

八十年代国内外高初中
数学竞赛试题100份汇解
(下 册)

吴 康 编

华南师范大学数学系

一九八七年七月

下 册 目 录

第一章 国际数学竞赛	(1)
A. 国际中学生奥林匹克数学竞赛 (IMO)	(1)
1. 第22届 IMO	(1)
2. 第23届 IMO	(5)
3. 第24届 IMO	(8)
4. 第25届 IMO	(11)
5. 第26届 IMO	(14)
6. 第27届 IMO	(18)
7. 第28届 IMO (暂缺)	
B. 其它国际数学邀请赛	(21)
8. 1980年芬兰国际数学邀请赛	(21)
9. 1980年卢森堡国际数学邀请赛	(24)
第二章 国内高中数学竞赛	(27)
A. 全国高中联合数学竞赛	(27)
10. 1981年25省市自治区联合数学竞赛	(27)
11. 1982年28省市自治区联合数学竞赛	(31)
12. 1983年省市自治区联合数学竞赛	(35)
13. 1984年省市自治区联合数学竞赛	(39)
14. 1985年省市自治区联合数学竞赛	(43)
15. 1986年全国高中数学联合竞赛	(47)
16. 1987年高中数学联合竞赛 (暂缺)	
B. 全国中学生数学冬令营选拔竞赛	(52)
17. 首届全国中学生数学冬令营竞赛	(52)
18. 第二届全国中学生数学冬令营竞赛	(56)

C. 全国数学奥林匹克集训班选拔考试	(61)
19. 首届全国数学奥林匹克集训班选拔考试	(61)
20. 第二届全国数学奥林匹克集训班选拔考试	(66)
D. 北京市高中学生数学竞赛	(71)
21. 北京市1981年高中数学竞赛	(71)
22. 北京市1982年高中学生数学竞赛 (暂缺)	
23. 北京市1983年高中学生数学竞赛 (暂缺)	
24. 北京市1984年高中学生数学竞赛	(74)
25. 北京市1985年高中学生数学竞赛	(76)
26. 北京市1986年高中学生数学竞赛 (暂缺)	
27. 北京市1987年高中学生数学竞赛	(78)
E. 上海市高中学生数学竞赛	(81)
28-29. 上海市1981年高中学生数学竞赛	(81)
30-31. 上海市1982年高中学生数学竞赛	(86)
32. 上海市1983年高中学生数学竞赛	(92)
33-34. 上海市1984年高中学生数学竞赛	(96)
35. 上海市1985年高中学生数学竞赛	(103)
36-37. 上海市1986年高中学生数学竞赛	(109)
38-39. 上海市1987年高中学生数学竞赛 (暂缺)	
F. 其它省、市、自治区和大中城市高中学生数学竞赛	(116)
40. 1980年安徽省高中学生数学竞赛	(116)
41. 苏州市1983年高中学生数学竞赛	(120)
42. 苏州市1984年高中学生数学竞赛	(122)
43. 1985年苏州市、镇江市高中数学竞赛	(124)
44. 1985年合肥市高中数学竞赛	(126)
45. 1985年无锡市高中数学竞赛	(130)
46. 1986年苏州市高中数学竞赛	(133)
47. 1986年合肥市高中数学竞赛	(136)
48. 烟台市1986年数学竞赛	(139)

第三章. 国内初中数学竞赛 (142)

A. 全国初中数学竞赛 (142)

49. 1985年省市自治区联合初中数学竞赛 (142)

50. 1986年全国初中数学竞赛 (145)

51. 1987年全国初中数学联合竞赛 (148)

B. 北京市初中数学竞赛 (152)

52. 北京市1981年初中学数学竞赛 (152)

53. 北京市1982年初中学数学竞赛 (153)

54. 北京市1983年初中学数学竞赛 (155)

55. 北京市1984年初中学数学竞赛 (157)

56. 北京市1985年中学生数学竞赛 (159)

57. 北京市1986年中学生数学竞赛 (161)

58. 北京市1987年中学生数学竞赛 (163)

C. 上海市初中数学竞赛 (166)

59. 上海市1982年初中学数学竞赛 (166)

60. 上海市1983年初中学数学竞赛 (170)

61. 上海市1984年初中学数学竞赛 (172)

62. 上海市1985年初中学数学竞赛 (176)

63. 上海市1986年初中学数学竞赛 (暂缺)

64. 上海市1987年初中学数学竞赛 (暂缺)

