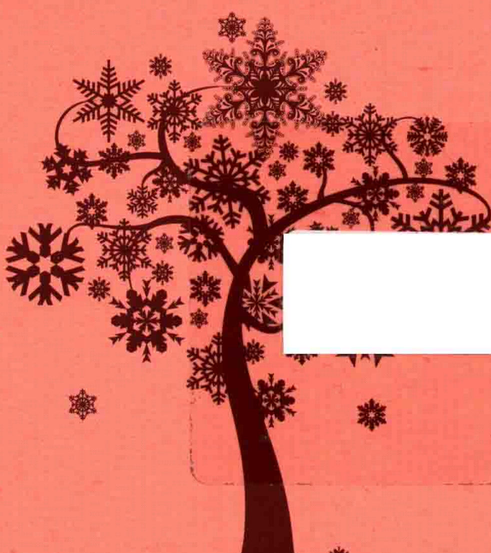
福建省中小学名师工程丛书

论数学学科过程性知识的教与学

陈中峰 著



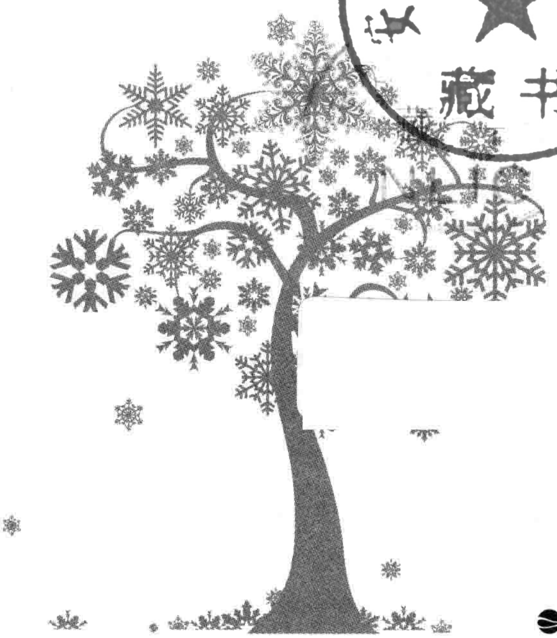
海峡出版发行集团
THE STRAITS PUBLISHING & DISTRIBUTING GROUP
福建教育出版社

福建省中小学名师工程丛书

论数学学科过程性知识的教与学

陈中峰 著

安徽师范大学图书馆
藏书



海峡出版发行集团 THE STRAITS PUBLISHING & DISTRIBUTING GROUP | 福建教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

论数学学科过程性知识的教与学/陈中峰著．—福州：福建教育出版社，2016.3
（福建省中小学名师工程丛书）
ISBN 978-7-5334-7013-5

Ⅰ.①论…　Ⅱ.①陈…　Ⅲ.①数学课—教学研究—中小学　Ⅳ.①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 256669 号

Lunshuxue Xueke Guochengxing Zhishi De Jiaoyuxue
论数学学科过程性知识的教与学
陈中峰　著

出版发行　海峡出版发行集团
福建教育出版社
（福州梦山路 27 号　邮编：350001　网址：www.fep.com.cn
编辑部电话　0591－83726908
发行部电话　0591－83721876　87115073　010－62027445）
出 版 人　黄　旭
印　　刷　福州泰岳印刷广告有限公司
（福州市鼓楼区白龙路 5 号　邮编：350003）
开　　本　720 毫米×1000 毫米　1/16
印　　张　20
字　　数　296 千
版　　次　2016 年 3 月第 1 版　2016 年 3 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5334-7013-5
定　　价　39.80 元

如发现本书印装质量问题，请向本社出版科（电话：0591－83726019）调换。

总 序

2014年教师节前夕，习近平总书记同北京师范大学师生代表座谈时的讲话指出："一个人遇到好老师是人生的幸运，一个学校拥有好老师是学校的光荣，一个民族源源不断涌现出一批又一批好老师则是民族的希望。"民族振兴、社会进步有赖于教育，中华民族伟大复兴需要一大批好老师勇当中华民族"梦之队"的筑梦人，扎扎实实做好塑造灵魂、塑造生命、塑造人的工作。

