微分几何习题集

张文贵 译

天津师范学院数学系

前　　言

为了配合教学，将苏联П．К．ТУТАЕВ主编的“微分几何习题集”（1963年版）全文译出，供教学中参考。

在翻译中，对原书所采用的符号作了改变，尽量选用吴大任教授编“微分几何讲义”（1979年版）中所用符号，以便于师生选题。另外，对原书中一些明显错误作了修改，对此，文中不再一一指出。

在本书翻译过程中，承蒙北京师大数学系朱鼎勋副教授给予很大鼓励与指导，并亲自审阅了译稿。在此译者向朱鼎勋老师表示衷心的感谢。

张文贵

1979年11月

序　　言

我们认为习题集必须适应当前高等院校的实际情况，应尽量包括更多的能帮助读者理解所讨论内容的几何意义的练习。另外，还应包括一定数量的关于曲线与曲面度量、仿射和射影性质的问题。

本习题集参考了下列课本与习题集：

Норден А. П：《微分几何简明教程》（1958）；

Погорелов А. В：《微分几何讲义》（1956）；

Гюнтер Н. М，Кузъмин Р. О：《高等数学习题集》（1958）；

Житомирский О. К，Львовский В. Д，Милинский В. И：《高等数学习题集》（Ⅱ）（1937）；

Моденов П. С：《微分几何习题集》（1949）；

Савелов А. А：《平面曲线》（1960）。

解答中某些插图选自 Выгодский М. Я：《微分几何》（1949）和Моденов П. С 的习题集。

目　录

Ⅰ　平面曲线

Ⅱ　空间曲线

Ⅲ　曲　　面

Ⅳ　解　　答

I 平面曲线

基本方程与公式

如果平面曲线方程用下列方程给出（在笛氏直角坐标系中）：

$$y=f(x); \quad (1)$$

$$F(x,\ y)=0; \quad (2)$$

$$x=x(t),\quad y=y(t); \quad (3)$$

$$\overline{r}=\overline{r}(t), \quad (4)$$

则在点M（x，y）曲线的切线方程分别为：

$$Y-y=y'(X-x); \quad (5)$$

$$F_x(X-x)+F_y(Y-y)=0; \quad (6)$$

$$\frac{dy}{dt}(X-x)-\frac{dx}{dt}(Y-y)=0; \quad (7)$$

$$\overline{\rho}=\overline{r}+\lambda\overline{r'}。 \quad (8)$$

其中 $y'\equiv\frac{dy}{dx}$，$F_x\equiv\frac{\partial F}{\partial x}$，$F_y\equiv\frac{\partial F}{\partial t}$，$\frac{dx}{dt}$，$\frac{dy}{dt}$，$\overline{r'}\equiv\frac{d\overline{r}}{dt}$是在点$M$（$x$，$y$）所取的导数（矢）值；$X$，$Y$—动点生标，$\overline{\rho}$—切线上任意点的径矢，$\lambda$—参数。

应该指出，如果在切点$\overline{r'}=0$，则过该切点的切线方程为：

$$\overline{\rho}=\overline{r}+\lambda\overline{r^{(n)}},$$

其中$\overline{r^{(n)}}\neq 0$是$\overline{r'}$，$\overline{r''}$，……，$\overline{r^{(l)}}$中第一个不为零的导矢。

如果平面曲线有渐近线 $y=kx+b$，则系数 $k=tg\alpha$ 与 b 可由下列公式得到：

$$tg\alpha=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x},\quad b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)。\qquad (9)$$

如果两条曲线分别用方程 $F(x, y)=0$ 和 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 给出，它们有公共点 $M_0(x_0, y_0)$，$(x_0=x(t_0)$，$y_0=y(t_0))$，并且

$$\varphi(t_0)=\varphi'(t_0)=\varphi''(t_0)=\cdots\cdots=\varphi^{(k)}(t_0)=0,$$
$$\varphi^{(k+1)}(t_0)\neq 0,$$