D. 广州、武汉、福州等城市联合初中数学竞赛 (179)

65. 福州、武汉、广州联合初中数学竞赛 (179)

66. 广州、武汉、福州联合初中数学竞赛 (181)

67. 武汉、重庆、福州、广州联合初中数学竞赛 (184)

68. 武汉、广州、福州、重庆初中数学竞赛 (186)

E. 其它省市自治区等初中学生数学竞赛 (188)

69. 福建省1981年初中学数学竞赛 (188)

70. 天津市1982年初中学数学竞赛 (190)

- 71. 福建省1982-1983年度初中数学竞赛 (191)
- 72. 湖北省1982年初中数学竞赛 (192)
- 73. 天津市1983年初中数学竞赛 (194)
- 74. 福建省1983-1984年度初中数学竞赛 (195)
- 75. 湖北省1983年初中数学竞赛 (197)
- 76. 河北省1983年初中数学竞赛 (198)
- 77. 广西壮族自治区1983年初中数学竞赛 (199)
- 78. 天津市1984年初中数学邀请赛 (201)
- 79. 吉林省1984年初中数学竞赛 (202)
- 80. 吉林省1985年初中数学竞赛 (203)
- 81. 重庆市第三届“缙云杯”初中数学邀请赛 (204)
- 82. 江苏省1986年初中数学竞赛 (206)

第四章. 美国中学生数学竞赛 (209)

A. 美国初中数学竞赛 (209)

- 83. 第一届美国初中数学竞赛 (1985年)(暂缺)
- 84. 第二届美国初中数学竞赛 (1986年)(暂缺)
- 85. 第三届美国初中数学竞赛 (1987年)(暂缺)

B. 美国高中数学竞赛 (209)

- 86. 第31届美国高中数学竞赛 (1980年) (209)
- 87. 第32届美国高中数学竞赛 (1981年) (213)
- 88. 第33届美国高中数学竞赛 (1982年) (219)
- 89. 第34届美国高中数学竞赛 (1983年) (224)
- 90. 第35届美国高中数学竞赛 (1984年) (227)
- 91. 第36届美国高中数学竞赛 (1985年) (231)
- 92. 第37届美国高中数学竞赛 (1986年) (234)
- 93. 第38届美国高中数学竞赛 (1987年) (239)

C. 美国数学邀请赛 (245)

- 94. 第一届美国数学邀请赛 (1983年) (245)

95. 第二届美国数学邀请赛 (1984年) (250)
 96. 第三届美国数学邀请赛 (1985年) (253)
 97. 第四届美国数学邀请赛 (1986年) (256)
 98. 第五届美国数学邀请赛 (1987年) (260)

D. 美国中学生奥林匹克数学竞赛 (263)

99. 第9届美国中学生奥林匹克数学竞赛(1980年) (263)
 100. 第10届美国中学生奥林匹克数学竞赛(1981年) (266)
 101. 第11届美国中学生奥林匹克数学竞赛(1982年) (269)
 102. 第12届美国中学生奥林匹克数学竞赛(1983年) (271)
 103. 第13届美国中学生奥林匹克数学竞赛(1984年) (273)
 104. 第14届美国中学生奥林匹克数学竞赛(1985年) (276)
 105. 第15届美国中学生奥林匹克数学竞赛(1986年) (279)
 106. 第16届美国中学生奥林匹克数学竞赛(1987年)(暂缺)

第五章. 苏联中学生数学竞赛 (281)

A. 全苏中学生数学竞赛 (281)

107. 第14届全苏中学生数学竞赛 (1980年) (281)
 108. 第15届全苏中学生数学竞赛 (1981年) (291)
 109. 第16届全苏中学生数学竞赛 (1982年)(暂缺)
 110. 第17届全苏中学生数学竞赛 (1983年)(暂缺)
 111. 第18届全苏中学生数学竞赛 (1984年) (306)
 112. 第19届全苏中学生数学竞赛 (1985年) (306)
 113. 第20届全苏中学生数学竞赛 (1986年)(暂缺)
 114. 第21届全苏中学生数学竞赛 (1987年)(暂缺)

B. 全俄中学生数学竞赛 (309)

115. 第6届全俄中学生数学竞赛 (1980年) (309)
 116. 第7届全俄中学生数学竞赛 (1981年) (312)
 117. 第8届全俄中学生数学竞赛 (1982年)(暂缺)
 118. 第9届全俄中学生数学竞赛 (1983年) (315)

