INTERNATIONAL
MATHEMATICAL
OLYMPIADS

IMO 50年

1985～1989

第6卷

● 主　编　佩　捷
● 副主编　冯贝叶

多解 推广 加强

$\sum_1^5 k^5 x_k = a^3$

$\sum_1^5 k^3 x_k = a^2$

$\sum_1^5 k x_k = a$

哈爾濱工業大學出版社
HITP
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIADS

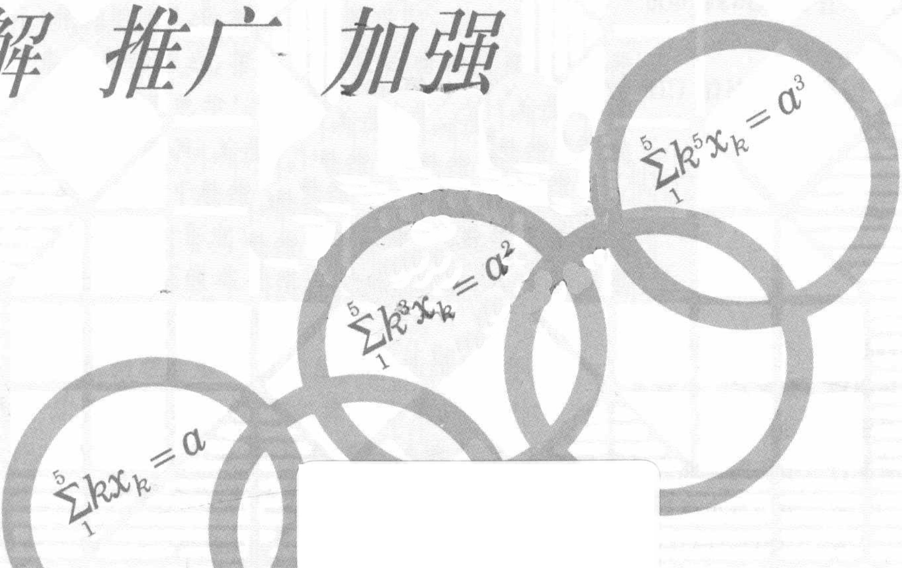
IMO 50年

第6卷

1985～1989

● 主　编　佩　捷
● 副主编　冯贝叶

多解　推广　加强



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书汇集了第26届至第30届国际数学奥林匹克竞赛试题及解答。本书广泛搜集了每道试题的多种解法，且注重了初等数学与高等数学的联系，更有出自数学名家之手的推广与加强。本书可归结出以下四个特点，即收集全、解法多、观点高、结论强。

本书适合于数学奥林匹克竞赛选手和教练员、高等院校相关专业研究人员及数学爱好者使用。

图书在版编目(CIP)数据

IMO 50年.第6卷，1985～1989/佩捷主编.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015.4

ISBN 978－7－5603－5092－9

Ⅰ.①I… Ⅱ.①佩… Ⅲ.①中学数学课－题解 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第303162号

策划编辑　刘培杰　张永芹

责任编辑　张永芹　赵新月

封面设计　孙茵艾

出版发行　哈尔滨工业大学出版社

社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006

传　　真　0451－86414749

网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn

印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司

开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张26.25　字数486千字

版　　次　2015年4月第1版　2015年4月第1次印刷

书　　号　ISBN 978－7－5603－5092－9

定　　价　58.00元

前言 | Foreword

法国教师于盖特·昂雅勒朗·普拉内斯在与法国科学家、教育家阿尔贝·雅卡尔的交谈中表明了这样一种观点："若一个人不'精通数学'，他就比别人笨吗"？

"数学是最容易理解的. 除非有严重的精神疾病，不然的话，大家都应该是'精通数学'的. 可是，由于大概只有心理学家才可能解释清楚的原因，某些年轻人认定自己数学不行. 我认为其中主要的责任在于教授数学的方式".

"我们自然不可能对任何东西都感兴趣，但数学更是一种思维的锻炼，不进行这项锻炼是很可惜的. 不过，对诗歌或哲学，我们似乎也可以说同样的话".

