八十年代国内外高初中数学竞赛试题100份汇解

（下 册）

吴 康 编

华南师范大学数学系

一九八七年七月

下册目录

下 册

解答、提示或答案

第一章 国际数学竞赛

A. 国际中学生奥林匹克数学竞赛

1. 第22国际数学竞赛

（1981.07.13.～14. 美国华盛顿，分2次共考9小时，每题7分，共42分）

1. 显然 $BC\cdot PD+CA\cdot PE+AB\cdot PF=2S$；由柯西不等式，$\left(\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}\right)(BC\cdot PD+CA\cdot PE+AB\cdot PF)\geqslant$

$(BC+CA+AB)^2=l^2$ (S, l 为$\triangle ABC$的面积与周长)，

故 $\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}\geqslant\frac{l^2}{2S}$（定值），等号当且仅当 $PD=PE=PF$ 时成立，这时P为$\triangle ABC$的内心I.

2. 集合$\{1,2,\cdots,n\}$的含r个元素的子集有C_n^2个，其中最小元素为k的子集有C_{n-k}^{r-1}个（$k=1,2,\cdots,n-r+1$），故$C_{n-1}^{r-1}+C_{n-2}^{r-1}+\cdots C_{r-1}^{r-1}=C_n^r$ (*)．这些子集中最小数的和为$S=C_{n-1}^{r-1}+2C_{n-2}^{r-1}+\cdots+(n-r+1)C_{r-1}^{r-1}$，利用(*)式可逐步推得$S=C_n^r+C_{n-1}^r+\cdots+C_r^r=C_{n+1}^{r+1}$．故

$F(n,r)=\frac{S}{C_n^r}=\frac{n+1}{r+1}$.

3. 若$n=m$，则易见$n=m=1$．设$n>m$，(n,m)满足方程$f(n,m)=(n^2-mn-m^2)^2=1$ (*)，则易见$(m,n-m)$也满足(*)，$\cdots$，$(1,1)$也满足(*)．故(n,m)应为斐波那契数列（定义为$a_1=a_2=1$，$a_k=a_{k-1}+a_{k-2}$）

1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，233，377，610，987，1597 中的相邻两项（从大至小）．则m^2+n^2的最大值为$987^2+1597^2=3524578$.

4. 用( )，[ ]表最大公约数与最小公倍数．则因$([k+1,k+2,\cdots,k+n-1],k+n)=[(k+1,k+n),(k+2,k+n),\cdots,(k+n-1,k+n)]=[(n-1,k+n),(n-2,k+n),\cdots,(1,k+n)]=([n-1,n-2,\cdots,1],k+n)$，故知$k+n\mid[k+1,k+2,\cdots,k+n-1]$ 亦即 $k+n=([k+1,k+2,$

$\cdots, k+n-1], k+n)$ 的充要条件为 $k+n \mid [n-1, n-2, \cdots, 1]$ (*)，其中 k 为非负整数，$a \mid b$ 表示 a 整除 b. 显然 $n=3$ 时(*)式无解；$n=4$ 时(*)式仅一解 $k=2$；$n \geqslant 5$ 时(*)式至少有两解 $k=n^2-4n+2$，$k=n^2-6n+6$，因为 $k+n=(n-1)(n-2)$ 或 $(n-2)(n-3)$ 均整除 $[n-1, n-2, \cdots, 1]$.

5. 如图1，⊙A，B，C 半径均为 r，交于 O，各切 $\triangle A'B'C'$ 的两边.

