力学丛书·典藏版——21

弹性和塑性力学中的变分法

〔日〕鹫津久一郎 著

科学出版社

力学丛书·典藏版 21

弹性和塑性力学中的变分法

〔日〕鹫津久一郎 著

老 亮 郝松林 译

科 学 出 版 社

1 9 8 4

内 容 简 介

本书系统地论述变分原理及其在弹塑性力学问题中的应用。第一、二章阐述小位移弹性理论；第三、四章用直角和曲线坐标讨论有限位移弹性理论；第五章把虚功原理和变分原理推广到动力学等问题；第六至十章论述虚功原理和变分原理在杆的扭转、梁、板、壳以及结构分析中的应用；第十一和十二章讨论塑性理论中的变分原理。附录详细介绍了变分原理在有限元素法中的最新发展。

本书可供航空、土建、机械、造船等方面的力学工作者、工程技术人员、大专院校师生参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

弹性和塑性力学中的变分法 / (日) 鹫津久一郎著；老亮，郝松林译. —北京：科学出版社，2016.1
(力学名著译丛)
书名原文：Variational methods in elasticity and plasticity
ISBN 978-7-03-046972-4

I. ①弹… II. ①鹫… ②老… ③郝… III. ①弹性力学—变分法—研究 ②塑性力学—变分法—研究 IV. ① 0343 ② 0344

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 006927 号

责任编辑：赵彦超 赵敬伟 / 责任校对：邹慧卿
责任印制：张 伟 / 封面设计：陈 敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京京华虎彩印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
1984 年 1 月第 一 版 开本：850 × 1168 1/32
2016 年 3 月第二次印刷 印张：14 3/8
字数：375, 000
定价：118.00 元
（如有印装质量问题，我社负责调换）

译者的话

东京大学鹫津久一郎教授的这部名著，从1968年初版以来，深受各国固体力学与结构力学界的欢迎，经常为有关文献所引证和推荐．作者用一套条理清楚的方法和简洁明了的语言，系统地阐述了弹性和塑性理论中各种变分原理的推导及其相互间的关系，从理论上明确提出用拉格朗日乘子法来建立广义变分原理的观点，并结合杆、梁、板、壳、桁架和框架等结构的具体应用进行了论述．各章附有一定难度的习题，以帮助读者进一步掌握有关内容．在1975年修订的第二版中，又增加了几十页附录，专门论述变分原理在有限元素法中的最新发展．

我们确信，不论就掌握变分原理来说，还是对领会弹性和塑性理论中的有限位移理论、增量理论、曲线坐标、板壳理论以及有限元素法而言，读者都会从本书的论述中得到有益的启示．

原著中的许多数学名词，大都是按《英汉数学词汇》译出，间或参照了《数学名词》及其补编和国内某些惯用的译法．鉴于国外作者的译名并无统一规定，所以这里一律采用原文．原著中参考文献均用英文书写．为读者查阅方便，这里尽量改用原出版的文种书写．此外，原著中存在的笔误或印刷错误，一经发现均已更正，译本中不再一一注明．

翻译工作始终是在周鸣溪教授的热情关怀和具体指导下进行的．华天瑞和周之桢两位副教授也参加了部分翻译工作．在此谨致谢意．

限于水平，译文中不当之处在所难免，欢迎批评指正．

译　者

1981年8月

第一版序言

作者写这本书的目的是为高年级工科学生提供一本论述弹性和塑性力学变分公式推导的教科书. 重点放在表明虚功原理和有关的变分原理在系统地推导控制方程和相应边界条件时的功用.

本书大致分为三个部分. 第一部分,从第一章到第五章,涉及弹性理论的基础. 第一章和第二章讨论小位移弹性理论. 第三章讨论有限位移理论——都是采用直角笛卡儿坐标系. 第四章系统地阐述了用曲线坐标系表示的有限位移弹性理论. 第五章把虚功原理和有关的变分原理推广到初应力、初应变和动力学方面的若干问题.

第二部分,从第六章到第十章,讨论了虚功原理和变分原理在弹性力学中一些特殊问题的应用. 这些问题包括杆的扭转、梁、板、壳和结构的分析,并表明了这些原理在获得近似控制方程和相应边界条件时的功用.