"不管怎样，根据学生数学上的能力来选拔'优等生'的不当做法对数学这门学科的教授是非常有害的."(阿尔贝·雅卡尔，于盖特·昂雅勒朗·普拉内斯.《献给非哲学家的小哲学》. 周冉，译. 广西师范大学出版社，2001:96)

这本题集不是为老师选拔"优等生"而准备的，而是为那些对IMO感兴趣，对近年来中国数学工作者在IMO研究中所取得的成果感兴趣的读者准备的资料库. 展示原味真题，提供海量解法(最多一题提供20余种不同解法，如第3届IMO第2题)，给出加强形式，尽显推广空间. 是我国建国以来有关IMO试题方面规模最大、收集最全的一本题集，从现在看以"观止"称之并不为过.

前中国国家射击队的总教练张恒是用“系统论”研究射击训练的专家，他曾说：“世界上的很多新东西，其实不是‘全新’的，就像美国的航天飞机，总共用了 2 万个已有的专利技术，真正的创造是它在总体设计上的新意.”(胡廷楣.《境界——关于围棋文化的思考》.上海人民出版社，1999:463)本书的编写又何尝不是如此呢，将近 100 位专家学者给出的多种不同解答放到一起也是一种创造.

如果说这部题集可比作一条美丽的珍珠项链的话，那么编者所做的不过是将那些藏于深海的珍珠打捞起来并穿附在一条红线之上，形式归于红线，价值归于珍珠.

首先要感谢江仁俊先生，他可能是国内最早编写国际数学奥林匹克题解的先行者(1979 年笔者初中毕业，同学姜三勇(现为哈工大教授)作为临别纪念送给笔者的一本书就是江仁俊先生编的《国际中学生数学竞赛题解》(定价仅 0.29 元)，并用当时叶剑英元帅的诗词做赠言：“科学有险阻，苦战能过关.”27 年过去仍记忆犹新). 所以特引用了江先生的一些解法. 江苏师范学院(华东师范大学的肖刚教授曾在该校外语专业就读过)是我国最早介入 IMO 的高校之一，毛振璇、唐起汉、唐复苏三位老先生亲自主持从德文及俄文翻译 1～20 届题解. 令人惊奇的是，我们发现当时的插图绘制者居然是我国的微分动力学专家“文化大革命”后北大的第一位博士张筑生教授，可惜天妒英才，张筑生教授英年早逝，令人扼腕(山东大学的杜锡录教授同样令人惋惜，他也是当年数学奥林匹克研究的主力之一). 本书的插图中有几幅就是出自张筑生教授之手[22]. 另外中国科技大学是那时数学奥林匹克研究的重镇，可以说 20 世纪 80 年代初中国科技大学之于现代数学竞赛的研究就像哥廷根 20 世纪初之于现代数学的研究. 常庚哲教授、单墫教授、苏淳教授、李尚志教授、余红兵教授、严镇军教授当年都是数学奥林匹克研究领域的旗帜性人物. 本书中许多好的解法均出自他们[4,13,19,20,50]. 目前许多题解中给出的解法中规中矩，语言四平八稳，大有八股遗风，仿佛出自机器一般，而这几位专家的解答各有特色，颇具个性. 记得早些年笔者看过一篇报道说常庚哲先生当年去南京特招单墫与李克正去中国科技大学读研究生，考试时由于单墫基础扎实，毕业后一直在南京女子中学任教，所以按部就班，从前往后答，而李克正当时是南京市的一名工人，自学成才，答题是从后往前答，先答最难的一题，风格迥然不同，所给出的奥数题解也是个性化十足. 另外，现在流行的 IMO 题解，历经多人之手已

变成了雕刻后的最佳形式，用于展示很好，但用于教学或自学却不适合，有许多学生问这么巧妙的技巧是怎么想到的，我怎么想不到，容易产生挫败感，就像数学史家评价高斯一样，说他每次都是将脚手架拆去之后再将他建筑的宏伟大厦展示给其他人.使人觉得突兀，景仰之后，备受挫折.高斯这种追求完美的做法大大延误了数学的发展，使人们很难跟上他的脚步这一点从潘承彪教授，沈永欢教授合译的《算术探讨》中可见一斑.所以我们提倡，讲思路，讲想法，表现思考过程，甚至绕点弯子，都是好的，因为它自然，贴近读者.