新中国成立以来，福建基础教育界涌现出一大批在省内外享有盛誉的教学名师。这些名师，成就了一代又一代学生的人生辉煌，这些学生中有许多成为国内外知名的政治、经济、军事等方面的杰出人物。诸多名师的示范、辐射和引领，对福建基础教育质量在上世纪五十年代末跃居全国前列功不可没。改革开放后，福建省委、省政府进一步加大教育投入，坚持教育优先发展，始终将建设一支师德高尚、业务精湛、结构合理、充满活力的高素质专业化教师队伍作为重要的战略举措，并在全国率先出台了一系列政策措施，对提高基础教育师资队伍水平、激发广大教师投身教育综合改革的积极性主动性创造性产生了重要的作用。

2010年，为贯彻落实省政府《关于进一步加强中小学教师队伍建设的意见》，福建省教育厅印发了《关于实施福建省中小学名师培养工程的通知》，计划用3年时间，培养一批教育理论素养深厚、教育教学艺术精湛、在省内外有较大影响的教学名师，以此带动中小学教师队伍整体素质和水平的提高。2011年，省教育厅在全省遴选了首批96名中小学、幼儿园优秀教师作为培养人选，并成立了"福建省中小学名师培养工程专家工作委员会"，负责具体组

织实施名师培养工程。

3年来，专家工作委员会遵循教师专业发展和名师成长的规律，精心设计培养方案，认真组织工程实施，严格培养过程管理，通过专家指导、理论深造、课题研究、名师访学、考察学习、学术交流和著书立说等方式，促进培养人选尽快成长，在实践中形成了具有福建特色的名师培养模式。名师培养工程以“教学主张”为引领，要求教学名师应有突出的教学专长、鲜明的教学风格和自己的教学信条与教学主张，并在教育教学实践中取得突出的成绩。在专家的指导和引领下，名师培养人选努力学习、积极探索、更新观念、大胆创新，在实践中创造性地发展、总结了许多新的教学模式、教学方法和先进的教育思想、教育理念。这些新模式、新方法、新思想、新理念是名师培养人选教育教学成就的总结提升，也是他们刻苦钻研的思想结晶，反映了我省首批名师培养人选孜孜不倦的探索精神和教育教学研究水平，是名师培养工程取得的一项重要成果。

介绍、宣传和推广教学名师的创新经验、先进理念和教学主张，也是名师培养工程的一项重要工作。因此，我们决定组织出版“福建省中小学名师工程丛书”，将教学名师的教学主张，以及先进的教学经验、教学方法等予以整理汇集，以与省内外同行和广大教育工作者共飨。

福建省教育厅厅长　鞠维强

2014年12月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

教学主张：教师从优秀走向卓越的专业生长点

教学主张是名师教学的内核和品牌，缺乏教学主张，或者教学主张不鲜明、不坚定，就称不上是真正意义上的名师。无论是名师个体的自我成长还是名师工程的定向培养，主张的提出是关键（前提），主张的研究是核心（中心）。

教学主张是名师的教学思想、教学信念。思想来自于思考，优秀教师在教学实践活动中都会自觉不自觉、有意无意地对相关问题进行思考，并在此基础上产生或形成对教学的一些看法、想法、念头、观点，我们将其统称为教学思考。这些思考不乏是有价值的见解，但总体而言，是相对零散，不够系统的；是相对浅层，不够深度的；是相对模糊，不够清晰的。只有经过理性加工和自我孵化，教学思考才能提升和发展成为教学思想。教学思想是教师对教学问题的系统的、深刻的、清晰的思考和见解，它具有稳定性和统领性。稳定性意味着思想一旦形成，不容易改变；统领性指的是对教学行为的影响力，行为是由思想而生的。

教学主张是名师的“个人理论”，它来自实践又高于实践。理论来自实践，优秀教师在教学实践活动中都会形成和积累一些行之有效的做法、招数、策略、特点、亮点，我们将其统称为教学经验，这是真正原生态、原发性的东西。我们认为，相应的实践经验无疑是促进理论滋生的最有价值的资源，教师的个人理论一定是来自教师个人的实践和经验，但是，由实践到理论，由个人经验到个人理论，这个过程不是自发产生和实现的。名师不仅要有实践意识，而且需要有理论自觉，一方面把自己的经验，把自己的所行、所见、