则称曲线在 M_0 点有 k 阶接触，其中 $\varphi(t)\equiv F[x(t), y(t)]$。

单参数曲线族 $F(x, y, c)=0$（c 是族的参数）的判别曲线方程是：

$$F(x, y, c)=0,\quad \frac{\partial F}{\partial c}=0。\qquad (10)$$

如果 F_x 和 F_y 在判别曲线的点上不同时为零，则判别曲线与族的包络重合。否则，判别曲线包含了曲线族的奇异点。

用方程（1），（3）或极坐标方程

$$r=r(\varphi),\qquad (1)$$

给出的曲线，它们的弧长微分 ds 可分别由下列公式求出：

$$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx,\quad ds=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt,$$

$$ds=\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}d\varphi。\qquad (12)$$

曲线上某个点 M_1 到另外一点 M_2 的弧长 s，可由 ds 在 x，t 或 φ 的相应取值范围内求定积分得到。

用方程（1）—（4）或（11）给出的曲线的曲率半径 R

$\left(\text{或曲率 } k=\frac{1}{R}\right)$ 分别由下列公式确定：

$$\left.\begin{array}{l}
R=\dfrac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|};\quad R=\dfrac{(F_x{}^2+F_y{}^2)^{3/2}}{\begin{vmatrix}F_{xx} & F_{xy} & F_x\\ F_{yx} & F_{yy} & F_y\\ F_x & F_y & 0\end{vmatrix}};\\[2ex]
R=\dfrac{\left[\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2\right]^{3/2}}{\begin{vmatrix}\dfrac{dx}{dt} & \dfrac{dy}{dt}\\ \dfrac{d^2x}{dt^2} & \dfrac{d^2y}{dt^2}\end{vmatrix}};\\[2ex]
R=\dfrac{|\overline{r'}|^3}{|\overline{r'}\times\overline{r''}|};\\[2ex]
R=\dfrac{\left[r^2+\left(\dfrac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{3/2}}{r^2+2\left(\dfrac{dr}{d\varphi}\right)^2-r\dfrac{d^2r}{d\varphi^2}}。
\end{array}\right\}\quad(13)$$

已给曲线的曲率中心的几何轨迹是该曲线的渐缩线，其参数方程为：

$$X=x-R\frac{dy}{ds},\quad Y=y+R\frac{dx}{ds},\quad(14)$$

其中 x，y 是已知曲线（1）—（4），（11）上任意点的坐标，而 ds 和 R 能由公式（12）与（13）给出。

若曲线 c_1 是曲线 c_2 的渐缩线，则 c_2 是 c_1 的渐伸线。因此渐

伸线方程可以由微分方程组（14）求出，在该方程组中未知函数是 x，y。还可以把已知曲线作为渐缩线来确定渐伸线。由该定义很容易写出渐伸线的向量方程（更确切地说，每条曲线具有单参数的渐伸线族方程）：

$$\overline{\rho} = \overline{r} + (c - s)\overline{\propto} \qquad (15)$$

其中 $\overline{\propto} \equiv \dfrac{d\overline{r}}{ds}$ 是已知曲线 $\overline{r} = \overline{r}(s)$ 的切线矢；c 是渐伸线族的参数。

方程 $\kappa = \kappa(s)$ 称为曲线的自然方程。其中 κ 是曲率，s 是平面曲线的弧长。自然方程同样能用参数式 $\kappa = \kappa(t)$，$s = s(t)$ 或隐式 $F(K ,s) = 0$ 给出。若已知曲线的自然方程，能够由微分方程

$$\frac{d\varphi}{ds} = \kappa\text{，}\quad \frac{dx}{ds} = \cos\varphi\text{，}\quad \frac{dy}{ds} \sin\varphi \qquad (16)$$

求出曲线的参数方程。其中 φ 是切线对于横轴的倾角。从(16)的第一个方程求出关于 s 或任一参数 t 的函数 φ，然后，积分（16）余下的方程，即可得到曲线的参数方程。

平面曲线的弗朗内—塞雷公式是：

$$\frac{d\overline{\propto}}{ds} = \kappa\, \overline{n}\text{，}\quad \frac{d\overline{n}}{ds} = - \kappa\, \overline{\propto}\text{，} \qquad (17)$$

