工程数学习题解答

（下　册）

数 学 教 研 室
工程数学小组编

中国人民解放军工程兵工程学院训练部

一九八〇年三月

工程数学习题解答

（下　册）

数 学 教 研 室

工程数学小组编

中国人民解放军工程兵工程学院训练部

一九八〇年三月

下册目录

第五部分　积分变换
第一章　傅里叶变换
第一节　傅氏积分……………………………………………………（175）
第二节　傅氏变换……………………………………………………（177）
第三节　傅氏变换的性质……………………………………………（189）
第四节　卷积与相关函数……………………………………………（191）
第二章　拉普拉斯变换
第一节　拉氏变换的概念……………………………………………（195）
第二节　拉氏变换的性质……………………………………………（199）
第三节　拉氏逆变换…………………………………………………（207）
第四节　卷积…………………………………………………………（216）
第五节　拉氏变换的应用……………………………………………（219）
第六部分　数学物理方程与特殊函数
第一章　一些典型方程和定介条件的推导…………………………（229）
第二章　分离变量法…………………………………………………（233）
第三章　行波法与积分变换法………………………………………（260）
第四章　拉普拉斯方程的格林函数法………………………………（268）
第五章　数理方程求介中出现的几个特殊类型的常微分方程………（273）
第六章　贝塞尔函数…………………………………………………（276）
第七章　勒让德多项式………………………………………………（291）
第八章　数学物理方程的差分解法…………………………………（300）
第七部分　概率论
第一节　排列、组合、集合…………………………………………（305）
第二节　随机事件……………………………………………………（306）
第三节　随机事件的概率……………………………………………（308）
第四节　条件概率……………………………………………………（310）
第五节　一维随机变量及其分布……………………………………（314）
第六节　二维随机变量及其分布……………………………………（317）
第七节　随机变量的函数及其分布…………………………………（321）
第八节　随机变量的数字特征………………………………………（328）

第五部分 积分变换

第一章 傅里叶变换

第一节 傅氏积分

1、试证：若$f(t)$满足傅氏积分的条件，则有

$$f(t)=\int_0^{+\infty}a(\omega)\cos\omega td\omega+\int_0^{+\infty}b(\omega)\sin\omega td\omega,$$

其中
$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau d\tau,$$

$$b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau d\tau.$$

证明：由傅氏积分定理的三角形式

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau\right]d\omega.$$

$\because$
$$\cos\omega(t-\tau)=\cos\omega t\cos\omega\tau+\sin\omega t\sin\omega\tau.$$

$\therefore$
$$f(t)=\int_0^{+\infty}\{\cos\omega t\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau d\tau\right]\}d\omega.$$

若记
$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau d\tau,$$

$$b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau d\tau.$$

则
$$f(t)=\int_0^{+\infty}a(\omega)\cos\omega td\omega+\int_0^{+\infty}b(\omega)\sin\omega td\omega.$$ 证毕。

2、试证：若$f(t)$满足傅氏积分定理的条件，当$f(t)$为奇函数时，则有

$$f(t)=\int_0^{+\infty}b(\omega)\sin\omega td\omega$$

其中
$$b(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\tau)\sin\omega td\tau$$

当$f(t)$为偶函数时，则有

$$f(t)=\int_0^{+\infty}a(\omega)\cos\omega td\omega$$

其中
$$a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau d\tau$$

证明：由上题结果，当$f(t)$为奇函数时

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)cos\omega\tau d\tau=0$$

$$b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)sin\omega\tau d\tau$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}f(\tau)sin\omega\tau d\tau$$

$$f(t)=\int_{0}^{+\infty}b(\omega)sin\omega td\omega;$$

当$f(t)$为偶函数时

$$b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)sin\tau d\tau=0$$

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)cos\omega\tau d\tau$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}f(\tau)cos\omega\tau d\tau$$

$$f(t)=\int_{0}^{+\infty}a(\omega)cos\omega td\omega\ .$$

证毕.

