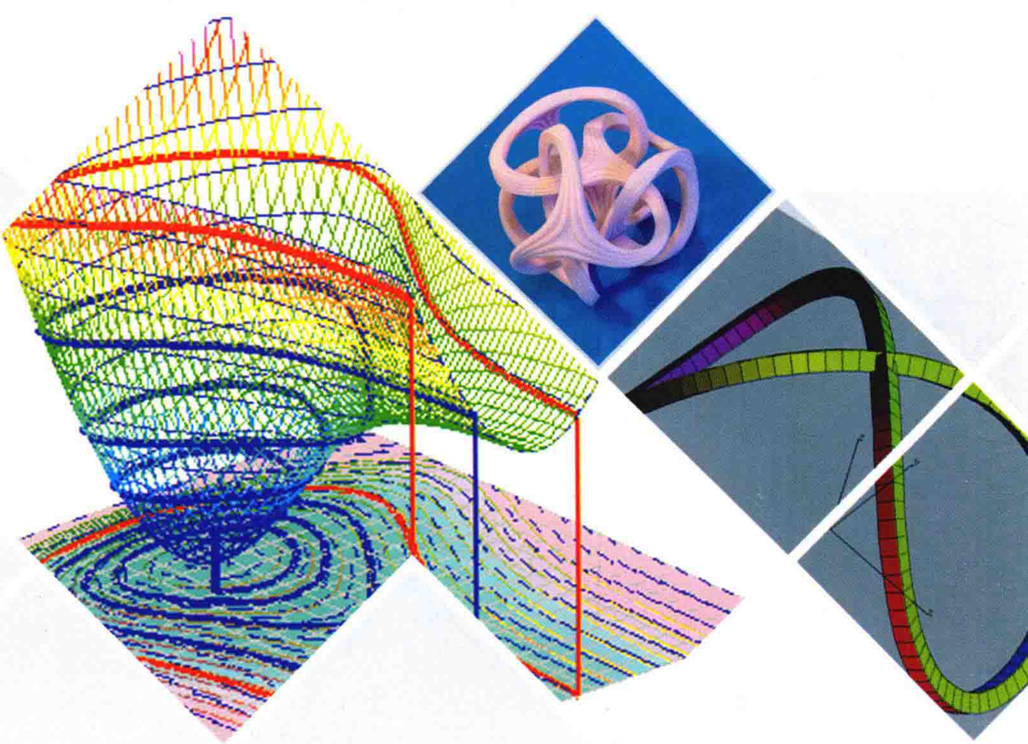
高等教育“十一五”规划教材
高职高专公共课教材系列

实用线性代数

徐秀娟 主 编



科学出版社
www.sciencep.com

高等教育“十一五”规划教材

高职高专公共课教材系列

实用线性代数

徐秀娟　主　编

何亚丽　张　帅　副主编

佟玉霞　李丽红　梁彦冰　刘琳琳　崔玉环　参　编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书共分6章，其内容包括矩阵与行列式、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、矩阵的相似对角化、二次型以及数学软件（Mathematica）在线性代数中的应用等。本书以矩阵为主线将线性代数中的主要内容穿插起来，层次清晰，特别注重可读性与实用性。

本书的编写力求引进概念自然浅显，定理证明简明易懂，例题选取典型适当，应用实例背景广泛，使难点分散，便于教学，充分体现具体一抽象一具体的辩证思维过程。每节配有理解、反思与探究题，每章后均有两个层次的适量习题和阶段测试题一套，书末附有答案。

本书可作为高职高专院校各专业线性代数课程的教材，也可供科技工作者或其他在职人员的自学用书。

图书在版编目(CIP)数据

实用线性代数/徐秀娟主编. 一北京：科学出版社，2010.2
（高等教育“十一五”规划教材·高职高专公共课教材系列）
ISBN 978-7-03-026800-6

Ⅰ.①实… Ⅱ.①徐… Ⅲ.①线性代数-高等学校：技术学校-教材
Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第024920号