所闻、所得加工、提炼、升华为理论；另一方面，用先进科学的理论反思、批判、充实、引领自己的实践和经验。通过这样的双向互动，把自己的经验要素转化为充满思维和智慧含量、可资借鉴（更具有普适性和启发性）的“理论因子”，从而不断形成和完善自己关于教学的“个人理论”，这就是教学主张的内核。

总之，教学主张引领教师从教学思考走向教学思想，从教学经验走向教学理论，这是教师从优秀走向卓越从而实现自我超越的根本支点。对名师个人而言，提出教学主张就是给自己树立一面旗帜！打造一只“天眼”！大凡成功的、有影响的教学名师和流派均有自己鲜明的、独特的、坚定的教学主张，教学主张是教师走向教育家的必经之路。因此，提出教学主张不仅是名师个人成长的关键环节，也是名师工程培养名师的核心抓手。

名师不仅要敢于、善于提出教学主张，而且还要围绕教学主张系统开展研究，它主要包括以下两个方面：

一、教学主张的理论研究

这一研究类似于学者、专家的学术研究，它使名师研究区别于普通教师的所谓校本研究。理论研究的过程是理论思维的过程，是一种形而上的研究。恩格斯曾经精辟地指出：“一个民族想要站在科学的最高峰，就一刻也不能没有理论思维。”中小学名师的教学理论研究就是对自己教学主张的理论论证，它要求教师暂时搁置自己的实践和经验，在理论的高度和轨迹上进行系统和抽象的论证和阐明，从而把自己的教学主张阐明得深刻、清楚、丰富，有逻辑性、有思想性。这个过程对一线的教师是个巨大的挑战，但是名师必须接受这个挑战，并在这个挑战中实现自我突破、自我超越、自我提升，这样才能从普通教师走向教育家。

理论研究的内容和要点主要有：

1. 教学主张的概念和内涵界定。提出一个主张意味着提出一个或若干个概念，理论研究都必须从概念界定开始，概念界定也就是界定概念的内涵和外延。关于概念的界定，有必要强调两点：第一，要基于概念的本意，任何概念都有自己的本质内涵，它是在历史的过程中形成的人类共识，名师的概

念解读要以此为出发点和起点。第二，要有自己的新意，名师对教学主张及其概念要是没有自己独特的见解、看法和感悟，那么这个主张及其研究就没有多大的价值和意义。名师一定要善于从不同角度和方面去挖掘、揭示和阐述概念的内涵，这是把教学主张写得丰满和厚实的逻辑前提。

2. 教学主张的理论基础和依据。理论基础是某种主张、某种观点立论的理论依据。任何新主张、新观点都不可能是凭空产生的。名师的教学主张、观点，它的提出和发展同样有其理论基础。教师在提出教学主张的同时，一定要从哲学、认识论、心理学、教育学等学科去寻找其立论的依据。关于理论基础与教学主张的关系，我们要特别强调“有机性”三个字。有机性指两者之间的关系是内在的，不是外加的，就像地基与房屋的联系是一体的而不是拼凑的一样。名师一定要把教学主张的最直接的最核心的理论基础找出来、挖出来，务求准确、简洁、到位，并把两者的内在的逻辑联系揭示清楚，使其成为一个有机的理论体系。

3. 教学主张的具体观点和内容。这是名师研究的中心任务。概念界定和理论基础的寻找只是研究的前奏和起点，教学主张的观点和内容的展开才是研究的重头戏。教师一定要根据教学主张研究的主题、概念内涵和理论基础，从学科教育教学的不同方面和角度去挖掘、构建、提炼教学主张的核心要点，并加以系统阐述，使其成为一个结构和体系。所谓“横看成岭侧成峰，远近高低各不同”，对一个问题要从尽可能多的角度去思考，才能认识更全面、更透彻、更有新意。

二、教学主张的实践研究

这一研究本质上就是中小学教师的行动研究，它使名师研究区别于专家、学者的所谓学术研究。实践研究就是行动研究，是一种形而下的研究。

名师的实践研究的主要内容包括：

1. 教学主张的教材化研究——使教学主张有根有源。教学主张作为名师思想和智慧的结晶，是名师钻研和解读教材的独特视角，是名师发现、挖掘教材新意的探测器。正如尼采所说：有各式各样的“眼睛”，因而有各式各样的“真理”。名师要用主张来统领、解读教材，这是给教材注入、渗透主张、