119. 第10届全俄中学生数学竞赛 (1984年) (3117)
120. 第11届全俄中学生数学竞赛 (1985年) (320)
121. 第12届全俄中学生数学竞赛 (1986年) (暂缺)
122. 第13届全俄中学生数学竞赛 (1987年) (暂缺)
- 第六章. 世界其它国家中学生数学竞赛 (322)
- A. 1980年 (322)
123. 英国第16届奥林匹克数学竞赛 (略)
- B. 1981年
124. 澳大利亚中学生数学竞赛 (略)
125. 西德中学生数学竞赛 (略)
126. 加拿大第13届奥林匹克数学竞赛 (略)
- C. 1982年 (322)
127. 加拿大第14届奥林匹克数学竞赛 (322)
128. 西德中学生数学竞赛 (324)
129. 英国第18届奥林匹克数学竞赛 (325)
- D. 1983年 (326)
130. 1983年瑞士奥林匹克数学竞赛 (326)
131. 1983年澳大利亚奥林匹克数学竞赛 (略)
132. 1983年瑞典奥林匹克数学竞赛 (328)
133. 加拿大第15届奥林匹克数学竞赛 (329)
134. 1983年荷兰奥林匹克数学竞赛 (330)
- E. 1984年 (331)
135. 加拿大第16届奥林匹克数学竞赛 (331)
- F. 1985年 (332)
136. 1985年英国奥林匹克数学竞赛 (332)
137. 加拿大第17届奥林匹克数学竞赛 (370)
138. 1985年新加坡中学数学竞赛 (略)

下 册

解答、提示或答案

第一章 国际数学竞赛

A. 国际中学生奥林匹克数学竞赛

1. 第22国际数学竞赛

(1981.07.13.~14. 美国华盛顿, 分2次共考9小时, 每题7分, 共42分)

1. 显然 $BC \cdot PD + CA \cdot PE + AB \cdot PF = 2S$; 由柯西不等式, $(\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF})(BC \cdot PD + CA \cdot PE + AB \cdot PF) \geq$

$(BC + CA + AB)^2 = l^2 (S)$, l 为 $\triangle ABC$ 的面积与周长),

故 $\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF} \geq \frac{l^2}{2S}$ (定值), 等号当且仅当 $PD = PE$

$= PF$ 时成立, 这时 P 为 $\triangle ABC$ 的内心 I .

2. 集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的含 r 个元素的子集有 C_n^r 个, 其中最小元素为 k 的子集有 C_{n-k}^{r-1} 个 ($k = 1, 2, \dots, n-r+1$),

故 $C_{n-1}^{r-1} + C_{n-2}^{r-1} + \dots + C_{r-1}^{r-1} = C_n^r$ (*). 这些子集中最小数

的和为 $S = C_{n-1}^{r-1} + 2C_{n-2}^{r-1} + \dots + (n-r+1)C_{r-1}^{r-1}$, 利用(*)

式可逐步推得 $S = C_n^r + C_{n-1}^r + \dots + C_r^r = C_{n+1}^{r+1}$. 故

$$F(n, r) = \frac{S}{C_n^r} = \frac{n+1}{r+1}.$$

3. 若 $n = m$, 则易见 $n = m = 1$. 设 $n > m$, (n, m) 满足方程 $f(n, m) = (n^2 - mn - m^2)^2 = 1$ (*), 则易见 $(m, n-m)$ 也满足 (*), $\dots$, $(1, 1)$ 也满足 (*). 故 (n, m) 应为斐波那契数列 (定义为 $a_1 = a_2 = 1$, $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$)

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597 中的相邻两项 (从大至小). 则 $m^2 + n^2$ 的最大值为 $987^2 + 1597^2 = 3524578$.

4. 用 $()$, $[]$ 表最大公约数与最小公倍数. 则因 $([k+1, k+2, \dots, k+n-1], k+n) = ([k+1, k+n], (k+2, k+n), \dots, (k+n-1, k+n)) = [(n-1, k+n), (n-2, k+n), \dots, (1, k+n)] = ([n-1, n-2, \dots, 1], k+n)$, 故知 $k+n \mid [k+1, k+2, \dots, k+n-1]$ 亦即 $k+n = ([k+1, k+2,$

$\dots, k+n-1], k+n)$ 的充要条件为 $k+n \mid [n-1, n-2, \dots, 1]$ (*), 其中 k 为非负整数, $a \mid b$ 表示 a 整除 b . 显然 $n=3$ 时 (*) 式无解; $n=4$ 时 (*) 式仅一解 $k=2$; $n \geq 5$ 时 (*) 式至少有两解 $k=n^2-4n+2$, $k=n^2-6n+6$, 因为 $k+n = (n-1)(n-2)$ 或 $(n-2)(n-3)$ 均整除 $[n-1, n-2, \dots, 1]$.