3、在题2中，设$f(t)=\begin{cases}1, & 当|t|\leqslant 1;\\ 0, & 当|t|>1,\end{cases}$ 计算出$a(\omega)$并推证：

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{sin\omega cos\omega t}{\omega}d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & |t|<1;\\ \frac{\pi}{4}, & |t|=1;\\ 0, & |t|>1.\end{cases}$$

解：显然$f(t)$是偶函数．其图形见图5—1．由题2结果知

$$a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}cos\omega\tau d\tau+\frac{2}{\pi}\int_{1}^{+\infty}0\cdot cos\tau d\tau$$

$$=\frac{2}{\pi}\left.\frac{sin\omega\tau}{\omega}\right|_{0}^{1}=\frac{2\,sin\omega}{\pi\omega},$$

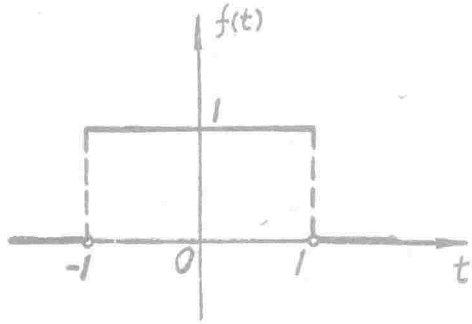

图　5—1

从而　$f(t)=\int_{0}^{+\infty}\frac{2\,sin\omega}{\pi\omega}cos\omega t\,d\omega.$

于是有

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{sin\omega cos\omega t}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}f(t).$$

当$t=\pm1$时$f(t)$是间断的，根据傅氏积分定理，用傅氏积分表示的函数$f(t)$，在其间断点的值收敛到

$$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}，故有$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}\,d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & 当|t|<1;\\ \frac{\pi}{4}, & 当|t|=1;\\ 0, & |t|>1.\end{cases}$$

第二节　　傅氏变换

1、求矩形脉冲函数 $f(t)=\begin{cases}A, & 0\leqslant t\leqslant\tau\\ 0, & 其他\end{cases}$ 的傅氏变换．

解：我们以$G(\omega)$表示$f(t)$的傅氏变换．

$$G(\omega)=F[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=A\int_0^{\tau}e^{-j\omega t}dt=\frac{A}{-j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{t=0}^{\tau}$$

$$=\frac{A(1-e^{-j\omega\tau})}{\omega j}.$$

2、求下列函数的傅氏积分：

（1）　$f(t)=\begin{cases}1-t^2, & t^2<1;\\ 0, & t^2>1.\end{cases}$

（2）　$f(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ e^{-t}\sin 2t & t\geqslant 0.\end{cases}$

（3）　$f(t)=\begin{cases}0, & -\infty<t<-1;\\ -1, & -1<t<0;\\ 1, & 0<t<1;\\ 0, & 1<t<+\infty.\end{cases}$

解：根据傅氏积分公式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right]e^{j\omega t}d\omega$$

以下我们先计算

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(2.1)$$

这样　$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega)e^{j\omega t}dw \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(2.2)$$

实际上，（2.1）式即是$f(t)$的傅氏变换式，（2.2）式即是$f(t)$的傅氏逆变换式．

（1）　$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-1}^{1}(1-t^2)e^{-j\omega t}dt$

$$=\int_{-1}^{1} e^{-j\omega t}dt-\int_{-1}^{1} t^2 e^{-j\omega t}dt= \mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2,$$

$$\mathrm{I}_1=\int_{-1}^{1} e^{-j\omega t}dt=\int_{-1}^{1}(cos\pi t-jsin\omega t)dt=\int_{-1}^{1} cos\omega tdt=\frac{2\,sin\omega}{\omega}.$$

由于 $t^2 sin\omega t$ 是 t 的奇函数，$t^2 coswt$ 是 t 的偶函数，

$$\mathrm{I}_2=\int_{-1}^{1} t^2 e^{-j\omega t}dt=\int_{-1}^{1} t^2(cos\omega t-jsin\omega t)dt=2\int_{0}^{1} t^2 cos\omega tdt,$$