中国数学竞赛活动的开展与普及与中国革命的农村包围城市，星星之火可以燎原的方式迥然不同，是先在中心城市取得成功后再向全国蔓延，而这种方式全赖强势人物推进，从华罗庚先生到王寿仁先生再到裘宗沪先生，以他们的威望与影响振臂一呼，应者云集，数学奥林匹克在中国终成燎原之势，他们主持编写的参考书在业内被奉为圭臬，我们必须以此为标准，所以引用会时有发生，在此表示感谢.

中国数学奥林匹克能在世界上有今天的地位，各大学的名家们起了重要的理论支持作用.北京大学王杰教授、复旦大学舒五昌教授、首都师范大学梅向明教授、华东师范大学熊斌教授、中国科学院许以超研究员、合肥工业大学的苏化明教授、杭州师范学院的赵小云教授、陕西师范大学的罗增儒教授等，他们的文章所表现的高瞻周览、探赜索隐的识力，已达到炉火纯青的地步，堪称为中国IMO研究的标志.如果说多样性是生物赖以生存的法则，那么百花齐放，则是数学竞赛赖以发展的基础.我们既希望看到像格罗登迪克那样为解决一批具体问题而建造大型联合机械式的宏大构思型解法，也盼望有像爱尔特希那样运用最少的工具以娴熟的技能做庖丁解牛式剖析型解法出现.为此本书广为引证，也向各位提供原创解法的专家学者致以谢意.

编者为图“文无遗珠”的效果，大量参考了多家书刊杂志中发表的解法，也向他们表示谢意.

特别要感谢湖南理工大学的周持中教授、长沙铁道学院的肖果能教授、广州大学的吴伟朝先生以及顾可敬先生.他们四位的长篇推广文章读之，使我不能不三叹而三致意，收入本书使之增色不少.

最后要说的是由于编者先天不备，后天不足，斗胆尝试，徒见笑于方家.

哲学家休谟在写自传的时候，曾有一句话讲得颇好：“一

个人写自己的生平时，如果说得太多，总是免不了虚荣的.”这句话同样也适合于一本书的前言，写多了难免自夸，就此打住是明智之举.

刘培杰
2014 年 9 月

目录 Contest

第一编　第 26 届国际数学奥林匹克　1

第 26 届国际数学奥林匹克题解 …… 3
第 26 届国际数学奥林匹克英文原题 …… 15
第 26 届国际数学奥林匹克各国成绩表 …… 17
第 26 届国际数学奥林匹克预选题 …… 18

第二编　第 27 届国际数学奥林匹克　77

第 27 届国际数学奥林匹克题解 …… 79
第 27 届国际数学奥林匹克英文原题 …… 86
第 27 届国际数学奥林匹克各国成绩表 …… 88
第 27 届国际数学奥林匹克预选题 …… 89

第三编　第 28 届国际数学奥林匹克　109

第 28 届国际数学奥林匹克题解 …… 111
第 28 届国际数学奥林匹克英文原题 …… 120
第 28 届国际数学奥林匹克各国成绩表 …… 122
第 28 届国际数学奥林匹克预选题 …… 124

第四编　第 29 届国际数学奥林匹克　151

第 29 届国际数学奥林匹克题解 …… 153
第 29 届国际数学奥林匹克英文原题 …… 178
第 29 届国际数学奥林匹克各国成绩表 …… 180
第 29 届国际数学奥林匹克预选题 …… 182
相关链接 …… 216

