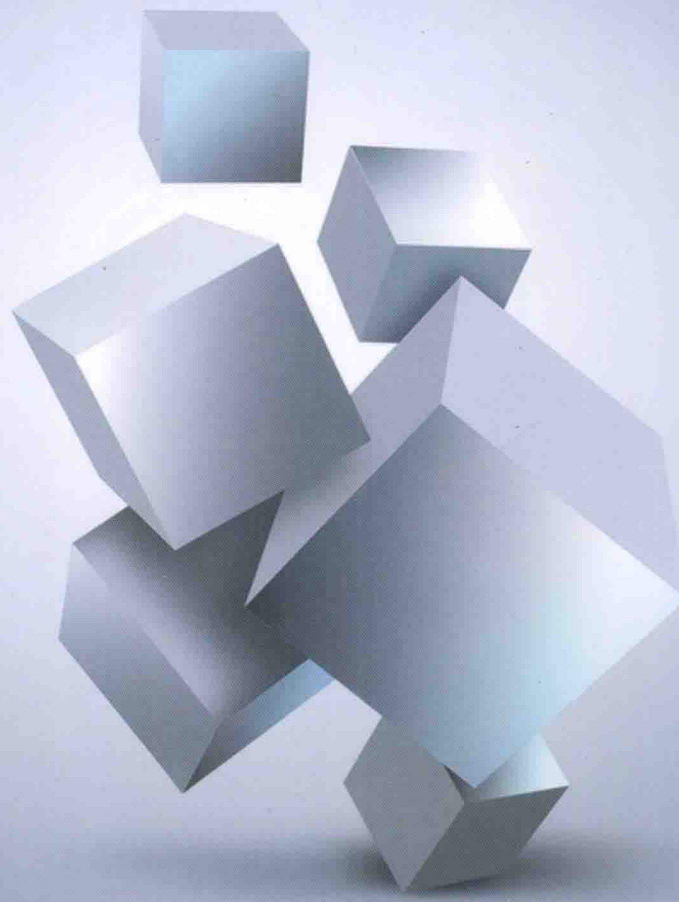
GAODENGSHUXUEXITIKEJIAOCHENG

高等数学

习题课教程（上册）

王顺凤　吴亚娟　孟祥瑞　杨阳　孙艾明・编



东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

高等数学习题课教程(上册)

王顺凤　吴亚娟　孟祥瑞
杨　阳　孙艾明　编

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS
·南京·

内容提要

本书根据编者多年的教学实践与教改经验，结合教育部高教司颁布的本科非数学专业理工类、经济管理类《高等数学课程教学基本要求》编写而成.

全书分上、下两册出版，包括与一元函数的极限与连续、一元微积分、向量代数与空间解析几何、多元微积分、常微分方程、无穷级数等内容相配套的内容提要与归纳、典型例题分析、基础练习、强化训练及同步测试5个部分.

本书是上册部分，内容为与一元函数的极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分以及定积分应用相关的部分.

为利于学生自主学习，也考虑到便于教师因材施教，书后还附有基础练习、强化训练及同步测试的参考答案.

本书突出基本概念、基本公式与理论知识的应用，对于典型例题本书都按类给出重要题型的分析与小结，帮助学生自主学习时把握解题的方向，从而掌握解题的方法与技巧. 全书结构严谨、逻辑清晰、说理浅显、通俗易懂. 例题丰富且具有代表性与梯度，基础练习、同步测试便于学生对于基础知识与基本技能的自我练习与检测；强化训练便于自我要求较高的学生进一步提高其解题能力，以满足优秀学生的学习需求. 本书可作为高等院校理、工、经管类专业高等数学课程的习题课的教材选择使用，也可作为学生考研复习及工程技术人员学习的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题课教程. 上册/王顺凤等编. —南京：东南大学出版社，2015.10(2016.8 重印)

ISBN 978-7-5641-6019-7

Ⅰ.①高… Ⅱ.①王… Ⅲ.①高等数学—高等学校—习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 217662 号

高等数学习题课教程(上册)

