (4)$$

通常,我们又把序列(3)和(4)统称为卢卡斯

序列. 如果取 $P=1, Q=-1$, 则 $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$,

言

$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, 此时, 序列(3)和(4)分别给出序列(1)和(2).

斐波那契序列和卢卡斯序列有许多美妙的数论性质和一些极有意义的应用. 众所周知, 斐波那契数和“优选法”关系密切, 由斐波那契数的性质可以证明: 用欧几里得辗转相除法求两个正整数 m 和 n ($m > n$) 的最大公因数时, 其除法次数不超过 n 的位数的 5 倍等. 正因为如此, 这些序列引起了众多数学家和数学爱好者的浓厚兴趣. 国际上, 这方面的研究和探讨十分活跃. 在美国, 出版了专门刊物:《Fibonacci Quarterly》, 此刊物于 1963 年创刊, 已出 31 卷. 从 1984 年起, 又每隔两年召开一次斐波那契数及其应用的国际会议 (International Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications), 至今已举办了五届, 吸引了世界各地许多数学工作者前往参加.

30 年前, 柯召先生和我曾证明斐波那契平方数仅有 1 和 144. 令人高兴的是, 近几年来, 有一些年轻同志在这方面的研究工作中取得了可喜的成果. 但总的来说, 国内的研究成果不多. 至于这方面的著作, 国内所见更少, 在我的印象中, 最早的一种, 那是在 1954 年, 中国青年出版社出过一本由高彻翻译的小册子:《斐波那契数》(伏洛别也夫著). 鉴于此, 本书的出版, 就显得十分必要了. 作为一本专门介绍斐波那契序列和卢卡斯序列的著作, 本书内容全面、系统、丰富, 并有一定深度, 除了讲述序列的基本性质和定理外, 还介绍了许多近代研究成果, 特别是介绍了序列在素性判定和不定方程中的应用. 可以看出, 作者为此付出了大量

艰辛的劳动.我相信,这本书的出版,将有助于激发广大读者对数学的兴趣,对于有关专业的大学生和研究生,以及从事数论、组合数学、最优设计、计算机科学等方面科研工作的读者,也会有所帮助和启迪.

孙琦

1993 年 12 月于成都

◎ 修订版前言

本书面世已经近 22 年了. 作者撰写此书的初衷已在第一版前言中详述. 然而由于当时的客观条件所限, 该书印数很少, 印刷质量也差. 其影响力离作者的初衷甚远. 作者一直引以为憾. 此次该书修订版能出版, 感到十分欣慰. 我们非常感谢出版基金评审专家对该书的肯定与支持. 我们特别感谢哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室. 刘培杰先生对本书高度关注. 早在 2006 年, 他就将本书第八章全文转载于他主编的《数学奥林匹克与数学文化》一书中. 2013 年, 他针对该书第一版出版中的问题与我们联系修订再版事宜. 在本书最后编辑出版的工作中, 也是做到精益求精.

本书第一版共八章. 第一和第二章阐述斐波那契—卢卡斯序列的概念和 $F-L$ 数的基本组合性质. 第三和第四章阐述 $F-L$ 数的基本数论性质. 第五和第六章阐述 $F-L$ 数进一步的数论性质. 第七和第八章阐述 $F-L$ 数的两个方面的应用, 基本上仍限于组合和数论的范畴. 虽然二十二年来, 国内外对于斐波那契—卢卡斯序列的研究有了很大的进步.

但是其基本理论和基本方法始终是研究的基础. 而本书第一版上述内容在深度和广度方面, 不但包含了必须的基础性的知识和当时一些主要的研究方向, 而且也包含了当时一些比较前沿的结果. 我们在书中阐述的一些理论和方法, 至今仍是行之有效的. 鉴于此, 本书这一版基本上保持了原貌. 主要在两个方面做了少量的修改. 一是对于发现的疏漏、不妥或错误之处进行了改正; 二是在不影响整体编排和前后引用关系的前提下, 对某些内容进行了修改或补充. 我们觉得, 这样做还是能够满足大多数读者的需要的.

增补方面重在基础. 因为基本组合性质可以说是基础中的基础, 所以增补最多的内容是在第二章最后增加了“关于二阶 $F-L$ 数的积与幂的恒等式的一般方法”一节. 因为 $F-L$ 恒等式是 $F-L$ 数其他性质的基础, 而二阶 $F-L$ 数的积与幂的恒等式是比较重要的方面. 此次对这一主题从一般理论和方法上进行了探讨, 解决了一些原来没有解决的问题. 其中有些结果是笔者最新的心得.

我们希望, 该书修订出版以后, 能够不断扩大影响, 能够给予学习、研究和应用斐波那契—卢卡斯序列的人们以一定的帮助. 这样我们也就心满意足了.