第五编　第 30 届国际数学奥林匹克　257

第 30 届国际数学奥林匹克题解 …… 259
第 30 届国际数学奥林匹克英文原题 …… 271
第 30 届国际数学奥林匹克各国成绩表 …… 273

第 30 届国际数学奥林匹克预选题 …… 275
相关链接…… 358

附录 IMO 背景介绍

363

第 1 章 引言…… 365
第 1 节 国际数学奥林匹克…… 365
第 2 节 IMO 竞赛 …… 366
第 2 章 基本概念和事实…… 367
第 1 节 代数…… 367
第 2 节 分析…… 371
第 3 节 几何…… 372
第 4 节 数论…… 378
第 5 节 组合…… 381

参考文献

384

后记

392

第一编
第 26 届国际数学奥林匹克

第 26 届国际数学奥林匹克

芬兰,1985

1 某圆的圆心落在四边形 $ABCD$ 的 AB 边上,其他三边与该圆相切,证明

$$AD + BC = AB$$

英国命题

证法 1 如图 26.1 所示,圆心 O 位于 AB 上,点 E,F,G 为切点,将 $\triangle OFC$ 绕点 O 旋转得到 $\triangle OEH$,这里 H 位于直线 AD 上.令 $\theta=\angle OCF=\angle OHE$,那么同样地,$\angle OCG=\theta$.

因为四边形 $ABCD$ 内接于一半圆,$\angle HAO=\pi-2\theta$,所以

$$\angle AOH=\pi-(\theta+\pi-2\theta)=\theta=\angle AHO$$

因此

$$OA=AH=AE+FC=AE+GC \quad ①$$

用同样的方法,也就是说通过将 $\triangle OFD$ 绕点 O 旋转得到 $\triangle OGK$,K 位于线 BC 上,得到

$$OB=BK=BG+GK=BG+ED \quad ②$$

式 ① 与式 ② 相加,得

$$AB=AD+BC$$

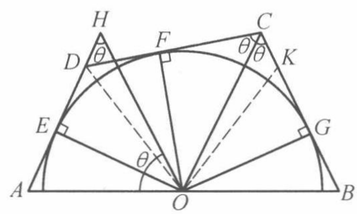


图 26.1

证法 2 如图 26.2 所示,设 $\odot O$ 的圆心 O 在凸四边形的边 AB 上,与 BC 相切于 E,与 CD 相切于 F,与 DA 相切于 G.联结 OE,OC,OF,OD 和 OG.设 $\angle OAG=\alpha$,$\angle OBE=\beta$,因 A,B,C,D 四点共圆,故有

$$\angle DCB=\pi-\alpha,\angle ADC=\pi-\beta$$

又因 OC,OD 分别平分 $\angle DCB,\angle ADC$,故

$$\angle ODF=\angle ODG=\frac{1}{2}(\pi-\beta)$$

$$\angle OCF=\angle OCE=\frac{1}{2}(\pi-\alpha)$$

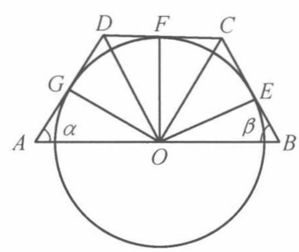


图 26.2

设 $\odot O$ 的半径为 r,则由三角学知

$$OA=\frac{r}{\sin\alpha},OB=\frac{r}{\sin\beta}$$

$$AG=r\cdot\cot\alpha,BE=r\cdot\cot\beta$$

$$DG = r \cdot \cot \frac{\pi - \beta}{2} = r \cdot \tan \frac{\beta}{2} = r \cdot \frac{1 - \cos \beta}{\sin \beta}$$

$$CE = r \cdot \cot \frac{\pi - \alpha}{2} = r \cdot \tan \frac{\alpha}{2} = r \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

所以

$$AB = OA + OB = \frac{r}{\sin \alpha} + \frac{r}{\sin \beta}$$

$$\begin{aligned} AD + BC = {} & AG + DG + BE + CE = \\ & (AG + CE) + (DG + BE) = \\ & (r \cdot \cot \alpha + r \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}) + (r \cdot \cot \beta + r \cdot \frac{1 - \cos \beta}{\sin \beta}) = \\ & \frac{r}{\sin \alpha} + \frac{r}{\sin \beta} \end{aligned}$$