第三部分,第十一章和第十二章,讨论了塑性理论中的变分原理. 第十一章论述塑性力学变形理论. 第十二章论述塑性力学流动理论,讨论了有关的变分原理和极限分析法.

设想读者们都具有一定的弹性力学、塑性力学和变分学的知识. 由于篇幅的限制, 本书略去了变分学原理的叙述. 作者仅在绪论的末尾列出几本有关变分学的书籍,以便读者参阅.

(下略)

鹫津久一郎

1965年9月

第二版序言

变分原理和它在许多力学分支包括弹性力学和塑性力学等方面的应用，已有一段很长的发展历史．但是，这个原理的重要性由于近年来大量发展了有限元素法的应用而更加突出起来．自从M. J. Turner等人的先驱著作于1956年在*Journal of Aeronautical Sciences*, Vol. 23, No.9发表以来，有限元素法已经被广泛地应用于结构分析．从那时起，已经反复证明，在有限元素法的数学推导中变分原理提供了一个强有力的工具．反过来，有限元素法的迅速发展也对变分原理的进展，给以很大的促进．在过去的十年里，已经发展了若干变分原理的新形式，在本书附录I的第一节里有简要的介绍．

鹫津久一郎教授著作的第一版(书名是Variational Methods in Elasticity and Plasticity，出版于1968年)深受从事固体力学和结构力学的工程师、教师和学生的欢迎．这本书的出版是适时的，因为它和有限元素法之应用的迅速发展时期正好切合．第一版的基本特点是，提供了一套有条不紊的方法，用来推导弹性和塑性力学的一些变分原理，以及把一个变分原理变换到另一个变分原理，同时对有限元素法的数学推导提供了一个系统的基础．在有关有限元素法的文献里，本书得到广泛的应用并经常被它们所引证．

现在，鹫津教授已编撰好增加一个新附录I的修订版．这个新的附录介绍了一些变分原理的概要，这些原理在弹性和塑性力学中，包括与有限元素法有关的新发展的变分原理，常常被用作数学推导的基础．如同第一版那样，附录I用明了、简洁和优雅的文体写成，在这方面鹫津教授是负有盛名的．这个修订版应该成为图书馆和所有对固体力学和结构力学有兴趣的人们参考书架上一

本很有价值的新添读物.

国家科学基金会　R. L. Bisplinghoff

于华盛顿

目　录

绪　论

变分学是数学的一个分支，它研究一些函数的函数(即泛函)的驻值性质．这样，变分学的目的就不是求含有有限个变量的函数的极值，而是在一组容许函数*中选定一个函数，使给定的泛函取驻值[1]．一个熟悉的例子是，在指定空间内连接两点的各容许曲线*中，选定这样的曲线，使两点间沿该曲线的距离为最短．而寻求以最小周长包围给定面积的曲线的问题，则是另一个典型的例子．

变分学在数学物理中有着广泛的应用．这是因为一个物理系统的性状常常使得与其性状有关的某种泛函取驻值．换句话说，我们往往发现物理现象所遵循的方程，就是某些变分问题的驻值条件．光学中的 Fermat 原理可以作为一个典型的例子．这个原理指出，光线在两点间沿需时最短的路径传播．由此立即导致在任何均匀介质中光线按直线传播的结论．

力学是数学物理的领域之一，其中对变分方法已经广泛地研究过．我们将以质点系的问题为例，来回顾一下它的变分公式的推导[2]．

首先，我们来考虑一个质点系在外力和内力作用下处于静力平衡的问题．众所周知，变分公式推导的基础是虚功原理[3]，这个原理可叙述如下：假定一个力学系统在作用力和给定的几何约束下处于平衡状态．那么，存在于系统内的外力和内力在满足给定几何约束的任意无限小虚位移上所作的全部虚功之和(用 $\delta'W$ 表示)为零：

* 这里将 admissible 一词译作“容许”，也常译为可取的、可能的等等．——译者注

1) 关于变分学的详细论述，见参考文献[1—8]．

2) 关于在力学中变分法的详细论述，见参考文献[2, 9, 10, 11]．

3) 这个原理亦称为虚位移原理．

$$\delta' W = 0. \tag{1}$$ [1]