进行二次分部积分得到

$$\int_{-1}^{1} t^2 e^{-j\omega t}=\frac{2\,sin\omega}{\omega}+\frac{4\,cos\omega}{\omega^2}-\frac{4\,sin\omega}{\omega^3},$$

于是

$$G(\omega)=\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2=\frac{4(sin\omega-\omega cos\omega)}{\omega^3},$$

注意到$G(\omega)$是偶函数，即可得到$f(t)$的傅氏积分

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{4}{\omega^3}(sin\omega-\omega cos\omega)cos\omega td\omega$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\omega^3}(sin\omega-\omega cos\omega)cos\,\omega t\,d\omega.$$

（2）$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$

$$=\int_{0}^{+\infty}e^{-t}sin2t\cdot e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{+\infty}e^{-t}\cdot\frac{e^{2jt}-e^{-2jt}}{2j}\cdot e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{2j}\int_{0}^{+\infty}e^{-[1-j(2-\omega)]t}dt-\frac{1}{2j}\int_{0}^{+\infty}e^{-[1+j(2+\omega)]t}dt$$

$$=\frac{1}{2j}\left\{\frac{-1}{1-j(2-\omega)}e^{-[1-j(2-\omega)]t}+\frac{1}{1+j(2+\omega)}e^{-[1+j(2+\omega)]t}\right\}_{0}^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{1-j(2-\omega)}-\frac{1}{1+j(2+\omega)}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(2-\omega)+j}-\frac{1}{-(2+\omega)+j}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{(2-\omega)-j}{(2-\omega)^2+1}+\frac{(2+\omega)+j}{(2+\omega)^2+1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{4(5-\omega^2)-j8\omega}{25-6\omega^2+\omega^4}=\frac{2(5-\omega^2-j2\omega)}{25-6\omega^2+\omega^4}.$$

于是$f(t)$的傅氏积分为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2(5-\omega^2-j2\omega)}{25-6\omega^2+\omega^4}e^{j\omega t}d\omega$$

由 $e^{j\omega t}=cos\omega t+jsin\omega t$，且注意到被积函数的奇偶性，得到

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(5-\omega^2)cos\omega t+2\omega sin\omega t}{25-6\omega^2+\omega^4}d\omega$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{(5-\omega^2)cos\omega t+2\omega sin\omega t}{25-6\omega^2+\omega^4}d\omega$$

（3）由第一节习题1的结果，满足傅氏积分定理之条件的函数$f(t)$可表示为

$$f(t)=\int_0^{+\infty}a(\omega)\cos\omega t\,d\omega+\int_0^{+\infty}b(\omega)\sin\omega t\,d\omega,$$

其中 $a(\omega)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau$，$b(\omega)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau\,d\tau$.

本题之$f(t)$满足傅氏积分定理的条件，且为奇函数，故$a(\omega)=0$，

$$b(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^1\sin\omega t\,dt=\frac{2(1-\cos\omega)}{\pi\omega}$$

$$\therefore\quad f(t)=\int_0^{+\infty}b(\omega)\sin\omega t\,d\omega$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega}\sin\omega t\,d\omega$$

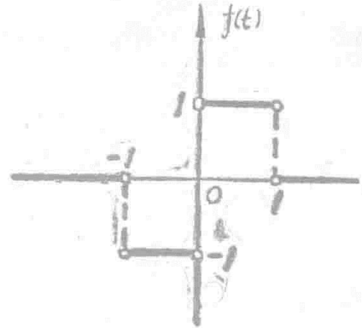

图 5—2

3、求下列函数的傅氏变换，并推证下列积分结果：

（1） $f(t)=e^{-\beta|t|}$，证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{\beta^2+\omega^2}\,d\omega=\frac{\pi}{2\beta}e^{-\beta|t|}$$

解：$f(t)$为偶函数，它的傅氏变换为

$$G(\omega)=F[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=2\int_0^{+\infty}e^{-\beta t}\cos\omega t\,dt=\frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2},$$