从而
$$AB = AD + BC$$

证法 3　如图 26.3 所示，由 $ABCD$ 四点共圆(图中未画此圆)即知 $\angle CDA' = \angle ABB'$，这点使我们发现：作适当的对称变换，图中会出现平行线. 由于 AA' 与 BB' 都与 $\odot O$ 相切，故有一条直线 OO' 使直线 AA' 与直线 BB' 关于 OO' 对称，作线段 CD 关于 OO' 的对称象 C_1D_1，则 C_1，D_1 分别在 AA' 与 BB' 上且 C_1D_1 亦与 $\odot O$ 相切. $C_1D_1 \parallel AB$ 就是前面说的出现的平行线，而且由 $C_1D = CD_1$ 可知

$$AD + BC = AC_1 + BD_1$$

因而转化为求证 $AB = AC_1 + BD_1$. 但是 $\angle BOD_1 = \angle OD_1C_1 = \angle BD_1O$，即 $\triangle BOD_1$ 为等腰三角形，故得 $BO = BD_1$. 同理可得 $AO = AC_1$. 此题获证.

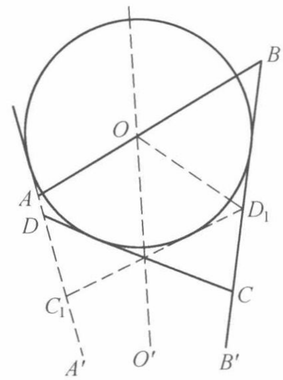


图 26.3

2 设 n 与 k 是已知的两个素数，$k < n$. 在集合 $M = \{1, 2, \cdots, n-1\}$ 中的每一个元素都被涂上蓝色或白色，并且

(1) 对于所有的 $i \in M$，i 与 $n - i$ 具有同种颜色；

(2) 对于所有的 $i \in M$，$i \neq k$，i 与 $|i - k|$ 具有同种颜色，

证明 M 中的所有元素都具有同种颜色.

澳大利亚命题

解法 1　要证明所有元素具有同种颜色，我们采用一种方法(它保留了给定的条件)，对这些元素进行置换——这种置换不改变元素的颜色.

考虑 k 的前 $n-1$ 个倍数并且用模 n 简化它们，令

$$m_r \equiv rk \pmod n, r = 1, 2, \cdots, n-1$$

因此 $(n, k) = 1$，$rk \not\equiv 0$，且因 $ik \equiv jk \pmod n$ 当且仅当 $i = j$ 时成立，集合 $\{m_1, m_2, \cdots, m_{n-1}\}$ 为 M 的一个排列.

现有

ⅰ 当 $m_{r-1}+k<n$ 时,$m_r=m_{r-1}+k$;

ⅱ 当 $m_{r-1}+k>n$ 时,$m_r=m_{r-1}+k-n$.

在情况 ⅰ 中,m_r 与 $|m_r-k|=m_{r-1}$ 的颜色相同(由(2));在情况 ⅱ 中,m_r 与 $|m_r-k|=n-m_{r-1}$ 的颜色相同(由(2)),并由(1)知 $m_r, n-m_{r-1}$ 及 m_{r-1} 的颜色相同.

解法 2　根据欧几里得除法,因 $(n,k)=1$,有

$$\begin{cases} n=m_1k+r_1, 0<r_1<k, (k,r_1)=1 \\ k=m_2r_1+r_2, 0<r_2<r_1, (r_1,r_2)=1 \\ \vdots \\ r_{i-2}=m_ir_{i-1}+1 \end{cases} \quad ③$$

用 $x\sim y$ 表示 M 中数 x 与 y 同色. 今任取 $i\in M$,若 $i>k$,则由带余除法,可令

$$i=mk+r, 0\leqslant r<k$$

则由条件(2)知

$$i\sim i-k\sim i-2k\sim\cdots\sim i-mk=r$$

所以要证明 M 中的数都同色,只要证明 $1,2,\cdots,k-1,k$ 都同色就可以了. 又因

$$n=m_1k+r_1, 0<r_1<k$$

$$k\sim n-k\sim n-2k\sim\cdots\sim n-m_1k=r_1$$

所以要证明 $1,2,\cdots,k$ 都同色,又只要证明集合 $M_1=\{1,2,\cdots,k-1\}$ 中的数都同色就可以了.