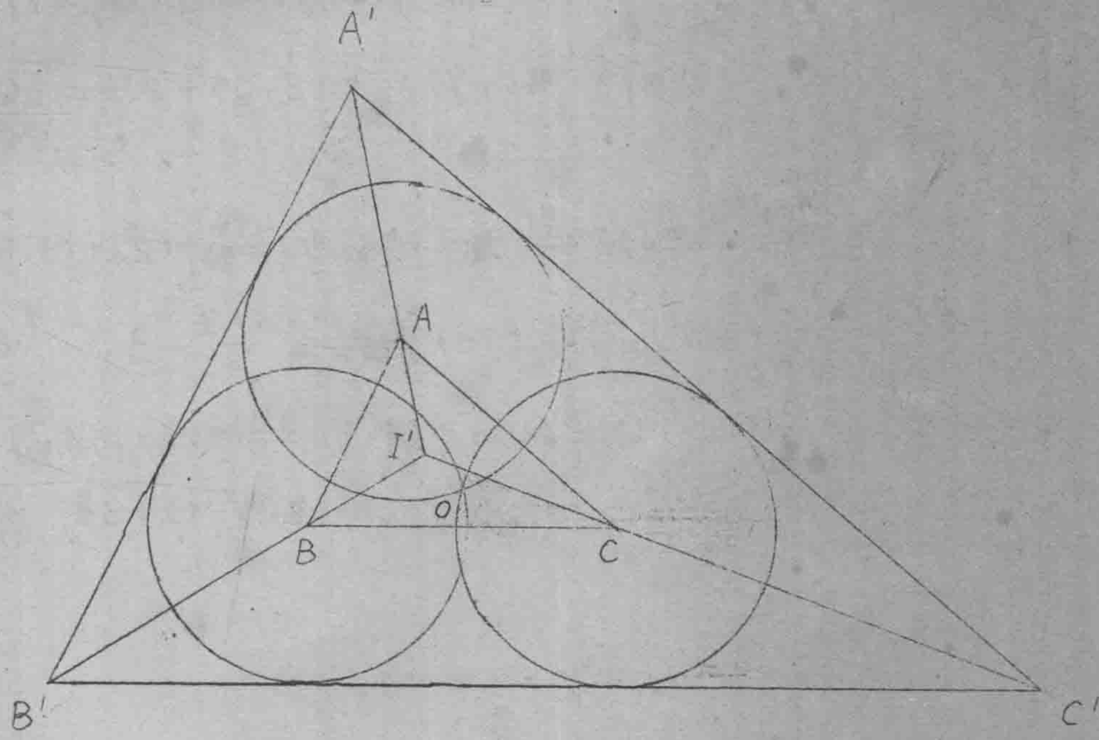

图 1

显然 $BC \parallel B'C'$，$CA \parallel C'A'$，$AB \parallel A'B'$，故 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$. 又 $A'A$，$B'B$，$C'C$ 为 $\triangle A'B'C'$ 的角平分线，交于内心 I'，故 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 为位似三角形，I' 为位似中心

这使得△ABC与△A'B'C'的外心O与O'为对应点，O，I'，O'三点共线。

6. 方法为从$f(0,y)$，逐步求$f(1,y)$，$f(2,y)$，$f(3,y)$和$f(4,y)$。

① $f(1,0)\overset{(2)}{=\!=}f(0,1)\overset{(1)}{=\!=}2$；$f(1,y)\overset{(3)}{=\!=}f(0,f(1,y-1))\overset{(1)}{=\!=}f(1,y-1)+1$. 易解得 $f(1,y)=f(1,0)+y=y+2$. ……(4)

② $f(2,0)\overset{(2)}{=\!=}f(1,1)\overset{(4)}{=\!=}3$；$f(2,y)\overset{(3)}{=\!=}f(1,f(2,y-1))\overset{(4)}{=\!=}f(2,y-1)+2$. 易解得 $f(2,y)=f(2,0)+2y=2y+3$. (5)

③ $f(3,0)\overset{(2)}{=\!=}f(2,1)\overset{(5)}{=\!=}5$；$f(3,y)\overset{(3)}{=\!=}f(2,f(3,y-1))\overset{(5)}{=\!=}2f(3,y-1)+3$. 易解得 $f(3,y)=2^{3+y}-3$. (6)

④ $f(4,0)\overset{(2)}{=\!=}f(3,1)\overset{(6)}{=\!=}13$；$f(4,y)\overset{(3)}{=\!=}f(3,f(4,y-1))\overset{(6)}{=\!=}2^{3+f(4,y-1)}-3$，$f(4,y)+3=2^{f(4,y-1)+3}$. 易解得

$$f(4,y)=2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\quad(y+3\text{个}2).\quad(7)$$

$$\therefore\ f(4,1981)\overset{(7)}{=\!=}-3+2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\quad(1984\text{个}2).$$