这是因为当$\beta>0$时

$$\mathrm{I}=\int_0^{+\infty}e^{-\beta t}\cos\omega t\,dt=\frac{1}{\omega}e^{-\beta t}\sin\omega t\Big|_0^{+\infty}+\frac{\beta}{\omega}\int_0^{+\infty}e^{-\beta t}\sin\omega t\,dt$$

$$=\frac{\beta}{\omega}\left[\frac{-1}{\omega}e^{-\beta t}\cos\omega t\Big|_0^{+\infty}-\frac{\beta}{\omega}\mathrm{I}\right]=\frac{\beta}{\omega^2}-\frac{\beta^2}{\omega^2}\mathrm{I},$$

故得 $\mathrm{I}=\dfrac{\beta}{\omega^2+\beta^2}$

$\because$ $G(\omega)=\dfrac{2\beta}{\omega^2+\beta^2}$ 是ω的偶函数，

因而

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\beta}{\omega^2+\beta^2}\cos\omega t\,d\omega$$

于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{\omega^2+\beta^2}\,d\omega=\frac{\pi}{2\beta}f(t)=\frac{\pi}{2\beta}e^{-\beta|t|},$$

（2） $f(t)=e^{-|t|}\cos t$， 证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\cos\omega t\,d\omega=\frac{\pi}{2}e^{-|t|}\cos\omega t$$

解：$f(t)$是偶函数，故有

$$G(\omega)=F[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=2\int_0^{+\infty}e^{-t}\cos t\cos\omega t\,dt$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-t}\cos(1-\omega)t\,dt+\int_0^{+\infty}e^{-t}\cos(1+\omega)t\,dt$$

本题（1）的解所得之积分公式

$$\int_0^{+\infty}e^{-\beta t}\cos\omega t\,dt=\frac{\beta}{\omega_1{}^2+\beta^2}$$

中，令 $\beta=1$ $\omega_1=1-\omega$及$\omega_1=1+\omega$，就有

$$\int_0^{+\infty}e^{-t}\cos(1-\omega)t\,dt=\frac{1}{(1-\omega)^2+1}=\frac{1}{2-2\omega+\omega^2},$$

$$\int_0^{+\infty}e^{-t}\cos(1+\omega)t\,dt=\frac{1}{(1+\omega)^2+1}=\frac{1}{2+2\omega+\omega^2},$$

$$\therefore\qquad G(\omega)=\frac{1}{2-2\omega+\omega^2}+\frac{1}{2+2\omega+\omega^2}=\frac{2(2+\omega^2)}{4+\omega^4},$$

$G(\omega)$是偶函数，因而有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{2+\omega^2}{4+\omega^4}\cos\omega t\,d\omega$$

同时我们得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{2+\omega^2}{4+\omega^4}\cos\omega t\,d\omega=\frac{\pi}{2}f(t)=\frac{\pi}{2}e^{-|t|}\cos t.$$

（3） $$f(t)=\begin{cases}\sin t, & |t|\leqslant\pi;\\ 0, & |t|>\pi.\end{cases}$$

证明： $$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\pi\sin\omega t}{1-\omega^2}d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\sin t, & |t|\leqslant\pi;\\ 0, & |t|>\pi.\end{cases}$$

解：$f(t)$是奇函数，它的傅氏变换为

$$G(\omega)=F[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=-2j\int_0^{\pi}\sin t\cdot\sin\omega t\,dt$$

$$=-j\left[\int_0^{\pi}\cos(1-\omega)t\,dt-\int_0^{\pi}\cos(1+\omega)t\,dt\right]$$

$$=-j\left[\frac{\sin(1-\omega)t}{1-\omega}-\frac{\sin(1+\omega)t}{1+\omega}\right]_0^{\pi}$$

$$= -j\left[\frac{\sin(1-\omega)\pi}{1-\omega} - \frac{\sin(1+\omega)\pi}{1+\omega}\right]$$

$$= -j\frac{(1+\omega)\sin(1-\omega)\pi-(1-\omega)\sin(1+\omega)\pi}{1-\omega^2}.$$