因为 $(k,r_1)=1, 0<r_1<k$. 不难验证,对于 k, r_1 与集合 $M_1=\{1,2,\cdots,k-1\}$ 来说,仍满足题目中的条件(1)和(2). 即仍然有

ⅰ 任取 $i\in M_1$,i 与 $k-i$ 同色;

ⅱ 任取 $i\in M_1$,且 $i\neq r_1$,则 i 与 $|r_1-i|$ 同色.

我们来证明 ⅰ 与 ⅱ.

任取 $i\in M_1$,则 $i\in M$ 且 $i\neq k$,由(2) $i\sim|k-i|=k-i$. 即 ⅰ 成立.

又任取 $i\in M_1$,若 $i<r_1$,则由条件(1)及已证

$$|r_1-i|=r_1-i\sim n-(r_1-i)=mk+r_1-r_1+i= mk+i\sim i$$

即当 $i<r_1$ 时,ⅱ 成立.

若 $i>r_1$,则由(2)有

$$|r_1-i|=i-r_1\sim|k-(i-r_1)|=(k+r_1)-i\sim n- ((k+r_1)-i)=mk+r_1-k-r_1+i=$$

$$(m-1)k+i \sim i$$

即当 $i > r_1$ 时，ii 也成立. 故 ii 成立.

因此，类似地可以证明，要证 $M_1=\{1,2,\cdots,k-1\}$ 中的数都同色，又只要证 $M_2=\{1,2,\cdots,r_1-1\}$ 中的数都同色. 如此继续，最后只要证明数 1 同色就可以了. 这是必然的，从而命题得证.

3 对以所有整数为系数构成的多项式 $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_kx^k$，用 $w(P)$ 表示该多项式中奇数系数的数目. 对 $i=0,1,\cdots$，使 $Q_i(x)=(1+x)^i$. 求证：如果 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 为整数，并且 $0 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_n$，那么

$$w(Q_{i_1}+Q_{i_2}+\cdots+Q_{i_n}) \geqslant w(Q_{i_1})$$

荷兰命题

证法 1 首先注意到在 $k=2^m$ 的特殊情况下，在 $(1+x)^k$ 的二项式扩展中除第一项和最后一项外，其他所有项的系数都为偶数，所以

$$(1+x)^k \equiv 1+x^k \pmod 2 \quad ①$$

其次，设 R 与 S 表示任意的整系数多项式，且若 $\deg(R)<k$，那么

$$w(R+x^kS)=w(R)+w(S) \quad ②$$

这是因为 R 中各项的 x 的幂次都低于 x^kS 各项的幂次，且三角不等式

$$w(R+S) \leqslant w(R)+w(S)$$

成立，这是因为 R,S 中 x 的同幂次项中的奇系数之和在 $R+S$ 中产生偶系数，而偶系数之和不会产生新的奇系数.

我们将用数学归纳法，来证明所需的结果. 当 $i_n=0$ 时，结果成立. 当 $i_n=1$ 时，n 为 2 或 1，结果同样也成立.