5. 如图1, $\odot A, B, C$ 半径均为 r , 交于 O , 各切 $\triangle A'B'C'$ 的两边.

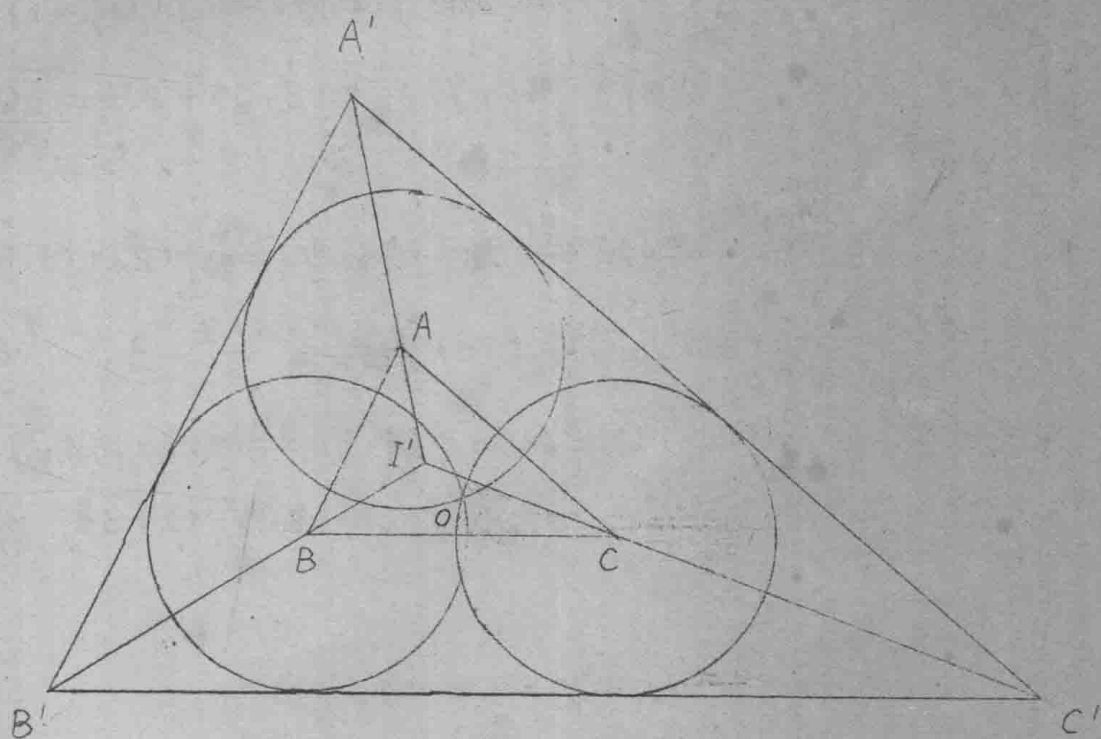


图 1

显然 $BC \parallel B'C'$, $CA \parallel C'A'$, $AB \parallel A'B'$, 故 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. 又 $A'A, B'B, C'C$ 为 $\triangle A'B'C'$ 的角平分线, 交于内心 I' , 故 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 为位似三角形, I' 为位似中心.

这使得 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的外心 O 与 O' 为对应点, O, I', O' 三点共线.

6. 方法为从 $f(0, y)$, 逐步求 $f(1, y), f(2, y), f(3, y)$ 和 $f(4, y)$.

$$\textcircled{1} \quad f(1, 0) \stackrel{(2)}{=} f(0, 1) \stackrel{(1)}{=} 2; \quad f(1, y) \stackrel{(3)}{=} f(0, f(1, y-1)) \\ \stackrel{(1)}{=} f(1, y-1) + 1. \quad \text{易解得 } f(1, y) = f(1, 0) + y = y + 2. \\ \dots\dots (4)$$

$$\textcircled{2} \quad f(2, 0) \stackrel{(2)}{=} f(1, 1) \stackrel{(4)}{=} 3; \quad f(2, y) \stackrel{(3)}{=} f(1, f(2, y-1)) \\ \stackrel{(4)}{=} f(2, y-1) + 2. \quad \text{易解得 } f(2, y) = f(2, 0) + 2y = 2y + 3. \quad (5)$$