$\because \quad \sin(\pi\pm\omega\pi)=\sin\pi\ \cos\omega\pi\pm\cos\pi\ \sin\omega\pi=\pm\sin\omega\pi.$

$$\therefore \quad G(\omega)=-j\frac{(1+\omega)\sin\omega\pi+(1-\omega)\sin\omega\pi}{1-\omega^2}$$

$$=-2j\frac{\sin\omega\pi}{1-\omega^2}.$$

$G(\omega)$是奇函数，因而有

$$f(t)=\frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega)\cdot j\ \sin\omega t\ d\omega$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega\pi}{1-\omega^2}\sin\omega t\ d\omega.$$

同时推得

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega\pi\sin\omega t}{1-\omega^2}\,d\omega=\frac{\pi}{2}f(t)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\sin t, & |t|\leqslant\pi;\\ 0\ , & |t|>\pi.\end{cases}$$

4、已知某函数的傅氏变换为$G(\omega)=\frac{\sin\omega}{\omega}$求该函数$f(t)$.

解：由傅氏逆变换式

$$f(t)=F^{-1}[G(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}e^{j\omega t}d\omega,$$

$\because \quad \frac{\sin\omega}{\omega}$ 是偶函数 $\qquad \therefore \quad f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega t\,d\omega$

由第一节习题3．之结果

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}\,d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & |t|<1;\\ \frac{\pi}{4}, & |t|=1;\\ 0, & |t|>1.\end{cases}$$

即得所求函数

$$f(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |t|<1;\\ \frac{1}{4}, & |t|=1;\\ 0, & |t|>1.\end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (2.3)$$

其图形如图5—3所示.

另一方面，注意到，单位函数

$$u(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ 1, & t\geqslant 0,\end{cases}$$

的积分表达式为

$$u(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{sin\omega t}{\omega}d\omega$$

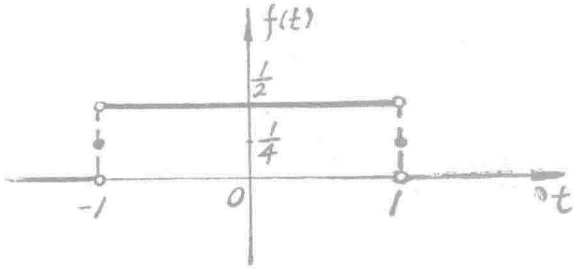

图 5—3

可以得到

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{sin\omega cos\omega t}{\omega}d\omega$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{sin(1-t)\omega}{\omega}d\omega+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{sin(1+t)\omega}{\omega}d\omega\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{sin\omega(1-t)}{\omega}d\omega+\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{sin\omega(1+t)}{\omega}d\omega-1\right]$$

$$=\frac{1}{2}[u(1-t)+u(1+t)-1] \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.4)$$

(2.3)式和(2.4)式是用不同的形式表达同一个函数，其图形亦是一致的.

5、已知某函数的傅氏变换为$G(\omega)=\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$求该函数$f(t)$.

解：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]e^{j\omega t}d\omega$$

根据δ——函数的重要性质：若$f(\tau)$为连续函数则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\delta(\tau-\tau_0)d\tau=f(\tau_0),$$

我们得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega+\omega_0)e^{j\omega t}d\omega=e^{-j\omega_0 t},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}d\omega=e^{j\omega_0 t}$$

于是

$$f(t)=\frac{1}{2}\left(e^{-j\omega_0 t}+e^{j\omega_0 t}\right)=cos\omega_0 t.$$

6、求函数$f(t)=\frac{1}{2}[\delta(t+a)+\delta(t-a)+\delta(t+\frac{a}{2})+\delta(t-\frac{a}{2})]$的傅氏变换