思想、智慧的过程，使教材个性化、生命化；与此同时，不断从教材中挖掘和提炼出体现和反映教学主张的内容和意义出来，使主张变得厚重、丰富，有根有源。

2. 教学主张的教学化研究——使教学主张看得见、摸得着。教学主张不仅要进入教材，还要进入教学。教学主张的教学化研究，简单的说就是要用教学主张作为教学的导向，并将其融入教学实践的每一个“毛孔”，使名师的教学活动“烙上”自己的思想和个性，进而形成自己的风格。著名特级教师于漪说的好：“教出自己个性的时候，才是学生收获最大的时候。”而教出风格的时候，才是名师成熟的时候。

3. 教学主张的人格化研究——使教学主张名师化、精神化。教学主张不但要进入教材、进入教学，还要进入教师本人，成为教师人格的一部分和特征。名师的主张不仅通过教材、教学表现出来，还要通过名师自己的生活和为人表现出来，这样才更令人信服。

三年来，我们坚定地要求和不遗余力地指导名师培养人选提炼教学主张并围绕教学主张开展深度的研究，这是我们名师培养工程的主题、主线索、主工作。现在摆在我们面前的一本本专著就是这一研究的代表性成果。三年之前，不仅学员，就连我们名师工程的专家委员，都觉得，这是一项不可能完成的任务。名师就是要做“不可能实现的事情”。我们欣慰地看到，不少名师培养人选通过三年的刻苦努力，实现了专业发展的自我蜕变和自我超越，成为真正意义上的名师了。

作为名师培养工程的一名导师，笔者深深地感到：名师是可以培养的，而培养的法宝就是教学主张。

福建省中小学名师培养工程专家工作委员会　余文森

2014 年 10 月

目　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

序

我国数学教学长期存在“重结果轻过程”的弊端。概念教学中，“一个定义，三项注意，几个例题，大量练习”成为常态。不讲概念产生的背景，也没有概念的抽象、概括过程，仅从“逻辑意义”列举“概念要素”和“注意事项”，忽视“概念所反映的数学思想方法”，缺少概念要素之间关系的分析，导致学生难以达成对概念的实质性理解，无法形成相应的“心理意义”。没有“过程”的概念教学，因为缺乏数学思想方法为纽带，概念之间的关系无法认识，概念的联系也难以建立，导致学生的数学认知结构缺乏整体性，其可利用性、可辨别性和稳定性等“功能指标”都会大打折扣。

有些教师往往用例题教学替代概念的抽象、概括过程，认为“应用概念的过程就是理解概念的过程”。但这样的教学，因为学生没有经历从具体事例中抽象共同属性并概括到同类事物中去的过程，必然导致概念理解的先天不足，没有理解的应用是盲目的应用，其结果只能是“事倍功半”。不仅如此，这样的教学还会导致概念的“功能僵化”，学生无法在独立面对新问题时做到“透过现象看本质”，难以实现概念的正确、有效应用，数学教学质量、效益都无保障。

我国是“解题大国”，而解题教学中同样存在“讲解法而不讲想法”的弊端，这是“重结果轻过程”的另一种表现形式。解题教学退化为“题型教学”，试图穷尽“题型”，幻想通过“题型”的机械重复、强化训练，让学生掌握对应的“特技”和“动作要领”而提高考试分数。对具有普适意义的、迁移能力强的“根本大法”——数学思想方法的教学，却因其不是“立竿见影”，需要较长时间的坚持才能奏效，是一种潜移默化、润物无声的“慢工”，

被有些老师判为“不实惠”而得不到应有的渗透、提炼和概括。结果是在稍有变化的情境中，因为没有数学思想方法的支撑，“特技”失灵，“动作”变形，灵活应用数学知识解决问题的能力成为“泡影”。有些老师感到很困惑：学生为什么总是“讲过练过的不一定会，没讲没练的一定不会”？我认为，根源还是教师未把“如何思考”这一最重要的“过程性知识”纳入教学，学生的“会”并不是真正的会。

其实，广大数学老师也知道“重结果轻过程”的危害，也知道“过程性知识”对学生“理解数学”具有关键意义，但总体而言是“苦于无招”，不知道该怎么做。所以，从我国数学教学的现状看，对“过程性知识”展开深入的理论与实践研究是当务之急。虽然我国数学教育界对此已有较多研究，但不成系统，具有可操作性的理论更是欠缺。本书可以看成是对这一问题的较系统研究。