作者

2015 年 12 月

◎ 前言

言

常系数线性齐次递归序列,在组合学中是作为一种组合计数的工具被研究的.然而,它的许多美妙的数论性质早已引起人们的注意.在许多场合(特别是在作为数论研究对象的场合),这种序列常与斐波那契或卢卡斯的名字联系起来,盖因这种序列渊源于1202年意大利数学家斐波那契所提的有趣的“兔子问题”,而到19世纪,法国数学家卢卡斯系统地研究了两类整数序列的数论性质,它们属于二阶常系数线性齐次递归序列.进入20世纪以来,特别是60年代以来,人们对这种序列的兴趣迅速增长,以至这种序列已逐步形成数论中的一个专题.随着研究工作的进展,斐波那契和卢卡斯的名字也逐步与高阶的或非整数的线性递增序列挂上了钩.基于上述原因,本书统一称各种常系数线性齐次递归序列为斐波那契—卢卡斯序列,简称F-L序列,称序列中每一项为一个F-L数.

F-L序列自问世以来,不断显示出它在理论上和应用上的重要作用.今天,F-L序列几乎渗透到了数学的各个分支,如数论、代数、组合与图论、计算机科学、微分、差分方程、

数值分析、运筹学、概率统计、函数论、几何学等.此外,在生物学、物理学、化学以及电力工程等方面,F-L 数也有许多用途.这里特别指出,从数论的角度对 F-L 数进行研究,进展较快,这方面的成果也颇多.卢卡斯和莱梅(Lehmer)先后利用 F-L 数给出了梅森(Mersenne)数 $2^p - 1$ 为素数的判据.F-L 数的一些性质被用于大整数分解和求解不定方程.对 F-L 数的数型研究,解决了某些高次不定方程的求解问题.1970 年,俄罗斯数学家马季亚谢维奇(Matijasevič)运用斐波那契数的整除性成功地解决了著名的希尔伯特(Hilbert)第十问题.数的 F-L 表示为 F-L 数的应用进一步开辟了途径.近些年来,对 F-L 伪素数的研究成了计算数论中一个非常活跃的课题,这在素性检验和现代密码学等方面均有其应用.

国际上对于 F-L 序列的研究正方兴未艾,研究工作者的队伍越来越大,发表论文的数量逐年增多,问题的深度和难度亦日新月异.有两件大事特别引人注目,一件是 1963 年,Hoggatt 和他的同行们在美国创立了斐波那契协会并开始出版斐波那契季刊(Fibonacci Quarterly).另一件是自 1984 年以来召开了五次斐波那契数及其应用的国际会议并出版了论文集.所有这些,既显示了各国学者们对研究 F-L 序列的这一课题的极大热情,又促进了对这一课题研究范围的扩大和研究工作的深入.

在我国,柯召先生和孙琦先生对 F-L 序列的研究做出出色的工作,徐利治先生的研究工作中也涉及过 F-L 序列.近年来,对 F-L 序列感兴趣的人越来越多,关于 F-

L 序列的研究论文和普及读物也常见于各国层次的书刊,但作者认为,总的来说我国对 F-L 序列的研究还跟不上国际上蓬勃发展的形势.

作者多年来对 F-L 序列的研究颇感兴趣.我们不仅十分关注国际上研究工作的进展,并且对其中若干问题的研究亦有所得.目前国内这方面的参考资料很少,一些对 F-L 序列感兴趣者不了解对 F-L 序列研究的主要内容和进展情况,研究工作存在一定困难或走了弯路.作者有感于此,遂萌生了为对 F-L 序列感兴趣者和有志于 F-L 序列的研究者提供一本专著的想法.这就是本书的缘起.我们试图在本书中全面系统地介绍对 F-L 序列研究的主要课题,概括国内外的新近成果,其中也包括我们自己的成果,并反映国际上的研究动态.我们希望这样能对我国在 F-L 序列的研究方面有所促进.

下面谈谈本书的结构与主要内容.在第 1 章我们建立了 F-L 序列的各种表示法,其中多值数环是我们试引入的新概念,矩阵表示法过去已出现,但尚不够成熟,我们进行了一些完善和深化工作.这些表示法为我们研究 F-L 序列提供了有效的工具,同时也使我们对一些传统内容能够进行简单处理或者做出推广.在第 2 章,我们新建立了高阶 F-L 序列一系统恒等式.对于二阶 F-L 序列,我们较全面地总结或推广了已有的恒等式,新建立了若干恒等式.在建立恒等式的过程中,体现了不同于以往的一些较为简便的方法.前两章可以说主要是提供研究工具,从第 3 章到第 6 章则主要是研究 F-L 数的数论性质.第 3 章研究同余性质和模