这个原理也可改述如下：如果对于满足给定几何约束的任意无限小虚位移，力系所作的虚功之和$\delta' W$为零，则此力学系统处于平衡状态．这样，虚功原理就等价于系统的平衡方程．然而，对于力学问题的公式推导来说，前者的应用领域比后者更为广泛．当所有外力和内力都可由位势函数U(它是质点系坐标的函数)导出[2]，从而使

$$\delta' W = -\delta U, \tag{2}$$

则由虚功原理可以导致驻值势能原理的建立：在所有的容许位形中，平衡状态是由势能U的驻值性质来表征的：

$$\delta U = 0. \tag{3}$$

上面的论述可以推广到质点系的动力学问题中去，这时系统所受的作用力和几何约束都与时间有关．d'Alembert 原理指出，如果考虑了惯性力就可以把系统看作是处于平衡状态的．运用这个原理，只要把表明惯性力所作虚功的各项包括在内，就可以象静力学问题那样导出动力学问题的虚功原理．把这样得到的原理在两个界限 $t=t_1$ 和 $t=t_2$ 内对时间 t 积分．通过分部积分并利用在界限处没有虚位移的约定，我们最后得到动力学问题的虚功原理如下：

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta' W dt = 0, \tag{4}$$

式中T是系统的动能．由于从这样得到的虚功原理可以导出系统的 Lagrange 运动方程，所以很显然，这个原理对于推导具有几何约束的质点系运动方程是非常有用的．

当进一步确认可以由位势函数 U 导出所有的外力和内力时，我们就得到 Hamilton 原理，其中位势函数的定义和方程 (2) 相同，而且是坐标和时间的函数[3]．这个原理指出，只要在界限 $t=t_1$

---

1) $\delta' W$ 不是某状态函数 W 的变分，而只表示总虚功．

2) 这种类型的力称为保守力．

3) 如果 U 与时间无关，这个力就称为保守力．在参考文献[2]中，对于可从纯量导出的力给予"单演"的名称，在最一般的情况下这个纯量是质点的速度和坐标以及时间的函数．

和 $t=t_2$ 处给定系统的位形，则在系统的所有容许位形中，真实的运动状态使量

$$\int_{t_1}^{t_2}(T-U)dt \tag{5}$$

取驻值. Hamilton 原理可以用数学形式表示如下:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}Ldt=0, \tag{6}$$

式中 $L=T-U$ 是系统的 Lagrange 函数. 众所周知，利用 Legendre 变换可以把 Hamilton 原理变换为一个新的等价的原理，而 Lagrange 运动方程则简化为所谓的典型方程. 对 Hamilton 原理的变换已经有过广泛的研究，并已建立起一个通称为典型变换的完善的理论.

本书的主要目的是系统地导出弹性力学和塑性力学中的虚功原理和有关的变分原理[1]. 我们将以类似于质点系问题的方式来推导这些原理. 其梗概如下: 讨论一个固体在体力作用和在物体表面上给定的力学和几何边界条件下保持静力平衡的问题. 我们从推导虚功原理开始. 这个原理等价于固体的平衡方程和力学边界条件，而且是为小位移理论和有限位移理论导出的[2]. 在小位移理论的范围内我们得到另一个原理，称为余虚功原理[3]. 特别值得提出的是，虚功原理和余虚功原理在各种坐标变换中均保持不变，而且它们和物体材料的应力-应变关系无关. 然而，在推导变分原理的公式时必须考虑应力-应变关系，而且对弹性和塑性理论也必须分别处理.

小位移弹性理论为变分法提供了最有成效的应用领域之一. 当确认了应变能函数的存在，又假定在位移变化的过程中外力

---

1) 关于弹性力学和塑性力学中的变分原理，见参考文献[11—20].

2) 在小位移理论中，假定位移小到允许固体的所有控制方程(应力-应变关系除外)线性化. 因而在小位移理论中，平衡方程、应变-位移关系式和边界条件都简化为线性化的形式.

3) 这个原理亦称为虚应力原理，虚力原理或应力状态虚变化原理.