陈中峰老师是中学数学特级教师，他有几十年的中学数学教学经验，并且潜心于数学教育教学研究，有大量优秀的教学成果。担任福建省中学数学教研员后，很快实现角色转变，不仅要求自己以更高的观点审视中学数学课堂，而且组织省内专家型中学数学教师，对数学课堂展开系统的、有深度的观察，对中学数学的核心内容展开全面的案例研究，最终提炼出针对我国数学课堂教学主要问题的“‘过程性知识’教学研究”课题，并展开了长期的持续研究，本书就是这一研究的主要成果。

本书在讨论“过程性知识”的含义、基本特征及其意义的基础上，着重从实践层面，以大量的案例分析为载体，对实施“过程性知识”教学的策略、途径和方法展开研究，并给出了实施“过程性知识”教学的具体建议，这些建议具有很强的可操作性。在丰富的教学案例支撑下，本书进一步概括了实施“过程性知识”教学的五个原则，这些原则是“实践基础上的理论概括”，因而对“过程性知识”的教学乃至整个数学教学都具有很好的指导意义。

实际上，本书中的许多篇章，作为阶段性研究成果，在《数学通报》《中国数学教育》《中学数学教学参考》等期刊上发表过。我是这些杂志的主编或编委，因此有幸成为其中一些篇章的第一读者，对本书中的许多论题、观点

乃至具体案例，我与陈老师都进行过讨论、交流。这一次，陈老师把它们整理成书，阅读电子稿后发现，陈老师对“过程性知识”教学的认识进一步深化了，不仅更系统、更深刻了，而且实践的可操作性更强了。例如，对于如何挖掘和展示数学知识所蕴含的数学家的思维过程，如何润物无声地引领学生的思维过程，如何抓住学生的课堂生成推动学生的数学思维活动等，陈老师给出了理论分析和实践示范；又如，针对数学概念、公式、定理等不同知识类型，区分了它们各自的“过程性”特点，并给出了教学案例；对于知识的应用过程和解决问题的思路探索过程，给出了如何体现“教解法更教想法”的教学分析。更有特点的是，陈老师给出了考查“过程性知识”的试题设计方法。人们常常认为，考查学习效果只能看结果，“过程只能看学生的表现，无法用一道题目来考查”。但陈老师给出了“如何考查过程”的回答，而且其中的例子是经过实践检验的，有较好的信度和效度，这也是他基于自己作为教研员的职责而获取的一手材料的经验升华，非常宝贵。

我曾经在一篇文章中谈到，数学思想方法孕育于知识的发生发展过程中。“思想”是概念的灵魂，是“数学素养”的源泉，是从技能到能力的桥梁；“过程”是“思想”的载体，是领悟概念本质的平台，是培养数学能力的土壤。数学是思维的体操，数学教学是思维的教学，但没有“过程”的教学把“思维的体操”降格为“刺激——反应”训练，是教育功利化在数学教学中的集中表现。为使数学教学成为“有思想的教学”，成为提高思维能力的舞台，成为培育理性精神的阵地，必须坚持“过程与结果并重”的原则。但这些观点如何落地？恰好，本书讨论“过程性知识”的教学，实质性地给出了“教思维”进而实现“有思想的教学”的示范，所以对我的启发很大。我想，本书对读者的启发也会很大。

是为序。

章建跃

2015 年 6 月 20 日

第一章

“过程性知识”的认识

《普通高中数学课程标准（实验）》明确指出：“教材应注意创设情境，从具体实例出发，展现数学知识的发生、发展过程，使学生能够从中发现问题、提出问题，经历数学的发现和创造过程，了解知识的来龙去脉.”“教学中，应鼓励学生积极参与教学活动，包括思维的参与和行为的参与. 既要有教师的讲授和指导，也有学生的自主探索与合作交流. 教师要创设适当的问题情境，鼓励学生发现数学的规律和问题解决的途径，使他们经历知识形成的过程.”无论是对教材的编写，还是对课堂教学实践，《普通高中数学课程标准（实验）》都提出了“让学生经历过程”的要求. “注重过程”是新课程倡导的基本教学理念之一，“过程性”教学的重要性也日益为广大教育工作者所认同. 其实，“过程”本身也是一种知识，是一种经验型知识. 为了更好地研究“过程性”教学，“过程性知识”一词近来也频频见诸报端. 那么，究竟什么是“过程性知识”?