出版发行 东南大学出版社
出 版 人 江建中
社　　址 南京市四牌楼 2 号
邮　　编 210096

经　　销 全国各地新华书店
印　　刷 兴化印刷有限责任公司
开　　本 700 mm×1000 mm 1/16
印　　张 9.5
字　　数 186 千字
版　　次 2015 年 10 月第 1 版
印　　次 2016 年 8 月第 2 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5641-6019-7
定　　价 24.00 元

(本社图书若有印装质量问题，请直接与营销部联系。电话：025-83791830)

前　言

本教材是按照教育部提出的高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划的精神，参照教育部制定的全国硕士研究生入学考试理、工、经管类数学考试大纲和南京信息工程大学理、工类高等数学教学大纲，以及2004年教育部高教司颁布的本科非数学专业理工类、经济管理类《高等数学课程教学基本要求》，并汲取近年来南京信息工程大学高等数学课程教学改革实践的经验，借鉴国内外同类院校数学教学改革的成功经验编写而成. 本书力求具有以下特点：

(1) 与现行使用的《高等数学》教材内容、要求相一致，既强调内容的完整性、实践性与应用性，又使学生对微积分及其应用有更深入的理解.

(2) 对高等数学的有关内容重新做适当的整合与提炼.

(3) 归纳常见的题型与解题技巧，提高学生的解题能力.

(4) 注重增强学生应用数学知识解决实际问题的能力.

(5) 适当增加考研技能的训练. 增强基础内容与综合运用之间的衔接性.

(6) 可以作为高等数学习题课教材选择使用.

(7) 对例题作了精心选择，教材中例题丰富，既具有较好的代表性又有一定的梯度. 适合各类读者的要求.

(8) 可根据各类专业的需要选用. 本书兼顾了理、工、经管类各专业的教学要求，在使用本书时，参照各专业对数学教学的基本要求进行取舍.

本书由南京信息工程大学王顺凤、吴亚娟、孟祥瑞、杨阳、孙艾明等老师编写，由王顺凤老师统稿，由南京信息工程大学杨阳等老师校对，全书的所有编写人员集体认真地讨论了各章的书稿，刘红爱、孟祥瑞、咸亚丽、顾文亚、左相等许多老师都提出了宝贵的修改意见，全书的框架、定稿由王顺凤承担.

南京信息工程大学硕士生导师徐晶老师仔细审阅了全部书稿，提出了宝贵的修改意见，全体编写人员向徐晶老师表示衷心的感谢.

本书是在由南京信息工程大学王顺凤、吴亚娟、孟祥瑞、杨阳、孙艾明等老师编写的《高等数学习题课教程》的基础上修订、改编而成，由于编写人员的水平所限，因此书中必有不少缺点和错误，敬请各位专家、同行和广大读者批评指正.

编者

2015 年 5 月

目　　录

1 函数的极限与连续

1.1 内容提要与归纳

1.1.1 函数的概念与性质

1) 函数的定义

设有两个变量 x,y,D 是一个给定的数集,如果对于 $\forall x \in D$,按照一定的法则总有唯一确定的数值 y 与之对应,则称变量 y 是 x 的函数,记作:$y=f(x)$. 数集 D 称为函数的定义域.

2) 函数的几个特征性质

设 D 为函数 $f(x)$ 的定义域,区间 $I \subset D$,则函数有如下性质:

性质 1 奇偶性:若对任意的 $x \in D$,总有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数,偶函数的图像关于 y 轴对称;若对任意的 $x \in D$,总有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数,奇函数的图像关于原点中心对称.

性质 2 周期性:若存在 $T \neq 0$,使得当 $\forall x \in D$,且 $x+T \in D$ 都有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为以 T 为周期的周期函数.

性质 3 单调性:若对 I 内任意的 $x_1 < x_2$,总有 $f(x_1) < f(x_2)$(或 $f(x_1) > f(x_2)$),则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加(或减少).

性质 4 有界性:若存在 $M>0$,使得对任意 $x \in I$,都有 $|f(x)| \leqslant M$,则称 $f(x)$ 在 I 上有界,否则称 $f(x)$ 在 I 上无界.