$$\textcircled{3} \quad f(3, 0) \stackrel{(2)}{=} f(2, 1) \stackrel{(5)}{=} 5; \quad f(3, y) \stackrel{(3)}{=} f(2, f(3, y-1)) \\ \stackrel{(5)}{=} 2f(3, y-1) + 3. \quad \text{易解得 } f(3, y) = 2^{3+y} - 3. \quad (6)$$

$$\textcircled{4} \quad f(4, 0) \stackrel{(2)}{=} f(3, 1) \stackrel{(6)}{=} 13; \quad f(4, y) \stackrel{(3)}{=} f(3, f(4, y-1)) \\ \stackrel{(6)}{=} 2^{3+f(4, y-1)} - 3, \quad f(4, y) + 3 = 2^{f(4, y-1) + 3}. \quad \text{易解}$$

$$\text{得} \quad f(4, y) = 2^{2^{\dots^2}} \quad (y + 3 \text{ 个 } 2). \quad (7)$$

$$\therefore f(4, 1981) \stackrel{(7)}{=} -3 + 2^{2^{\dots^2}} \quad (1984 \text{ 个 } 2).$$

2. 第23届国际数学竞赛

(1982.07.09.~10. 匈牙利布达佩斯, 分2次共考9小时, 每题7分, 共42分; 一等奖 ≥ 37 分, 二等奖30~36分, 三等奖21~29分)

1. 以 $[x]$ 表 x 的整数部分, 易验证 $f(n) = \left[\frac{n}{3}\right]$ 满足题设条件. 下证 $f(n) = \left[\frac{n}{3}\right]$ 为唯一解($n \leq \left[\frac{9999}{4}\right]$), 从而 $f(1982) = 660$.

易见 $f(1) = 0$, $f(3) = 1$, $f(n)$ 单调上升, $f(n+1) = f(n) + \delta$ ($\delta = 0$ 或 1), $f(n+3) = f(n) + 1$. 从上式可推得 $f(3k) = k$, $k \leq 3333$. 再讨论 $f(3k+1)$, $f(3k+2)$, 先计算得其值均为 $k + \delta$, 再证 $\delta = 0$. (也可直接从 $1982 = f(3 \cdot 1982) \geq 3f(1982)$, 得 $f(1982) \leq 661$; 又 $f(1982) \geq 660$. 故 $f(1982) = 660$.)

2. 如图2, 设三内角平分线为 A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 , 则显然 S_1, S_2, S_3 均在内切圆上, 且 $\angle T_1IT_3 = \pi - A_2$, $\angle T_3B_3A_3 = A_2 + \frac{1}{2}A_3$, $\angle T_3IB_3 = \frac{\pi}{2} - (A_2 + \frac{1}{2}A_3)$, $\angle T_3IS_3 = \pi - (2A_2 + A_3)$, $\angle S_3IT_1 = A_2 + A_3$; 同理, $\angle S_2IT_1 = A_2 + A_3$. 故 $S_2S_3 \perp IT_1$, $S_2S_3 \parallel A_2A_3$. 同理 $S_3S_1 \parallel A_3A_1$, $S_1S_2 \parallel A_1A_2$. 易见 $\triangle S_1S_2S_3$ 与 $\triangle M_1M_2M_3$ 对应边相互平行, 但不全等(外接圆不相等),