现假设 $i_m>1$，选择 m 使得

$$k=2^m \leqslant i_n < 2^{m+1}$$

并用 Q 表示 $Q_{i_1}+Q_{i_2}+\cdots+Q_{i_n}$，则或 $i_1<k$，或 $i_1 \geqslant k$.

i 选择 r 使得 $i_r < k \leqslant i_{r+1}$，并令

$$Q=Q_{i_1}+Q_{i_2}+\cdots+Q_{i_r}+Q_{i_{r+1}}+\cdots+Q_{i_n}=R+(1+x)^kS$$

其中，R 为前 r 个 Q_i 之和，$\deg(R)$ 和 $\deg(S)$ 都小于 k，现在

$$w(Q)=w(R+(1+x^k)S)=w(R+S+x^kS)=$$
$$w(R+S)+w(S)$$

因为 $\qquad R=R+S-S, w(-S)=w(S)$

由三角不等式得

$$w(R) \leqslant w(R+S)+w(S)$$

故 $\qquad w(Q) \geqslant w(R)$

由归纳假设，$w(R) \geqslant w(Q_{i_1})$，因此，在情况 ⅰ 下有

$$w\left(\sum_{j=1}^{n} Q_{i_j}\right) \geqslant w(Q_{i_1})$$

ⅱ $i_1 \geqslant k = 2^m$，所以

$$Q_{i_1} = (1+x)^k R, Q = (1+x)^k S$$

因为 $i_n < 2^{m+1}$，$\deg(R)$ 和 $\deg(S)$ 都小于 k，再运用式 ① 和式 ② 得到

$$w(Q) = w(S + x^k S) = 2w(S)$$

由归纳假设，$w(S) \geqslant w(R)$，故

$$w(Q) \geqslant 2w(R) = w(R + x^k R) = w(Q_{i_1})$$

证毕.

证法 2　将自然数 i 用二进制表示为

$$i = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \cdots, a_i \in \{0,1\}$$

或将其简记为向量 $(a_0, a_1, a_2, \cdots)$，其中只有有限多个 $a_j \neq 0$. 设有两个向量

$$\boldsymbol{k}_1 = (a_0, a_1, a_2, \cdots), \boldsymbol{k}_2 = (b_0, b_1, b_2, \cdots)$$

若对每一个 i，都有 $b_i \leqslant a_i$，则称 $\boldsymbol{k}_2$ 前于 $\boldsymbol{k}_1$，或 $\boldsymbol{k}_1$ 后于 $\boldsymbol{k}_2$，记作 $\boldsymbol{k}_2 \prec \boldsymbol{k}_1$. 用 $S(i)$ 表示 i 的"数字和"，即

$$S(i) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

则前于 i 的向量恰有 $2^{S(i)}$ 个，根据初等数论，$i!$ 中因数 2 的幂指数为

$$\left[\frac{i}{2}\right] + \left[\frac{i}{2^2}\right] + \cdots = i - S(i)$$

所以 C_i^k 中因数 2 的幂指数为

$$\begin{aligned}&(i - S(i)) - (k - S(k)) - ((i-k) - S(i-k)) = \\ &S(k) - S(i) + S(i-k) \geqslant 0\end{aligned}$$

最后一步由二进制的加法立即得出. 并且由二进制的加法还可以看出等号当且仅当 $k \prec i$ 时成立，故 C_i^k 为奇数的充要条件是 k 前于 i，于是 $(1+x)^i$ 中系数 C_i^k 为奇数的个数是前于 i 的向量的个数，也就是 $2^{S(i)}$.

现在考虑

$$Q = (1+x)^{i_1} + (1+x)^{i_2} + \cdots + (1+x)^{i_n}$$

中奇系数的个数，要证明它不小于 $2^{S(i_1)}$.

设 $\boldsymbol{k} = (b_0, b_1, b_2, \cdots) \prec i_1$，如果 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 中有奇数个 $j_1 = i_1, j_2, \cdots, j_m (m = 2u-1)$ 在 $\boldsymbol{k}$ 之后，那么 $(1+x)^{i_1}$，$(1+x)^{i_2}, \cdots, (1+x)^{i_n}$ 中有奇数个 $(1+x)^{j_1}, (1+x)^{j_2}, \cdots, (1+x)^{j_m}$，它们的展开式中 x^k 的系数 $C_{i_j}^k (j = 1, 2, \cdots, m)$ 是奇数，所以 Q 中 x^k 的系数是奇数.