2. 第23届国际数学竞赛

（1982.07.09.～10. 匈牙利布达佩斯，分2次共考9小时，每题7分，共42分；一等奖≥37分，二等奖30～36分，三等奖21～29分）

1. 以$[x]$表x的整数部分．易验证$f(n)=\left[\frac{n}{3}\right]$满足题设条件．下证$f(n)=\left[\frac{n}{3}\right]$为唯一解（$n\leqslant\left[\frac{9999}{4}\right]$），从而$f(1982)=660$．

易见$f(1)=0$，$f(3)=1$，$f(n)$单调上升，$f(n+1)=f(n)+\delta$（$\delta=0$或1），$f(n+3)=f(n)+1$．从上式可推得$f(3k)=k$，$k\leqslant 3333$．再讨论$f(3k+1)$，$f(3k+2)$，先计算得其值均为$k+\delta$，再证$\delta=0$．（也可直接从$1982=f(3\cdot 1982)\geqslant 3f(1982)$，得$f(1982)<661$；又$f(1982)\geqslant 660$．故$f(1982)=660$．）

2. 如图2，设三内角平分线为A_1B_1，A_2B_2，A_3B_3，则显然S_1，S_2，S_3均在内切圆上，且$\angle T_1IT_3=\pi-A_2$，$\angle T_3B_3A_3=A_2+\frac{1}{2}A_3$，$\angle T_3IB_3=\frac{\pi}{2}-(A_2+\frac{1}{2}A_3)$，$\angle T_3IS_3=\pi-(2A_2+A_3)$，$\angle S_3IT_1=A_2+A_3$；同理，$\angle S_2IT_1=A_2+A_3$．故$S_2S_3\perp IT_1$，$S_2S_3 /\!/ A_2A_3$．同理$S_3S_1 /\!/ A_3A_1$，$S_1S_2 /\!/ A_1A_2$．易见$\triangle S_1S_2S_3$与$\triangle M_1M_2M_3$对应边相互平行，但不全等（外接圆不相等），