保持不变时，虚功原理就可导致最小势能原理的建立．通过引进 Lagrange 乘子把变分原理加以推广，就产生一整族的变分原理，包括 Hellinger–Reissner 原理，最小余能原理，等等．

另一方面，当应力-应变关系保证余能函数的存在，又假定在应力变化的过程中几何边界条件保持不变时，余虚功原理就可导致最小余能原理的建立．通过引进 Lagrange 乘子把最小余能原理加以推广，就产生 Hellinger–Reissner 原理，最小势能原理，等等．由此可见，对小位移弹性理论来说，这两条推导变分原理的途径是彼此可逆和等价的．

在有限位移弹性理论中，当确认了物体材料的应变能函数和外力的位势函数的存在时，虚功原理就可导致驻值势能原理的建立．一旦这样地建立了驻值势能原理，就可以通过利用 Lagrange 乘子来把它推广．

将惯性力考虑进去，可以把上述方法推广到弹性体的动力学问题．于是，引入动能的概念，我们可导出动力学问题的虚功原理．在假定应变能函数和外力的位势函数存在的前提下，虚功原理就转换成为变分原理．新得到的变分原理可以看作是推广到弹性体动力学问题的 Hamilton 原理，而且可以通过利用 Lagrange 乘子把它推广．

弹性力学问题的变分原理通过驻值条件提供问题的控制方程，并在此意义上和控制方程等价．然而，用变分公式表示有几个优点．第一，经受变分的泛函通常具有明确的物理意义，而且在坐标变换中保持不变．因而，一旦变分原理按某一坐标系列出了公式，就可以得到用另一坐标系表示的控制方程，只要首先写出新坐标系内的不变量，然后应用变分方法即可．例如，一旦变分原理按直角笛卡儿坐标系列出了公式，通过上述方法就可以得到用柱面坐标系或极坐标系表示的控制方程．可以看出，这一属性使变分法在结构分析中非常有效．

第二，用变分公式表示有助于实现一个通用的数学步骤，这就是说，把给定的问题变换成为一个比原来更易于求解的等价问题．

在带有一些约束条件*的变分问题中，用 Lagrange 乘子法可以完成这一变换，这是一种非常有效而有条理的方法。于是，我们就可以推导出一整族彼此等价的变分原理。

第三，变分原理有时可以得出所研究问题精确解的上界或下界公式。就像第六章将要表明的那样，同时运用两个变分原理可以给杆的扭转刚度提供上界和下界公式。另一个例子是，从驻值势能原理导出一个弹性体自由振动最低频率的上界公式。

第四，当弹性力学问题不能精确求解时，变分法常常给问题提供一种近似的公式表示，由此得到与所采用的近似度相适应的解。在这里，变分法不仅提供近似的控制方程，而且也提供了近似边界条件的提示。因为除若干特殊情形外，几乎不大可能得到弹性力学问题的精确解，所以为了实用的目的，我们必须满足于近似解。梁、板、壳和多元结构的理论就是这种用近似公式表示的典型例子，它们显示出虚功原理和有关的变分法的效能。然而，在信赖这样得到的近似解的精确度时，我们应当慎重。例如，考虑 Rayleigh-Ritz 法结合驻值势能原理的应用。如果容许函数选择得当，这个方法可以为物体的位移提供一个良好的近似解。但是，从近似位移算出的应力分布，其精确度就不是那样可靠了。这是明显的，只要我们记得在近似法所得的控制方程中，精确的平衡方程和力学边界条件已经为它们的加权平均值所代替，而且近似解的精确度随着取微分而降低。因此，在近似解中，通常平衡方程和力学边界条件至少是局部地遭到了破坏。在理解这样得到的近似解时，St. Venant原理有时是有帮助的。它指出[14]："如果作用在弹性体表面微小部位上的力系，由作用在同一表面部位上的另一静力等效的力系所代替，则这种载荷的重新分布会局部地引起应力的显著变化，但在距离大于力系被更换表面的线性尺寸的各点处，对应力的影响就可以忽略不计。"

由于作者的偏爱，弹性力学问题的近似控制方程将常常从虚

* subsidiary condition，日文为付带条件，《英汉数学词汇》为附加条件或辅助条件。这里按国内有关论著采用的名词译出。——译者注