解：根据δ——函数的性质，$f(t)$的傅氏变换为

$$G(\omega)=F[f(t)]=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[\delta(t+a)+\delta(t-a)+\delta(t+\frac{a}{2})+\delta(t-\frac{a}{2})]e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{ja\omega}+e^{-ja\omega}+e^{ja\omega/2}+e^{-ja\omega/2}\right)$$

$$=\cos a\omega+\cos\frac{a}{2}\omega.$$

7、求如图5—4所示的三角形脉冲的频谱函数．

解：此图所示三角脉冲函数的解析式为

$$f(t)=\begin{cases}0\quad, & |t|>\frac{\tau}{2};\\ A+\frac{2A}{\tau}t, & -\frac{\tau}{2}>t\leqslant 0;\\ A-\frac{2A}{\tau}t, & 0<t\leqslant\frac{\tau}{2}.\end{cases}$$

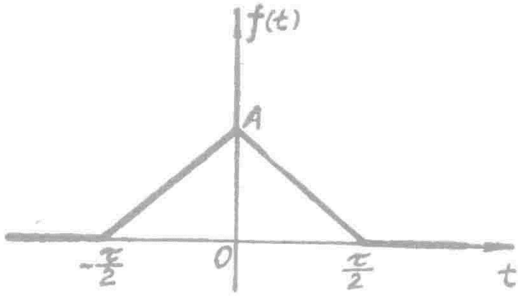

图　5—4

显然它是连续偶函数，且满足傅氏积分定理条件，因而它的频谱函数．

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=2\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,dt$$

$$=2\int_{0}^{\frac{\tau}{2}}\left(A-\frac{2A}{\tau}t\right)\cos\omega t\,dt$$

$$=\frac{2A\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\omega}-\frac{4A}{\tau}\int_{0}^{\frac{\tau}{2}}t\cos\omega t dt$$

$$=\frac{2A}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}-\frac{4A}{\tau}\left[\frac{t\sin\omega t}{\omega}+\frac{\cos\omega t}{\omega^2}\right]_{t=0}^{t=\frac{\tau}{2}}$$

$$=\frac{2A}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}-\frac{2A}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}-\frac{4A}{\tau\omega^2}\cos\frac{\omega\tau}{2}+\frac{4A}{\tau\omega^2}$$

$$=\frac{4A}{\tau\omega^2}\left(-\cos\frac{\omega\tau}{2}+1\right).$$

8、证明周期为T的非正弦函数$f(t)$的频谱函数为

$$G(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n\delta(\omega-n\omega_0).$$

其中C_n为$f(t)$的傅氏级数展开式中的系数.

证：我们知道如果一个以T为周期的函数在区间$\left[-\frac{T}{2},\ \frac{T}{2}\right]$上满足狄利克雷条件，它就可以在区间$\left[-\frac{T}{2},\ \frac{T}{2}\right]$上展成复指数形式的傅氏级数．在$f(t)$的连续点处有

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n e^{jn\omega_0 t},$$

其中傅氏系数$C_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$，$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$（$n=0$，$\pm1$，$\pm2$，…），

于是它的傅氏变换

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n e^{jn\omega_0 t}\right)e^{-j\omega t}dt$$

$$\overset{*)}{=}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j(\omega-n\omega_0)t}dt,$$

根据δ——函数的性质：如果$f(t)$连续则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t-t_0)dt=f(t_0).$$

于是若设

$$G_n(\omega)=2\pi\delta(\omega-n\omega_0).$$

由它的傅氏逆变换得

$$f_n(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(\omega-n\omega_0)e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n\omega_0)e^{j\omega t}d\omega=e^{jn\omega_0 t},$$

再进行傅氏变换得

$$2\pi\delta(\omega-n\omega_0)=G_n(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jn\omega_0}e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j(n\omega_0-\omega)t}dt$$

最后我们得到

$$G(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n\delta(\omega-n\omega_0).$$ 证毕.

注*)：无穷级数要能逐项积分，需得级数在积分区间上一致收敛.