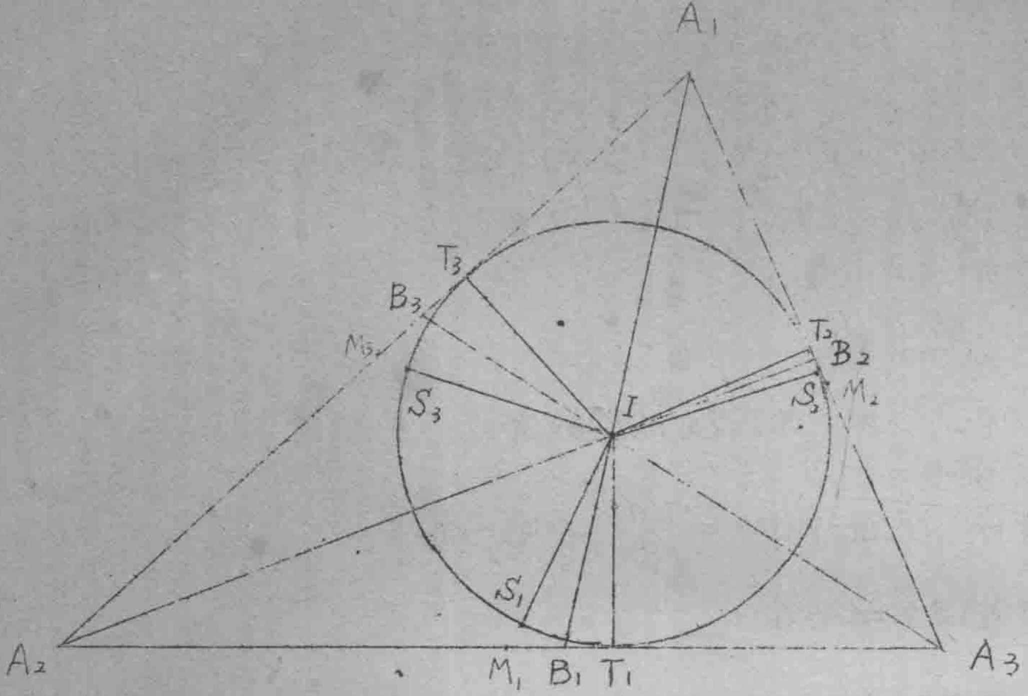

图 2

故为位似三角形，因此对应顶点连线 M_1S_1 ， M_2S_2 ， M_3S_3 共点。

3. (a) 若有正数 $\delta > 0$ ，使得所有 $x_i \geqslant \delta$ ，则因 $\frac{x_i^2}{x_{i+1}} \geqslant \frac{\delta^2}{x_{i+1}} \geqslant \delta^2$ ，取 n 使 $n\delta^2 \geqslant 3.999$ 即可．否则，数列 $\{x_n\}$ 有极限0．易证 $\frac{x_i^2}{x_{i+1}} \geqslant 4(x_i - x_{i+1})$ ， 故

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_i^2}{x_{i+1}} \geqslant \sum_{i=0}^{n-1} 4(x_i - x_{i+1}) = 4 - 4x_n \longrightarrow 4\ (n \longrightarrow \infty),$$

令 n 足够大使得 $x_n < 0.00025$ 即可．

(b) 取 $x_i = 2^{-i}$ 即可．

4. 若 (x, y) 为一组解，易验证 $(y-x, -x)$，$(-y, x-y)$ 为另两组解，易证这三组解两两不同. 对 $n=2891$，原方程导出 $x^3+y^3\equiv 2 \pmod 3$，这只有 $\begin{cases}x\equiv 0\\ y\equiv 2\end{cases}$，$\begin{cases}x\equiv 2\\ y\equiv 0\end{cases}$，$\begin{cases}x\equiv 1\\ y\equiv 1\end{cases} \pmod 3$ 三种情形可行，但后两种可归结为前一种. 以 $x=3m$，$y=3n+2$ 代入原式，以 $\pmod 9$ 检查不合.

5. 如图3，易见 $\triangle BMC \cong \triangle DNE$，$\angle BND = \angle BNC + \angle CND = (90^\circ - \angle NBC) + (\angle CED + \angle NDE) = (90^\circ - \angle NBC) + (30^\circ + \angle MBC) = 120^\circ$. 而 $\angle BOD = 120^\circ$. 故 B，O，N，D 四点共圆，圆心为 C. 故 $r = \frac{CN}{CE} = \frac{CB}{CE} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

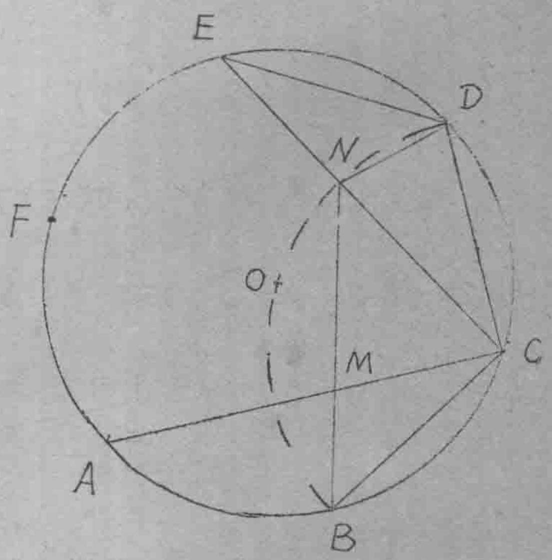

图3

6. 如图4，以 S_1, S_2, S_3, S_4 表正方形的4个顶点. 以 $d(PQ)$ 表点 P，Q 的距离，以 $s(AB)$ 表在 L 上的点 A，B 在 L 上的路长. 若 $s(A_0A) < s(A_0B)$，记 $A < B$. 因有 $S_1', \cdots, S_4' \in L$，使 $d(S_i S_i') \le \frac{1}{2}$，易证可