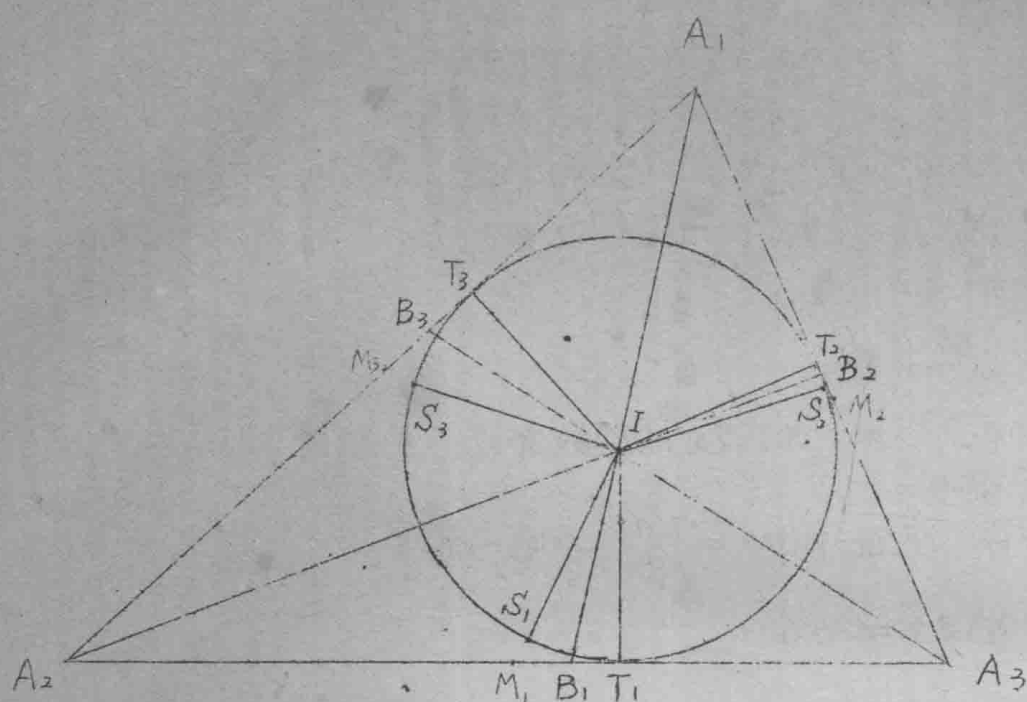


图 2

故为位似三角形，因此对应顶点连线 M_1S_1 ， M_2S_2 ， M_3S_3 共点。

3. (a) 若有正数 $\delta > 0$ ，使得所有 $x_i \geq \delta$ ，则因

$$\frac{x_i^2}{x_{i+1}} \geq \frac{\delta^2}{x_{i+1}} \geq \delta^2, \text{ 取 } n \text{ 使 } n\delta^2 \geq 3.999 \text{ 即可. 否则,}$$

数列 $\{x_n\}$ 有极限 0. 易证 $\frac{x_i^2}{x_{i+1}} \geq 4(x_i - x_{i+1})$, 故

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_i^2}{x_{i+1}} \geq \sum_{i=0}^{n-1} 4(x_i - x_{i+1}) = 4 - 4x_n \rightarrow 4 \quad (n \rightarrow \infty),$$

令 n 足够大使得 $x_n < 0.00025$ 即可.

(b) 取 $x_i = 2^{-i}$ 即可.

4. 若 (x, y) 为一组解, 易验证 $(y-x, -x)$, $(-y, x-y)$ 为另两组解, 易证这三组解两两不同. 对 $n=2891$, 原方程导出 $x^3 + y^3 \equiv 2 \pmod{3}$, 这只有 $\begin{cases} x \equiv 0 \\ y \equiv 2 \end{cases}$,

$\begin{cases} x \equiv 2 \\ y \equiv 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x \equiv 1 \\ y \equiv 1 \end{cases} \pmod{3}$ 三种情形可行, 但后两种可归

结为前一种. 以 $x=3m$, $y=3n+2$ 代入原式, 以 $\pmod{9}$ 检查不合.

5. 如图3, 易见 $\triangle BMC \cong \triangle DNE$, $\angle BND = \angle BNC + \angle CND = (90^\circ - \angle NBC) + (\angle CED + \angle NDE) = (90^\circ - \angle NBC) + (30^\circ + \angle MBC) = 120^\circ$. 而 $\angle BOD = 120^\circ$. 故 B, O, N, D 四点共圆, 圆心为 C .

故 $r = \frac{CN}{CE} = \frac{CB}{CE} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

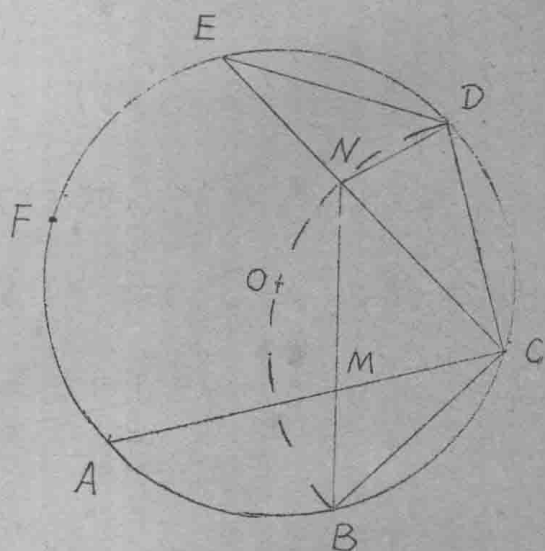


图3

6. 如图4, 以

S_1, S_2, S_3, S_4 表

正方形的4个顶点. 以 $d(PQ)$ 表点 P, Q 的距离, 以 $s(AB)$ 表在 L 上的点 A, B 在 L 上的路长. 若 $s(A, A) < s(A, B)$, 记 $A < B$. 因有 $S'_1, \dots, S'_4 \in L$, 使 $d(S'_i, S'_j) \leq \frac{1}{2}$, 易证可