策划：赖文华
责任编辑：王 彦 隽青龙/责任校对：柏连海
责任印制：吕春珉/封面设计：耕者设计工作室

科 学 出 版 社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

2010年2月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2014年2月第七次印刷 印张：12 1/4
字数：271 000

定价：20.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉）
销售部电话 010-62136131 编辑部电话 010-62138978-8208

编　委　会

前　　言

为更好地适应我国高等教育改革发展的现实需要，提高基础数学教育教学水平，结合高职高专院校线性代数课程教学的基本要求和长期教学实践经验，以“遵循体系完整、简约实用”为原则，以“因需施教、科学供给、优质服务、全面提高”为目的，编写出这本符合时代特征、让师生易于接受、拿起来就能用的比较生动的线性代数教材。

本书力求在概念与理论、方法与技巧、实践与应用三方面做出较为合理的安排，遵循从具体到抽象、从特殊到一般的原则，对基本概念，尽可能以简明、自然、浅显的实例导入一般概念；在讲清基本理论的基础上，对理论推导部分做了适当的简约处理，把重点放在对实际问题的分析和基本方法的掌握上，在强化线性代数知识应用的基础上并不影响其整体的科学性、系统性和严密性。

本书以矩阵为主线将线性代数中的主要内容穿插起来，充分体现矩阵在线性代数中的核心地位；关于行列式，采用简便的递归法来定义 n 阶行列式，这比用逆序法定义更容易掌握；关于向量空间，以几何空间中的向量为切入点，抽象出 n 维向量的概念及其运算，利用线性方程组解的有关结论与矩阵方法讨论向量组的线性相关性，使抽象概念具体化。

为培养学生的发散性思维，例题的求解尽量给出多种解法，力求反映不同的思考方式及其联系，目的是激发学生潜能，开发学生的学习能力。

为扩展知识的横向与纵向的联系，提高学生学习线性代数的兴趣，通过增添具有广泛实际背景的典型例题，引导学生尝试用线性代数知识分析和解决简单的实际问题，但跳过这些例题也无损于教学内容的连贯性。

适量引入用 Mathematica 软件求解线性代数中的相关问题，既不占用过多的学时，又能使学生加深对本课程的理解，同时学会借助现代信息技术，利用数学知识解决实际问题的方法，开拓学生视野，增强学习线性代数的兴趣。

思考和演算一定数量的习题是学好线性代数的必由之路。本书每节后的思考题，针对本节内容有感而出，既有知识性的题目，又有富于启发性、开放性的探究性题目，以便学生学完每节后做更深入的思考。每章后都以两种形式给出习题，并附有阶段测试题，其中习题（A），确保学生完成，意在保证学生熟练掌握基本知识和基本方法；习题（B），激励学生完成，意在提升学生的学习能力。阶段测试题意在检测学生的阶段学习情况，书末附有习题答案。

建议本教材的教学时数为 32～36 课时，带 * 的内容可选讲。

由于编者水平有限，书中疏漏和不妥之处，恳请同行、读者指正。

编者

2010 年 1 月

目　　录

第 1 章　矩阵与行列式

线性代数是研究离散变量之间线性关系的基础理论之一，矩阵与行列式是线性代数中重要且应用广泛的两个概念，两者之间既有区别又有联系。矩阵是一个数表，它的行数与列数可以不同；行列式是一种代数运算公式，可将其视为方阵的函数；同时，行列式又是方阵特性的一个重要标志。

本章从实际问题出发，引入矩阵、行列式的概念，介绍有关矩阵、行列式的基本性质及其常用的计算方法，并涉及了它们的一些简单应用。

1.1　矩阵及其运算

矩阵是线性代数的主要研究对象之一。作为一种非常重要的数学工具，矩阵在数学以至自然科学、工程技术、经济管理、日常生活等诸多领域有广泛的应用。

1.1.1　矩阵的概念

许多实际问题的解决，都可以归结为处理一些数，不仅要描述它们，还要研究它们之间的关系。

【例 1.1】　图 1.1 所示为某航空公司在 4 个城市之间的航行运行图，其中 A、B、C、D 表示 4 个城市，从城市 A 到 B 有有向线段就表示从城市 A 到 B 有航班，否则就没有航班。