3) 反函数的定义

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,值域为 W,若对于任意的 $y \in W$,在 D 上总可以确定 x 与 y 对应,且满足 $y=f(x)$,则称新函数 $x=f^{-1}(y)$ 为函数 $y=f(x)$ 的反函数,习惯记为 $y=f^{-1}(x)$.

4) 复合函数的定义

若 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1,$u=g(x)$ 的定义域为 D_2,当 $g(x)$ 的值域落在 $f(u)$ 的定义域 D_1 内时,称 $y=f[g(x)]$ 是由 $u=g(x)$ 和 $y=f(u)$ 复合成的复合函数.

5）初等函数的定义

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数. 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次函数复合步骤所构成的并用一个解析式表达的函数，称为初等函数.

6）双曲函数的公式

(1) 双曲正弦函数：$\mathrm{sh}x=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x})$.

(2) 双曲余弦函数：$\mathrm{ch}x=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x})$.

(3) 双曲正切函数：$\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}$.

1.1.2 极限的概念与求法

1）函数极限的定义

(1) 若对于 $\forall\varepsilon>0$，总存在大正数 $X>0$，使得当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

(2) 若对于 $\forall\varepsilon>0$，总存在小正数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

(3) 若对于 $\forall\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $0<x_0-x<\delta(0<x-x_0<\delta)$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 的左极限（右极限），记作

$$f(x_0^-)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A(f(x_0^+)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A).$$

当以上函数的极限不存在时，则称函数在该极限过程时发散.

类似地，读者可以自己给出单侧极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 的定义.

2）数列极限的定义

对于 $\forall\varepsilon>0$，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$，则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 如果数列极限不存在，则称该数列发散.

3）极限的基本性质

(1) 若极限存在，则其值唯一.

(2) 若极限存在，则函数在局部相应的范围内有界.

(3) 若极限存在且函数在局部相应的范围内恒为正（或负），则该极限值是非负（正）的.

4）无穷小与无穷大

(1) 无穷小和无穷大的定义分别为：

① 若 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = 0$，则称 $f(x)$ 为 $x \to x_0 (x \to \infty)$ 时的无穷小；

② 若对于 $\forall M > 0$，总存在相应的数 $X > 0 (\delta > 0)$，使得当 $|x| > X (0 < |x - x_0| < \delta)$ 时，恒有 $|f(x)| > M$，则称 $f(x)$ 当 $x \to \infty (x \to x_0)$ 时为无穷大，记作 $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ (x \to x_0)}} f(x) = \infty$.

(2) 无穷小的几个常用性质如下：

① 有限个无穷小的代数和仍是无穷小；

② 有限个无穷小的乘积仍是无穷小；

③ 无穷小与有界函数的乘积仍是无穷小.

(3) 无穷小与无穷大的关系：在自变量的某个变化过程中，无穷大的倒数是无穷小，非零无穷小的倒数是无穷大.

5）函数极限存在的充要条件

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$.

(2) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

(3) $\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$，其中 $\lim \alpha(x) = 0$.

6）极限存在的判别准则

(1)（夹逼准则）若 $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$（$\exists N$，当 $n > N$ 时），且 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} z_n = a$，则 $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = a$.

(2)（单调有界准则）单调有界数列必有极限.

说明：夹逼准则对于函数极限也成立.

7）极限的四则运算法则

设 $\lim f(x)$ 及 $\lim g(x)$ 都存在，则下列等式在自变量的同一变化过程中成立：

(1) $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$.

(2) $\lim[f(x)g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$,

$\lim[Cf(x)] = C\lim f(x)$ （C 为任意常数）.

(3) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ （$\lim g(x) \neq 0$）.

说明："lim" 表示当 $x \to x_0$、$x \to \infty$ 等极限过程中结论均成立时的任一极限形式.

8）两个重要极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}, \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}, \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}$.

9）无穷小比较与等价无穷小替换

（1）设 $\lim\alpha=0, \lim\beta=0$，在该变化过程中：

① 若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$；

② 若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小；

③ 若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=C, C\neq 0$，则称 β 与 α 是同阶无穷小；

④ 若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，则称 β 与 α 是等价无穷小，记作 $\beta\sim\alpha$；

⑤ 若 $\lim\dfrac{\beta}{x^{k}}=C, C\neq 0, k>0$，则称 β 是 x 的 k 阶无穷小.