设 $S'_1 < S'_4 < S'_2$. 以 L_1 , L_2 补记 L 上使得 $X \leq S'_4$, $X \geq S'_4$ 的点 X 之集. 边 S_1, S_2 有子集 L'_1, L'_2 各为与 L_1, L_2 距离 $\leq \frac{1}{2}$ 的点的集合, 易见 $S_1 \in L'_1$, $S_2 \in L'_2$, 且 $L'_1 \cup L'_2 = S_1, S_2$, $L'_1 \cap L'_2 \neq \emptyset$. 设 $M \in L'_1 \cap L'_2$. 选点 $X \in L_1$, $Y \in L_2$, 使得 $d(MX) \leq \frac{1}{2}$,

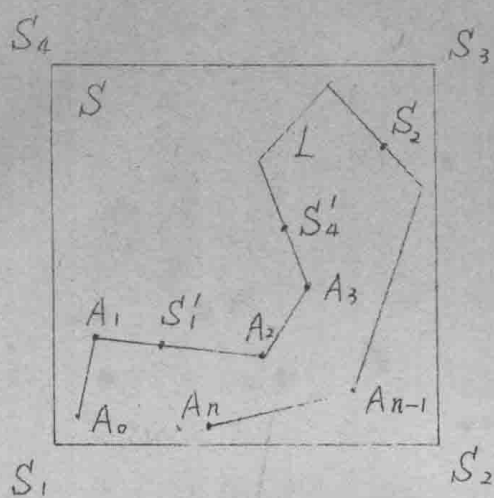


图 4

$d(MY) \leq \frac{1}{2}$, 则 $d(XY)$

≤ 1 , 且 $X < S'_4 < Y$. 故 $s(XY) = s(XS'_4) + s(S'_4Y)$
 $\geq [100 - (d(S_1, S'_1) + d(S_4, S'_4))] + [100 - (d(S_4, S'_4)$
 $+ d(S'_2, S'_2))] \geq 99 + 99 = 198$.

3. 第24届国际数学竞赛

(1983.07.06.~07. 法国巴黎, 分2次共考9小时, 每题7分, 共42分)

1. 在(i)中令 $x = y = 1$ 和 $x = 1, y = f(1)$, 易得 $f(1) = 1$. 易见 $f(xf(x)) = xf(x)$, 令 $S = \{x; f(x) = x\}$,

则任给 $a, b \in S$, 在 (i) 中令 $x = a, y = b$, 易得 $ab \in S$, 同理 $a^2, a^3, \dots \in S$. 若 $a > 1$, 则 $f(a^n) = a^n$, 令 $n \rightarrow \infty$, 由 (ii) 得 $0 = \infty$, 矛盾. 故 $a \leq 1$. 若 $a < 1$, 在 (i) 中令 $x = \frac{1}{a}, y = a$, 得 $f(\frac{1}{a}) = \frac{1}{a}$, 故 $\frac{1}{a} \in S$, 引出矛盾. 故 $S = \{1\}$. 但任给 $x, xf(x) \in S$. 故 $xf(x) = 1, f(x) = \frac{1}{x}$ 为原题的唯一解.