若从城市 A 到 B 有航班，用数字 1 表示，从城市 A 到 B 没有航班，用数字 0 表示，则图 1.1 也可用下面的矩形数表来表示：

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

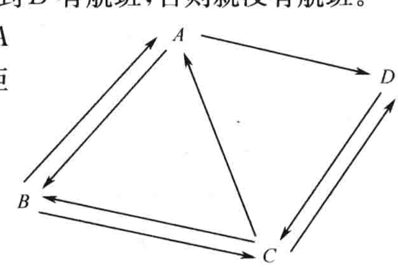


图 1.1

【例 1.2】　某港口在 1 月份发往 3 个地区的两种货物的数量如表 1.1 所示。

表 1.1

货物 地区	甲	乙
北京	200	140
天津	150	180
上海	70	40

在表 1.1 中,我们主要关心的对象是其中的数据,若将它们按原来的次序排列成矩形数表,并加上括号以表示这些数据是一个整体,则有:$\begin{pmatrix} 200 & 140 \\ 150 & 180 \\ 70 & 40 \end{pmatrix}$。

如果上述两种货物的单位价格、单位重量、单位体积如表 1.2 所示。

表 1.2

单位 / 货物	价格/百元	重量/千克	体积/立方米
甲	2	0.9	0.3
乙	3.5	0.5	0.25

同样由表 1.2 中的数据也可得到矩形数表:$\begin{pmatrix} 2 & 0.9 & 0.3 \\ 3.5 & 0.5 & 0.25 \end{pmatrix}$。

【例 1.3】 中学代数中学过的二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

其解的情况仅与方程组中未知量 x_1,x_2 前面的系数 a_{ij} ($i=1,2$;$j=1,2$) 以及常数项 b_1,b_2 有关,若把方程组中未知量前面的系数及常数项按它们在方程组中的位置不变排成一个矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix}$$

则正是这个数表中的数决定了方程组(1.1)的解。即如果给定了一个线性方程组的全部系数和常数项,那么除了未知数的符号外,这个方程组就确定了,因此研究线性方程组(1.1),也就只需研究上述的数表。

从例 1.1～例 1.3 可以看出,这些来自不同背景的实际问题都可用一个类似数表的形式表示,数表的行数和列数可以相同,也可以不同。将这些数表一般化,便有如下定义

定义 1.1 由 $m\times n$ 个数 a_{ij} ($i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots, n$)排成的 m 行 n 列(横称行,纵称列,并括以圆括号或方括号)的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m\times n$ 矩阵,其中 a_{ij} ($i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots, n$)称为这个矩阵的第 i 行第 j 列元素,也称为该矩阵的(i, j)元。

通常用单个大写字母如 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\cdots$, 等表示矩阵,有时为强调矩阵的行数与列数,上述 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也记为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{mn}$。

根据上述定义便知,例 1.1 中图 1.1 的数据就组成了一个 4×4 矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

例 1.2 中的表 1.1 的数据就组成了一个 3×2 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 200 & 140 \\ 150 & 180 \\ 70 & 40 \end{pmatrix}$，而表 1.2 的数据组成了一个 2×3 矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 0.9 & 0.3 \\ 3.5 & 0.5 & 0.25 \end{pmatrix}$。

例 1.3 中确定二元线性方程组(1.1)的数表是一个 2×3 矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix}$，通常称之为方程组(1.1)的增广矩阵；而由方程组中未知量的系数构成的矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$，称为方程组(1.1)的系数矩阵。

元素为实数的矩阵称为实矩阵，元素为复数的矩阵称为复矩阵。本书中的矩阵除特别声明外，都指实矩阵。

若两个矩阵的行数相同、列数也相同，则称它们是同型矩阵。

定义 1.2　设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 是同型矩阵，若它们的元素对应相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}\qquad(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$。