其中 $\overline{\propto}$ 是单位切线矢，$\overline{n}$ 是平面曲线的单位法线矢。

§1 切线，法线，渐近线，曲线的讨论与作法。曲线间的接触。包络。

1. 建立以下曲线的切线和法线方程：

1) $\overline{r}=\{a\cos^3 t,\ a\sin^3 t\}$ （星形线）(astroid)；

2) $\overline{r}=\{a(t-\sin t),\ a(1-\cos t)\}$（摆线）(cycloid)；

3) $\overline{r}=\left\{\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{4}t^4,\ \frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3\right\}$ 在点 $t=0$；

4) $r=a\varphi$（阿基米德螺线）(spiral of Archimedes)；

5) $(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$（卡西尼卵形线）(oval of Cassiui)。

2． 在曲线 $x=x^2$ 和 $y=x^3$ 上分别求点，使它们具有相同的横坐标且相应的切线彼此平行。

3． 证明曲线 $y=x^n$（n 是正整数）仅有一条法线通过坐标原点。

4． 求曲线的交角：

1) $x^2+y^2=8x,\quad y^2(2-x)=x^3$；

2) $x^2=4y,\ (x^2+4)y=8$。

5． 求下列曲线的渐近线：

1) $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$；

2) $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$；

3) $x^3+y^3-x^2=0$；

4) $x^4-y^4+x^2+2y^2=0$；

5) $\overline{r}=\left\{\dfrac{t}{1-t^2},\ \dfrac{t(1-2t^2)}{1-t^2}\right\}$；

6) $\overline{r}=\left\{\dfrac{t^2}{t-1},\ \dfrac{t}{t^2-1}\right\}$。

6． 讨论曲线方程，并指出该曲线在坐标系中的位置（绘

出草图）

1） $\overline{r}=\{t^2, t^4+t^5\}$；

2） $\overline{r}=\left\{\dfrac{5t^2}{1+t^5}, \dfrac{5t^3}{1+t^5}\right\}$；

3） $\overline{r}=\left\{\dfrac{t^2}{1+t^2}, \dfrac{t(1-t^2)}{1+t^2}\right\}$。

7． 讨论曲线方程，并指出该曲线在坐标系中的位置（绘出草图）。

1） $x^3-2x^2y-y^2=0$；

2） $(x^2-y^2)^2+4xy=0$；

3） $x^4-x^2y+y^3=0$。

8． 证明摆线上任意一点的切线通过母圆的最高点，而法线通过母圆的最低点。利用这个性质，给出摆线上任意一点切线和法线的作法。

9． 证明阿基米德螺线的切线与切点径矢间的夹角，当 $\varphi\to\infty$时，趋于90°。

10．证明悬链线（catenary） $y=ach\dfrac{x}{a}$ 的任意点的纵坐标在过该点的法线上的投影是常量，该常量等于悬链线的参数 a。利用这个性质，给出悬链线上任意点切线和法线的简单作法。

11．证明对数螺线 $r=ca^{\varphi}$ （$a>0$）上任意点的切线与切点径矢间的夹角μ是常数。

12．证明只有对数螺线和圆具有11题指出的性质。

13．证明过心脏线（cardioid） $r=2a(1-\cos\varphi)$ 上含极点的弦的两端所引的切线互相垂直。

14．证明贝努利双纽线（Lemniscate of Bernoulli）$r^2=2a^2\cos2\varphi$上任意点的切线与切点径矢间夹角μ等于$2\varphi+\frac{\pi}{2}$，其中φ是切点的极角。利用这个性质给出双纽线切线和法线的作法。