2. 如图5, 直线 O_1O_2 为 $\odot O_1, \odot O_2$ 的对称轴, 故 O_1O_2

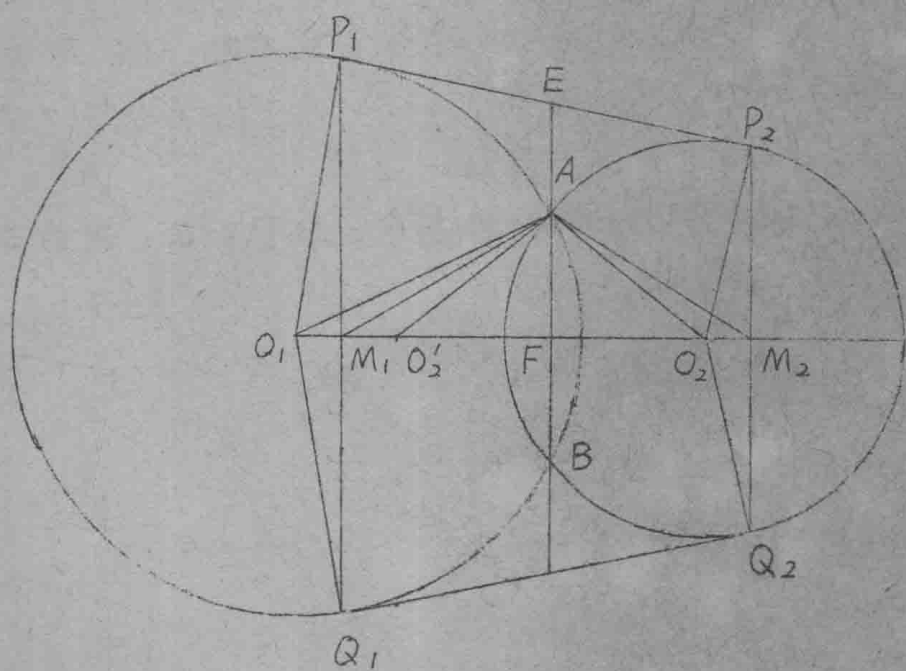


图 5

垂直平分 P_1Q_1, P_2Q_2 , 从而 M_1, M_2 在 O_1O_2 上. 易证 $P_1E = EP_2$ (由圆幂定理), $AB \perp O_1O_2, PM_1 \parallel AF \parallel P_2M_2$,

F为 M_1M_2 的中点, $AM_1=AM_2$. 取 O_2 关于 AB 的对称点 O_2' , 易证 $\triangle P_1O_1M_1 \sim \triangle P_2O_2M_2$, $O_1M_1:O_2M_2=O_1P_1:O_2P_2$, 从而得 $\angle O_1AM_1=\angle M_1AO_2'=\angle M_2AO_2$, 故 $\angle O_1AO_2=\angle M_1AM_2$.

3. 若 $2abc-bc-ca-ab=xbc+yca+zab$, $x, y, z \geq 0$, 则 a 整除 $(x+1)bc$, a 整除 $x+1$; 易见 $2a \cdot bc > (x+1)bc$, 故 $x+1=a$. 同理 $y+1=b$, $z+1=c$, 代入原式引出矛盾.

熟知任一整数 $u=xbc+yca+zab$, x, y, z 为整数. 又 $xbc+yca+zab=(x+na)bc+(y+mb)ca+(z-nc-mc)ab$, 故恒可假定 $a > x \geq 0$, $b > y \geq 0$. 若 $z < 0$, 则 $u \leq (a-1)bc + (b-1)ca - ab = 2a \cdot bc - bc - ca$. 原命题得证.

4. 答案是肯定的. 如图6, 取 P, Q, R 为三边的三等分点, 使得 $AR=BP=$

$CQ = \frac{2}{3}AB$, 则易见

$PQ \perp BC$, $QR \perp CA$, $RP \perp AB$. E 的分拆

$E=E_1 \cup E_2$ ($E_1 \cap E_2 = \emptyset$) 中, 必有一子集含

P, Q, R 中至少2点, 不妨设 $P, Q \in E_1$. 若

BC 中另有一点 $M \in E_1$,

则 $\triangle QPM$ 为所求; 否则

$BC - \{P\} \subset E_2$, 若 AB 中另有一点 $N \in E_2$, N 在 BC 的投影

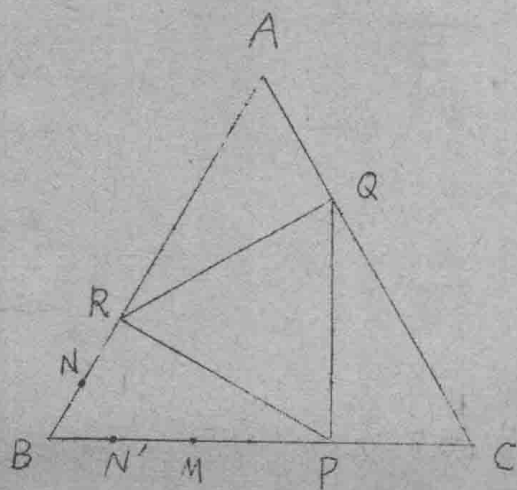


图 6