1.1.2　几种特殊的矩阵

对于 $m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，若

(1) $m=1$，即只有一行的矩阵称为行矩阵，也称行向量。记作 $\boldsymbol{A}=(a_1\ a_2\cdots\ a_n)$。

(2) $n=1$，即只有一列的矩阵称为列矩阵，也称列向量。记作 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$。

(3) 元素 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 都是零的矩阵称为零矩阵，记作 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$。

(4) $m=n$，即行数与列数相等的矩阵称为 n 阶方阵，或 n 阶矩阵，记作 $\boldsymbol{A}_n$。

特别地，一阶方阵等同于构成它的元素。

对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，从左上角元素到右下角元素的那根联线称为矩阵的主对角线，其中元素 $a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线元素，从右上角元素到左下角元素的那根联线称为矩阵 A 的副对角线。

(5) 对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，若非零元素只出现在主对角线及其上(或右)方，则称 $\boldsymbol{A}$ 为上

三角形矩阵，记作 $\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$。例如，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$是一个 3 阶上三角形矩阵。

(6) 对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，若非零元素只出现在主对角线及其下(或左)方，则称 $\boldsymbol{A}$ 为下三角形矩阵，记作 $\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$。例如，$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 8 & 0 \\ 7 & 9 & 0 & 3 \end{pmatrix}$是一个 4 阶下三角形矩阵。

(7) 一个既是上三角形又是下三角形(即非零元素只可能在主对角线上出现)的矩阵，称为对角形矩阵，记作 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$。例如，$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$是一个 3 阶对角形矩阵。

显然，由对角线上的元素就足以确定对角形矩阵本身，故上述对角形矩阵也可记作

$$\boldsymbol{\Lambda} = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$$

(8) 主对角线上的元素都等于某个数 k 的对角形矩阵称为纯量矩阵或数量矩阵，特别地，称 $k=1$ 时的纯量矩阵为单位矩阵，记作 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{I}$。

例如，矩阵$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$是一个 4 阶数量矩阵，而$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$就是 3 阶单位矩阵。

有关矩阵的运算包括矩阵的加法、数与矩阵相乘、矩阵的乘法、矩阵的转置等。正是有了这些运算，矩阵之间也就有了一些最基本的关系，从而使矩阵能与其他学科的实际问题密切相关，成为方便简捷的表达手段。

1.1.3 矩阵的线性运算

矩阵的加法、数乘运算统称为矩阵的线性运算。

定义 1.3 给定两个 $m\times n$ 矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和，记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，规定为

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

注意，只有同型矩阵方可相加，而且相加后得到的新矩阵与原矩阵同型，其每个元素是原来两矩阵对应元素之和。

定义 1.4　数 λ 和矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 的乘积，简称数乘，记作 λA，规定为

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

注意，数乘矩阵，需把这个数乘该矩阵的每一个元素，数乘得到的新矩阵是与原矩阵同型的矩阵。特别地，当 $\lambda=-1$ 时，把 $(-1)A$ 称为 A 的负矩阵，记作 $-A$。

规定了矩阵的加法以及数与矩阵乘法，便有如下矩阵的减法。

矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $B=(b_{ij})_{m\times n}$ 的差，记作 $A-B$，规定为

$$A-B=A+(-1)B=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$$

例如，若
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

则
$$3A=\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 15 & 6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},-B=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},A-B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

矩阵的线性运算满足如下规律：

设 k,l 为数，A,B,C 为同型矩阵，则有：

(1)加法结合律　$(A+B)+C=A+(B+C)$

(2)加法交换律　$A+B=B+A$

(3)数乘结合律　$k(lA)=(kl)A$

(4)数乘分配律　$k(A+B)=kA+kB$

$(k+l)A=kA+lA$

(5) $A+(-A)=O;A+O=A$

【例 1.4】　已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ 求矩阵 $2A-3B$。

【解】　根据矩阵的线性运算法则，有

$$2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}=2\begin{pmatrix}1&4&0\\-1&0&3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2&0&1\\1&3&-1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2-6&8-0&0-3\\-2-3&0-9&6+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&8&-3\\-5&-9&9\end{pmatrix}$$