第一节 “过程性知识”的含义

从认知心理学的知识观看，知识可划分为陈述性知识、程序性知识和策略性知识.

所谓陈述性知识，是指个人具有有意识的提取线索而能直接陈述的知识，是用来描述世界，回答“世界是什么”这一问题的知识. 例如三边相等的三角形是等边三角形；平面内与两个定点 F_1，F_2 的距离之和等于常数（大于 $|F_1F_2|$）的点的轨迹叫椭圆；如果对于函数 $f(x)$的定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=f(x)$，那么函数 $f(x)$就叫偶函数等. 大多数简单问题的解决都是依赖于陈述性知识的提取与应用的.

案例 1 陈述性知识的表现形式

椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$的左、右焦点分别是 F_1，F_2，过 F_1 作直线交椭圆于 A，B 两点，求$\triangle ABF_2$ 的周长.

分析：本题的解决主要依赖于以下两项陈述性知识：(1) 三角形周长的定义；(2) 椭圆的定义.

解：由于 F_1，F_2 是椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$的两焦点，$A$，$B$ 是椭圆上的点，

所以 $AF_1+AF_2=4$，$BF_1+BF_2=4$，

故$\triangle ABF_2$ 的周长$=AB+AF_2+BF_2=AF_1+F_1B+AF_2+F_2B=8$.

陈述性知识常常也被称为言语信息. 陈述性知识主要以命题和图式两种形式表征，前者用于表征小的意义单元；后者用于表征较大的有组织的信息组合. 学习陈述性知识的心理过程主要是记忆，其获得是指新知识进入原有的命题网络，与原有知识形成联系.

所谓程序性知识，是指个人没有有意识的提取线索，只能借助某种作业

形式间接推论其存在的知识，它是一套办事的操作步骤，是关于“怎么做”的知识. 如根据解一元一次方程的步骤解一元一次方程；根据“斜二测画法”画一个水平放置的平面图形的直观图；利用“向量法”求二面角等.

案例 2　程序性知识的表现形式

已知函数 $f(x)=x^2+8\ln x$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$的图象在点 $P(1, f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）判断方程 $f(x)=2x$ 根的个数，证明你的结论.

分析：本题的解决主要依赖于程序性知识. 第（Ⅰ）问，只要根据求函数 $f(x)$的图象在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程的一般步骤：“(1) 求出 $f'(x)$，从而得到 $f'(x_0)$便是函数 $f(x)$的图象在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率；(2) 根据直线的点斜式方程得到函数 $f(x)$的图象在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$”，就可解决问题. 第（Ⅱ）问，只要把“判断方程 $f(x)=2x$ 根的个数”问题转化为“判断相应函数的零点个数”问题，就可根据求函数零点个数的一般步骤解决问题，即：(1) 把“判断方程 $f(x)=2x$ 根的个数”问题转化为“判断函数 $F(x)=f(x)-2x$ 的零点个数”问题；(2) 通过导数求出函数 $F(x)$的单调区间；(3) 利用零点存在定理判断函数 $F(x)$在各个单调区间是否存在零点；(4) 求出函数 $F(x)$在各个单调区间的零点总数.

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=x^2+8\ln x$，所以 $f'(x)=2x+\dfrac{8}{x}$，

所以函数 $f(x)$的图象在点 $P(1, f(1))$ 处的切线斜率 $k=f'(1)=10$.

又 $f(1)=1$，所以函数 $f(x)$的图象在点 $P(1, f(1))$处的切线方程为 $y-f(1)=f'(1)(x-1)$，即 $y=10x-9$.

（Ⅱ）令 $F(x)=f(x)-2x=x^2-2x+8\ln x$.

因为 $F(1)=-1<0$，$F(2)=8\ln 2>0$，所以 $F(x)=0$ 在 $(0, +\infty)$ 至少有一个根.

又因为 $F'(x)=2x-2+\dfrac{8}{x}\geqslant 2\sqrt{16}-2=6>0$，所以 $F(x)$在 $(0, +\infty)$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com