15．证明在贝努利双纽线上，通过含有极坐标系极点的弦的两端所引的切线互相平行。

16．证明星形线$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$夹在两坐标轴之间的切线段，长为a。

17．证明星形线每条切线与星形线相交于两个点，且过此二交点的切线相交于星形线的外接圆周上。

18．求直角边与星形线相切的直角顶点的几何轨迹。

19．求曲线方程，它的切线在切点与横轴间的线段长为定值a（曳物线）。绘图并指出曳物线（tractrix）与横轴间所围部分的面积。

20．证明曲线$y=\sin x$与$y=x^4-\frac{1}{6}x^3+x$在坐标原点有三阶接触。

21．建立抛物线方程，使它与曲线$y=\ln x$在点（1，0）有最高阶接触。

22．求曲线 $y=\ln x$ 的顶点。也就是求这样的点，在该点密切圆半径取极值。

23．求双曲线方程，使它在坐标原点与曲线$y=1-\cos x$相切于顶点。且曲线间有最高阶接触。

24．若定长线段a的端点沿直角坐标系二坐标轴滑动，求这些线段所在直线族的包络。

25．以抛物线 $y^2=2px$ 的焦点弦为直径作圆，求该圆族的包络。

26．求半立方抛物线族 $3(y-c)^2-2(x-c)^3=0$ 的判别曲线和包络。

27．一直线以固定角速度绕它本身一点旋转，而该点同时沿着另一直线作等速运动，求动直线各位置的包络。

28．求通过坐标原点，而中心在圆周 $(x-a)^2+y^2=R^2$ 上的圆周族的包络。

29．用已知抛物线的焦半径为直径作圆，求该圆族的包络。

30．“曲线在某点有没有切线”及“单参数直线族有包络”的性质是射影性质吗？

31．“曲线有平行的切线”是射影性质呢？

32．“曲线有渐近线”是射影性质吗？

33．曲线的接触阶是射影性质吗？

34．“曲线有拐点”是射影性质吗？

§2　弧　　长

35．计算下列曲线在任意两点 M_1 与 M_2 之间的弧长：

1） $y=x^{3/2}$； 2） $y=x^2$； 3） $y=\ln x$；

4） $\bar{r}=\{a(\cos t+t\sin t),\ a(\sin t-t\cos t)\}$；

5） $y=e^x$；

6） $\bar{r}=\left\{a\left(\ln\operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}-\cos t\right),a\sin t\right\}$。

36．求摆线的一拱弧的弧长，并求它和横轴所围部分之面

积。

37．求星形线 $x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$ 和心脏线 $r=2a(1-\cos\varphi)$ 的弧长，并分别求出它们所围的面积。

38．求阿基米德螺线 $r=a\varphi$ 的一圈的弧长。

39．证明对数螺线 $r=ca^{\varphi}$ 从任意一点到极点的弧长是有限值，等于螺线在该点的极切线之长。

40．求外摆线（epicycloid）与内摆线（hypocycloid）

$$x=a(1+m)\cos mt-am\cos(1+m)t,$$

$$y=a(1+m)\sin mt-am\sin(1+m)t$$

的一拱弧的弧长。

41．证明过悬链线 $y=ach\dfrac{x}{a}$ 的顶点，到其上某点的弧长等于该点的纵坐标在过该点的切线上的投影。

42．求曲线方程，使得从其上某定点 A 到任意点 M 的弧长与弧端切线的角系数成比例。

43．证明悬链线与其上两点的纵坐标、横轴所围面积与相应的弧长成比例，而且比例常数就是悬链线的参数 a。

44．证明由悬链线的顶点到切线互相垂直的两个切点的弧长之乘积是常数。

§3. 曲　　率

45．计算下列曲线的曲率半径

1）$y=\sin x$ 在顶点（正弦曲线）；

2）$x=a(1+m)\cos mt-am\cos(1+m)t$,

$y=a(1+m)\sin mt-am\sin(1+m)t$　（内摆线或外摆线）；

3） $x^2y^2=(a^2-y^2)(b+y)^2$（蚌线）（conchoid）；

4） $r^2=a^2\cos 2\varphi$（贝努利双纽线）；

5） $r=a\varphi$　（阿基米德螺线）；

6） $\overline{r}=\left\{a\cos^3\frac{t}{4},\ a\sin^3\frac{t}{4}\right\}$（星形线）。

46. 求下列曲线的曲率：

1） $(x-y)^2=x^5$ 在点（0，0）；

2） $y=-\ln\cos x$；

3） $x=t^2,\ y=t^3$；

4） $x=a\cos t,\ y=b\sin t$；

5） $x=a(\cos t+t\sin t),\ y=a(\sin t-t\cos t)$ 当 $t=\frac{\pi}{2}$ 时；

6） $x=a(2\cos t-\cos 2t),\ y=a(2\sin t-\sin 2t)$；

7） $x=a\operatorname{ch}t,\ y=b\operatorname{sh}t$.