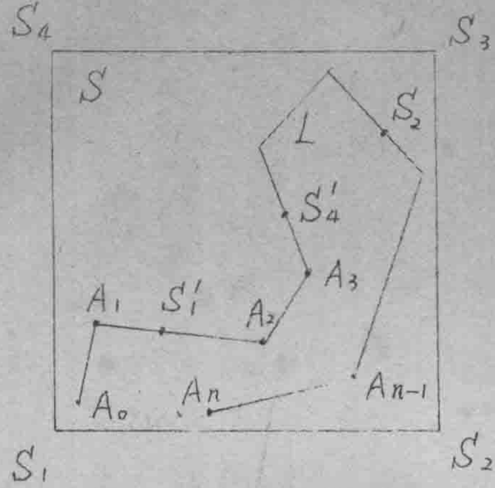

图 4

设 $S_1' < S_4' < S_2'$. 以 L_1, L_2 分记 L 上使得 $X \leqslant S_4'$, $X \geqslant S_4'$ 的点 X 之集. 边 S_1S_2 有子集 L_1', L_2' 各为与 L_1, L_2 距离 $\leqslant \frac{1}{2}$ 的点的集合，易见 $S_1 \in L_1'$, $S_2 \in L_2'$，且 $L_1' \cup L_2' = S_1S_2$，$L_1' \cap L_2'$ 非空. 设 $M \in L_1' \cap L_2'$. 选点 $X \in L_1$, $y \in L_2$，使得 $d(MX) \leqslant \frac{1}{2}$, $d(My) \leqslant \frac{1}{2}$，则 $d(Xy) \leqslant 1$，且 $X < S_4' < y$. 故 $s(Xy) = s(XS_4') + s(S_4'y) \geqslant [100-(d(S_1S_1')+d(S_4S_4'))] + [100-(d(S_4S_4') + d(S_2S_2'))] \geqslant 99+99 = 198$.

3. 第24届国际数学竞赛

（1983.07.06.～07. 法国巴黎，分2次共考9小时，每题7分，共42分）

1. 在(i)中令 $x=y=1$ 和 $x=1$, $y=f(1)$，易得 $f(1)=1$。易见 $f(xf(x))=xf(x)$，令 $S=\{x;\ f(x)=x\}$，

则任给 a，$b\in S$，在 (i) 中令 $x=a$，$y=b$，易得 $ab\in S$，同理 a^2，a^3，$\cdots\in S$．若 $a>1$，则 $f(a^n)=a^n$，令 $n\to\infty$，由 (ii) 得 $0=\infty$，矛盾．故 $a\leqslant 1$．若 $a<1$，在 (i) 中令 $x=\frac{1}{a}$，$y=a$，得 $f(\frac{1}{a})=\frac{1}{a}$，故 $\frac{1}{a}\in S$，引出矛盾．故 $S=\{1\}$．但任给 x，$xf(x)\in S$．故 $xf(x)=1$，$f(x)=\frac{1}{x}$ 为原题的唯一解．