【例 1.5】 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\3&2\\-2&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1\\3&0\\0&-1\end{pmatrix}$，且满足 $3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$。

【解】 由已知 $3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，得 $2\boldsymbol{X}=3\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，从而有

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}(3\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$$

又因为

$$3\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3\times1-1&3\times(-1)-1\\3\times3-3&3\times2-0\\3\times(-2)-0&3\times1-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-4\\6&6\\-6&4\end{pmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&-4\\6&6\\-6&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\3&3\\-3&2\end{pmatrix}$$

1.1.4　矩阵的乘法

矩阵乘法是一种有关矩阵的极其特别的运算，矩阵运算中所具有的特殊规律主要产生于矩阵的乘法运算。在给出矩阵乘法定义之前，我们先看一个实例。

在给出矩阵乘法定义之前，我们先看一个实例。

【例 1.6】 若某港口某月份发往 3 个地区的两种货物的数量如例 1.2 中的表 1.1 所示，并且这两种货物的单位价格、单位重量、单位体积如表 1.2 所示，求该港口分别发往三个地区的货物的总价格、总重量、总体积。

【解】 根据表 1.1 和表 1.2 可知，

该港口发往北京地区的货物的总价格

＝发往北京地区的货物甲的数量×货物甲的单位价格

　＋发往北京地区的货物乙的数量×货物乙的单位价格

＝200×2＋140×3.5＝890；

该港口发往北京地区的货物的总重量

＝发往北京地区的货物甲的数量×货物甲的单位重量

　＋发往北京地区的货物乙的数量×货物乙的单位重量

＝200×0.9＋140×0.5＝250；

该港口发往北京地区的货物的总体积

＝发往北京地区的货物甲的数量×货物甲的单位体积

　＋发往北京地区的货物乙的数量×货物乙的单位体积

$=200\times0.3+140\times0.25=95$，

类似地，对发往其它两个地区的货物作相应运算，可得表 1.3。

表 1.3

地区	总价格	总重量	总体积
北京	890	250	95
天津	930	225	90
上海	280	83	31

把表 1.3 中的数据写成 3×3 矩阵 $\boldsymbol{C}$，则有

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}890 & 250 & 95\\930 & 225 & 90\\280 & 83 & 31\end{pmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 行，第 j 列元素 $c_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3)$ 恰好是表 1.1 中的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}200 & 140\\150 & 180\\70 & 40\end{pmatrix}$ 的第 i 行的每个元素与表 1.2 中的矩阵 $B=\begin{pmatrix}2 & 0.9 & 0.3\\3.5 & 0.5 & 0.25\end{pmatrix}$ 的第 j 列对应元素乘积之和。

一般地，有如下定义

定义 1.5　设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是一个 $n\times l$ 矩阵，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l}\\b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nl}\end{pmatrix}$$

把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的乘积记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$，规定为

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{1k}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n}a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n}a_{1k}b_{kl}\\\sum\limits_{k=1}^{n}a_{2k}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n}a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n}a_{2k}b_{kl}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\\sum\limits_{k=1}^{n}a_{mk}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n}a_{mk}b_{k2} & \cdots & \sum\limits_{k=1}^{n}a_{mk}b_{kl}\end{pmatrix}$$

即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 乘积 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$ 是一个 $m\times l$ 矩阵，它的第 i 行第 j 列元素 c_{ij} 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行 n 个元素与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列相应的 n 个元素对应乘积之和，即

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\qquad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

注意，只有当前一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于后一个矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数时，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 才可以相乘，并且乘积矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的行数等于 $\boldsymbol{A}$ 的行数，而列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的列数。

【例 1.7】 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\4&3&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&3\\2&1\\3&0\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$。

【解】 因为 $\boldsymbol{A}$ 是 2×3 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 3×2 矩阵，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可乘，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 也可乘，并且