如果 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 中有偶数个在 k 之后，设 $j_1=i_1,j_2,\cdots,j_m$ $(m=2u)$ 在 k 之后，记

$$\boldsymbol{i}_1=(a_0,a_1,a_2,\cdots)$$

将表示 $\boldsymbol{j}_t$ 的向量

$$\boldsymbol{j}_t=(c_0,c_1,c_2,\cdots)$$

中的下标 t 满足 $a_t=1$ 的分量 c_t 删去，得到的向量记为 $\boldsymbol{j}'_t(t=2,3,\cdots,m)$. 考虑这些 $\boldsymbol{j}'_t$，如果 $\boldsymbol{j}'_u$ 不在其他与之不等的 $\boldsymbol{j}_t$ 之后，则称 $\boldsymbol{j}'_u$ 为极大的. 现在取一个极大的 $\boldsymbol{j}'_u$，如果 $\boldsymbol{j}'_2,\cdots,\boldsymbol{j}'_m$ 中只有奇数个与 $\boldsymbol{j}'_u$ 相同，那么将 $\boldsymbol{j}_u$ 中的在 $\boldsymbol{j}'_u$ 时删去的 c_i 换成 $\boldsymbol{k}$ 的分量 b_i，这时得到的向量记为 $\boldsymbol{k}'$，则 $\boldsymbol{k}'$ 在 $\boldsymbol{j}_1,\cdots,\boldsymbol{j}_m$ 奇数个之后，从而也在 $\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\cdots,\boldsymbol{i}_n$ 中奇数个之后，于是在 Q 中 $x^{k'}$ 的系数为奇数.

如果在 $\boldsymbol{j}'_2,\cdots,\boldsymbol{j}'_m$ 中有偶数个与 $\boldsymbol{j}'_u$ 相同，将这偶数个去掉，考虑剩下的向量，如果其中又有偶数个相同的极大向量，再将它们去掉，这样继续下去. 由于 $m-1$ 是奇数，最后总能得到奇数个相同的极大向量. 按照上述的做法得到 $\boldsymbol{k}'$，$\boldsymbol{k}'$ 在 $\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\cdots,\boldsymbol{i}_n$ 中奇数个之后，Q 中 $x^{k'}$ 的系数为奇数.

综上所述，对于 $\boldsymbol{i}_1$ 的每一个在前的 $\boldsymbol{k}$，在 Q 中有一项 $x^{k'}$(k' 可能与 $\boldsymbol{k}$ 相同，也可能不同)，它的系数为奇数，并且不同的 $\boldsymbol{k}$ 所对应的 $\boldsymbol{k}'$ 也不相同. 因此 Q 中奇系数的个数不小于 $2^{S(i_k)}$.

4 已知由 1 985 个互不相同的正整数构成的集合 M，其中的任何一个元素都不能被一个大于 26 的素数整除. 证明：M 中至少包括一个由 4 个互不相同的元素构成的子集，该 4 个元素的积是一个整数的 4 次方幂.

蒙古命题

证明　因为只有 9 个素数小于 26，M 的 1 985 个元素中的任一个数的素数分解中最多只有 9 个不同的素数

$$m=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_9^{k_9},k_i\in\mathbf{Z},k_i\geqslant 0,m\in M \qquad ①$$

对每个 M 中的元素，我们给出一个 9 元素与之对应(即矢量)

$$(x_1,x_2,\cdots,x_9)$$

其中，若式 ① 中 p_i 的指数 k_i 为偶数，$x_i=0$；若 k_i 为奇数，$x_i=1$.

这样可有 2^9 个不同矢量. 根据抽屉原理，任何由 2^9+1 个 M 的元素构成的子集必然包含至少两个不同的整数，比如 a_1 和 b_1，其指数矢量相同. 并可推出其积为完全平方，即 $a_1b_1=c_1^2$.

当我们从集合 M 中去掉这一对数时，还剩下

$$1\ 985-2>2^9+1$$

个数，再次应用抽屉原理，并且再次去掉这样的数对，只要 M 中还剩下多于 2^9+1 个数，就一直进行下去.