2．如图5，直线 O_1O_2 为 $\odot O_1$，O_2 的对称轴，故 O_1O_2

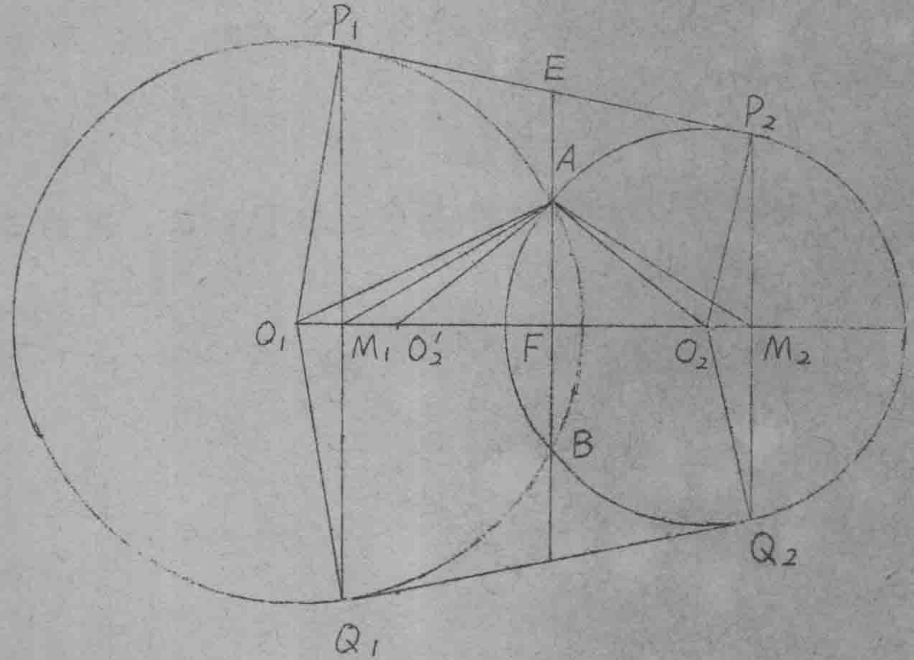

图 5

垂直平分 P_1Q_1，P_2Q_2，从而 M_1，M_2 在 O_1O_2 上．易证 $P_1E=EP_2$（由圆幂定理），$AB\perp O_1O_2$，$P_1M_1 /\!/ AF /\!/ P_2M_2$， F为$M_1M_2$的中点，$AM_1=AM_2$．取$O_2$关于$AB$的对称点$O_2'$，易证$\triangle P_1O_1M_1 \backsim \triangle P_2O_2M_2$，$O_1M_1:O_2M_2=O_1P_1:O_2P_2$，从而得$\angle O_1AM_1=\angle M_1AO_2'=\angle M_2AO_2$，故$\angle O_1AO_2=\angle M_1AM_2$．

3．若$2abc-bc-ca-ab=xbc+yca+zab$，$x,y,z\geqslant 0$，则$a$整除$(x+1)bc$，$a$整除$x+1$；易见$2a\cdot bc>(x+1)bc$，故$x+1=a$．同理$y+1=b$，$z+1=c$，代入原式引出矛盾．

熟知任一整数$u=xbc+yca+zab$，x,y,z为整数．又$xbc+yca+zab=(x+na)bc+(y+mb)ca+(z-nc-mc)ab$，故恒可假定$a>x\geqslant 0$，$b>y\geqslant 0$．若$z<0$，则$u\leqslant(a-1)bc+(b-1)ca-ab=2a\cdot bc-bc-ca$．原命题得证．

4．答案是肯定的．如图6，取P，Q，R为三边的三等分点，使得$AR=BP=CQ=\frac{2}{3}AB$，则易见$PQ\perp BC$，$QR\perp CA$，$RP\perp AB$．E的分拆$E=E_1\cup E_2$（$E_1\cap E_2=\phi$）中，必有一子集含P，Q，R中至少2点，不妨设$P,Q\in E_1$．若BC中另有一点$M\in E_1$，则$\triangle QPM$为所求；否则

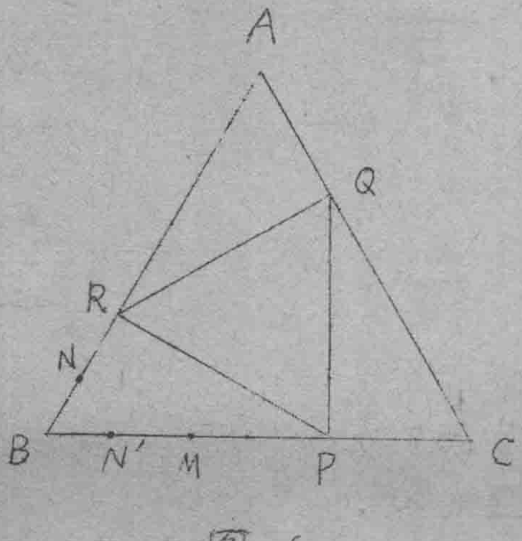

图 6

$BC-\{P\}\subset E_2$，若AB中另有一点$N\in E_2$，N在BC的投影