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&0&2\\4&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&1\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1+0\times2+2\times3 & 1\times3+0\times1+2\times0\\4\times1+3\times2+1\times3 & 4\times3+3\times1+1\times0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&3\\13&15\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1&3\\2&1\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\4&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1+3\times4 & 1\times0+3\times3 & 1\times2+3\times1\\2\times1+1\times4 & 2\times0+1\times3 & 2\times2+1\times1\\3\times1+0\times4 & 3\times0+0\times3 & 3\times2+0\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&9&5\\6&3&5\\3&0&6\end{pmatrix}$$

由此例可知，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，即矩阵乘法不满足交换律。

【例 1.8】 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(4\quad -1\quad 2)$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$。

【解】 由矩阵乘法的定义，可得

$$\boldsymbol{AB}=(4\quad -1\quad 2)\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=(4\times1+(-1)\times0+2\times2)=(8)$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}(4\quad -1\quad 2)=\begin{pmatrix}1\times4 & 1\times(-1) & 1\times2\\0\times4 & 0\times(-1) & 0\times2\\2\times4 & 2\times(-1) & 2\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-1&2\\0&0&0\\8&-2&4\end{pmatrix}$$

【例 1.9】 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$。

【解】 由矩阵乘法的定义，得

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1+(-1)\times1 & 1\times2+(-1)\times2\\-1\times1+1\times1 & -1\times2+1\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

同理可得

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&1\end{pmatrix}$$

此例说明当 $\boldsymbol{AB}=0$ 时，并不能得出 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 至少有一个为零矩阵。

【例 1.10】 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1\\4&6\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1\\5&6\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{AC}$，$\boldsymbol{BC}$。

【解】 由矩阵乘法的定义，得

$$\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}3&1\\4&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times0+1\times1 & 3\times0+1\times1\\4\times0+6\times1 & 4\times0+6\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\6&6\end{pmatrix}$$

同理可得

$$BC=\begin{pmatrix}2&1\\5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\6&6\end{pmatrix}$$

由此例题可知，虽然有 $AC=BC$，但是 $A\neq B$，即矩阵乘法不满足消去律。矩阵乘法运算有许多地方与通常数的乘法运算规律大相径庭，这是需要读者着重注意的地方。

【例 1.11】 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}$，$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，证明 $EA=A$。

【证】 由矩阵乘法的定义，可得

$$EA=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\times a_{11}+0\times a_{21}+0\times a_{31} & 1\times a_{12}+0\times a_{22}+0\times a_{32} & 1\times a_{13}+0\times a_{23}+0\times a_{33} & 1\times a_{14}+0\times a_{24}+0\times a_{34}\\ 0\times a_{11}+1\times a_{21}+0\times a_{31} & 0\times a_{12}+1\times a_{22}+0\times a_{32} & 0\times a_{13}+1\times a_{23}+0\times a_{33} & 0\times a_{14}+1\times a_{24}+0\times a_{34}\\ 0\times a_{11}+0\times a_{21}+1\times a_{31} & 0\times a_{12}+0\times a_{22}+1\times a_{32} & 0\times a_{13}+0\times a_{23}+1\times a_{33} & 0\times a_{14}+0\times a_{24}+1\times a_{34}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}=A$$

由此例题可知，单位矩阵在矩阵乘法中的作用类似于数 1 在数的乘法中的作用。此结论的一般情形为：设 A 是 $m\times n$ 矩阵，则有 $E_mA=AE_n=A$
特别地，当 A 为 n 阶方阵时，有

$$EA=AE=A\quad（其中 E 为 n 阶单位矩阵）$$

矩阵乘法满足如下运算规律（假设其中的运算都是可行的）

(1)乘法结合律　$(AB)C=A(BC)$

$k(AB)=(kA)B=A(kB)$

(2)乘法分配律　$A(B+C)=AB+BC$

$(B+C)A=BA+CA$

1.1.5 方阵的乘幂

利用矩阵的乘法，可以定义一个方阵的乘幂。

定义 1.6 设 A 为 n 阶方阵，则 A 的 m 次幂 A^m 规定为

$$A^m=\underbrace{A\cdot A\cdots A\cdot A}_{m个}（m 是正整数）$$

特别地，规定 $A^0=E$，由方阵乘幂的定义可以证明，方阵的乘幂满足如下运算规律：