9、求作如图5—5所示锯齿形波的频谱图

解：此波在$\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$上的解析表达式为

$$f(t)=\begin{cases} h+\frac{h}{T}t, & -\frac{T}{2}\leqslant t<0; \\ \frac{h}{T}t. & 0\leqslant t\leqslant\frac{T}{2}, \end{cases}$$

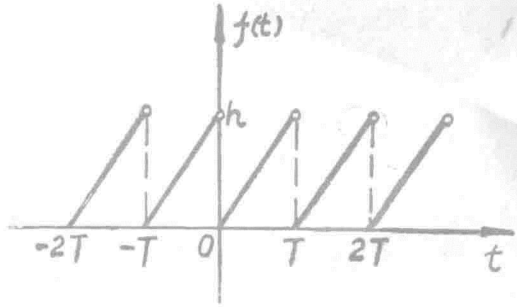

图 5—5

将其展开为傅氏级数

$$f(t)\sim\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n e^{jn\omega t}$$

它的傅氏系数

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-jn\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0}\left(h+\frac{h}{T}t\right)e^{-jn\omega t}dt+\frac{1}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}\frac{h}{T}te^{-jn\omega t}dt$$

$$=\frac{h}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}e^{jn\omega t}dt-\frac{h}{T^2}\int_{0}^{\frac{T}{2}}t(e^{jn\omega t}-e^{-jn\omega t})dt$$

$$=\frac{h}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}e^{jn\omega t}dt-\frac{2jh}{T^2}\int_{0}^{\frac{T}{2}}t\sin n\omega t\,dt$$

$(n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$

其中 $\omega=\frac{2\pi}{T}$

易知 $C_0=\frac{h}{2}$

由于 $\int_{0}^{\frac{T}{2}}e^{jn\omega t}dt=\int_{0}^{\frac{T}{2}}(\cos n\omega t+j\sin n\omega t)dt$

$$=\frac{jT}{2n\pi}(1-\cos n\pi)$$

$$\int_{0}^{\frac{T}{2}}t\sin n\omega t\,dt=-\frac{T^2}{4n\pi}\cos n\pi,$$

$\therefore$ $C_n=\frac{h}{T}\cdot\frac{jT}{2n\pi}(1-\cos n\pi)+\frac{2jh}{T^2}\cdot\frac{T^2}{4n\pi}\cos n\pi$

$$=\frac{jh}{2n\pi} \qquad (n=\pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$$

所求频谱（$f(t)$的第n次谐波的振幅）为

$$A_0=2\,|C_0|=h,\ A_n=2\,|C_n|=\frac{h}{n\pi} \qquad (n=1,\ 2\cdot\ )$$

第n次谐波的频率为

$$\omega_n=n\omega=\frac{2n\pi}{T} \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

频谱图如图 5—6 所示.

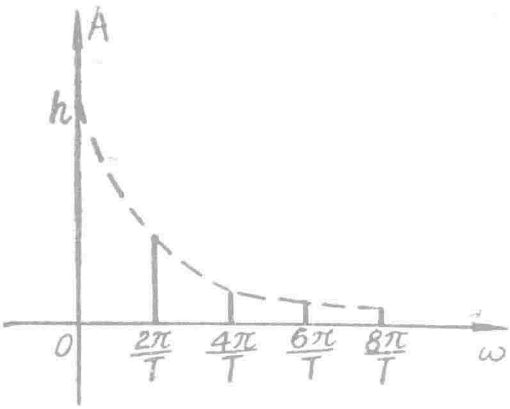

图　5—6

当 $n\neq 0$ 时，

$$C_n=\frac{hj}{nT\omega}\left(1-e^{-j\frac{nT\omega}{2}}\right)+\frac{2hj}{nT^2\omega}\left(t\cos n\omega t\Big|_{t=0}^{\frac{T}{2}}-\int_0^{\frac{T}{2}}\cos n\omega t\right)$$

$$=\frac{hj}{nT\omega}\left(1-\frac{nT\omega}{2}\right),$$

以

$\omega=\frac{2\pi}{T}$代入，得到

$$C_n=\frac{hj}{2n\pi} \qquad (n=\pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$$

它的频谱为

$$A_0=2\,|C_0|=h;$$

$$A_n=2|C_n|=\frac{h}{n\pi} \qquad (n=1,\ 2,\ 3\cdots).$$

第n次谐波的频率为

$$\omega_n=n\omega=\frac{2n\pi}{T} \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots),$$

其频谱图如图 5—6 所示

10、求高斯（$Gauss$）分布函数，

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

的频谱函数.