47. 证明心脏线 $r=2a(1-\cos\varphi)$ 在某点的曲率半径等于该点极法线的2/3。并指出心脏线上任意一点的曲率中心的作法。

48. 证明对数螺线 $r=ca^{\varphi}$ 上任意一点的曲率半径等于该点的极法线。利用这个性质，给出对数螺线上任意一点的密切圆的作法。

49. 求曳物线 $\overline{r}=\left\{a\left(\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}+\cos t\right),a\sin t\right\}$ 上任意点的曲率半径，并给出曲率中心的求法。（参看19题）。

50. 证明摆线上任意点的曲率中心与该点的联线平分摆线的基线。由此得到摆线上任意点的曲率中心的简单作法（参看8题）。

51. 证明悬链线上任意点的纵坐标是参数 a 与该点曲率半径 R 的比例中项。

52. 证明贝努利双纽线 $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ 在任意点的曲率半径的三倍比该点的极法线小（参看47题解答）。利用这个性质，给出双纽线上任意点曲率中心的作法（参看14题）。

53. 求所有具有常数曲率 κ 的平面曲线。

54. 求下列曲线的顶点(曲线的顶点即曲率取极值的点)：

1) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$；

2) $y = e^x$；

3) $r = a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$。

55. 求曲线 $\overline{r} = \{at - d\sin t,\ a - d\cos t\}$ 的顶点，并作图。

提示：当 $a > d$、$a = d$、$a < d$ 时，分别称曲线为短摆线、摆线、长摆线。当半径为 a 的圆沿直线无滑动地滚动时，距圆中心距离为 d 的点的轨迹即为摆线。

56. 曲线 c' 是由曲线 c 经射影变换得到。证明若曲线 c 在点 M 的曲率为零，则在对应点 M'，曲线 c' 的曲率也为零。

57. 曲线的曲率是射影变换、仿射变换、正交变换的不变量吗？

§4. 渐缩线与渐伸线

58. 建立下列曲线的渐缩线方程：

1) $\overline{r} = \{t, t^2\}$；

2) $\overline{r} = \{t, \sin t\}$；

3) $r = a(1 + \cos\varphi)$；

4） $x = a\left(\ln \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha\right)$， $y = \cos\alpha$.

绘出渐缩线图形。

59．证明摆线的渐缩线是与已知摆线全等的摆线。

60．证明星形线的渐缩线是与已知星形线相似的星形线，其相似系数为 2，旋转角度为$\frac{\pi}{4}$。

61．证明对数螺线 $r = ca^{\varphi}$ 的渐缩线是与它全等的对数螺线，可由原曲线旋转某个角度得到。

62．当对数螺线 $r = ca^{\varphi}$ 的渐缩线与螺线本身重合时，求参数 a 应具备的条件。

63．在定义曲线的渐缩线时，用到曲线的度量性质了吗？

64．确定圆的渐缩线。

65．建立圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 的渐伸线方程。

66．求悬链线 $y = a\,ch\frac{x}{a}$过顶点的渐伸线方程。

67．求抛物线 $\overline{r} = \left\{t, \frac{1}{4}t^2\right\}$ 的渐伸线。

§5. 曲 线 的 自 然 方 程

68．已知曲线的自然方程 $\kappa = \kappa(s)$，求它所代表的全部平面曲线。

69．建立下列曲线的自然方程：

1） $y = x^{3/2}$；

2） $y = \ln x$；

3） $r = a(1 + \cos\varphi)$；