解：$f(t)$是满足傅氏积分定理条件的连续偶函数，于是有

$$G(\omega)=F[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\ e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}e^{-j\omega t}dt$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{1}{\sigma}\int_0^{+\infty}\ e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\cos\omega t dt$$

我们对上式两边关于ω求导得

$$G'(\omega)=\frac{d}{d\omega}\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{1}{\sigma}\int_0^{+\infty}\ e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\cos\omega t\,dt\right\}$$

$$\overset{*)}{=}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{1}{\sigma}\int_0^{+\infty}\ e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\ (-\sin\omega t)t\,dt$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\sigma}\left[\sigma^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\ \sin\omega t\ \Big|_{t=0}^{t=\infty}-\omega\sigma^2\int_0^{+\infty}\ e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\ \cos\omega t\ dt\right]$$

$$=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \omega\sigma\int_0^{+\infty}\ e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\cos\omega t dt=-\omega\sigma^2 G(\omega).$$

即 $\qquad G'(\omega)=-\omega\sigma^2 G(\omega)$,

对上述微分方程进行积分，得到

$$\ln G(\omega)=-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}+C_1,$$

或

$$G(\omega)=Ce^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}},\qquad\qquad (C_1,\ C\text{为任意常数})$$

令 $\qquad \omega=0\qquad$ 有

$$C=G(0)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{1}{\sigma}\int_0^{+\infty}\ e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\ dt.$$

∵ 欧拉——泊阿松积分

$$\int_0^{+\infty}\ e^{-u^2}\ du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}{}^{(**)},$$

$$\therefore\qquad C=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{1}{\rho}\ \sqrt{2}\,\sigma\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=1,$$

于是我们得高斯分布函数的频谱函数为

$$G(\omega)=e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}}$$

11、求钟形脉冲$f(t)=Ae^{-\beta t^2}$（$\beta>0$）的频谱函数．

解：$f(t)$的频谱函数为

$$G(\omega)=A\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\beta t^2}e^{-j\omega t}dt=2A\int_0^{+\infty}e^{-\beta t^2}\cos\omega t\,dt,$$

利用上题计算所得之结果：

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\cos\omega t\,dt=e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}},$$

即
$$\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\cos\omega t\,dt=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sigma e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}},$$

令
$$\frac{1}{2\sigma^2}=\beta,\quad 即\quad \sigma^2=\frac{1}{2\beta},\quad \sigma=\frac{1}{\sqrt{2\beta}},$$

即得
$$\int_0^{+\infty}e^{-\beta t^2}\cos\omega t\,dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\cdot e^{\frac{\omega^2}{4\beta}},$$

于是

$$G(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\,Ae^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}\ .$$

---

*）要对含参数积分关于参数的求导穿过积分号进行，即

$$\frac{d}{d\omega}\int_a^\infty f(x,\ \omega)\,dx=\int_a^\infty\frac{\partial}{\partial\omega}f(x,\ \omega)dx$$ 必需要满足下述条件才可：

① $f(x,\ \omega)$，$f_\omega'(x,\ \omega)$在〔a，∞；C，d〕上连续；　② $\int_a^\infty f(x,\omega)dx$存在；

③ $\int_a^\infty f_\omega'(x,\omega)dx$ 关于 ω 在〔C，d〕上一致收敛．

在我们所进行的运算中，所要求的条件都是具备的。

**）参考（复旦大学编，数学分析下册，第五章§3；或菲赫金哥尔兹著，微积分学教程，二卷，第八章，§4）。