（2）设 $\alpha\sim\alpha', \beta\sim\beta'$，若 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}f(x)$ 存在，则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}f(x)=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}f(x)$.

10）求极限的一些常用方法

（1）利用极限的四则运算及复合运算法则.

（2）利用无穷小与有界量的乘积仍为无穷小.

（3）利用函数极限存在的充要条件.

（4）利用无穷小与无穷大的性质.

（5）利用极限存在的两个准则.

（6）利用两个重要极限.

（7）利用等价无穷小代换.

（8）利用连续函数的定义.

1.1.3 函数的连续性

1）函数连续性的定义

（1）函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的定义有下列两个等价的说法：

① 设 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续；

② 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

(2) 若函数 $f(x)$ 在(a,b)内处处连续，则称 $f(x)$ 在区间(a,b)内连续.

(3) 若函数 $f(x)$ 在开区间(a,b)内连续，且在 $x=a$ 处右连续，在 $x=b$ 处左连续，则称函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续.

2) 连续函数的运算法则

(1) 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 处连续，则 $f(x)\pm g(x)$、$f(x)\cdot g(x)$ 及 $\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$ 都在点 x_0 处连续.

(2) 设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续，且 $\varphi(x_0)=u_0$，而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 处连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 处也连续.

3) 初等函数的连续性

初等函数在其定义区间上都是连续的.

4) 函数的间断点及类型

(1) 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的不连续点或间断点.

(2) 由连续的定义可知：若 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义(x_0 可以除外)，则具有下列条件之一者，x_0 即为函数 $f(x)$ 的间断点：

① $f(x)$ 在 x_0 处无定义；

② $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；

③ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

(3) 间断点的类型如下：

① 第一类间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$、$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 均存在的间断点称为 $f(x)$ 的第一类间断点.

• 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，则点 x_0 称为 $f(x)$ 的可去型间断点；

• 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，则点 x_0 称为 $f(x)$ 的跳跃型间断点.

② 第二类间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$、$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 中至少有一个不存在的间断点称为 $f(x)$ 的第二类间断点.

• 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$、$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 中至少有一个为无穷大，则点 x_0 称为 $f(x)$ 的无穷型间断点；

• 若极限不存在是由于函数 $f(x)$ 在该点某邻域内无限次振荡，则点 x_0 称为 $f(x)$ 的振荡型间断点.

5）闭区间上连续函数的性质

设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则有：

(1)（最大(小)值定理） $f(x)$ 在$[a,b]$上必取得最大值与最小值.

(2)（有界性定理） $f(x)$ 在$[a,b]$上有界.

(3)（介值定理） 设m和M分别为$f(x)$在$[a,b]$上的最小值和最大值，对于满足 $m \leqslant C \leqslant M$ 的任何实数C，则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi) = C$.

(4)（零点定理） 若 $f(a)f(b) < 0$，则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi) = 0$.

1.1.4 常用公式与结论

1）几个特殊函数

(1) 符号函数：$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0. \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

(2) 取整函数：设x为任一实数，则不超过x的最大整数称为x的取整函数，记作$[x]$.

(3) 狄立克雷函数：$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q} \\ 0, & x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$，其中 $\mathbf{Q}$ 为有理数集.

2）两个重要极限的应用形式

(1) 重要极限一的应用形式：$\lim \dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$（其中 $\lim\alpha(x) = 0, \alpha(x) \neq 0$）.

(2) 重要极限二的应用形式：$\lim\left[1 + \dfrac{1}{\varphi(x)}\right]^{\varphi(x)} = \mathrm{e}$（其中 $\lim\varphi(x) = \infty$）或 $\lim[1 + \alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}} = \mathrm{e}$（其中 $\lim\alpha(x) = 0, \alpha(x) \neq 0$）.

3）几个常用的已知极限

(1) $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0)$.

(2) $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

(3) $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & q = 1 \end{cases}$，当 $q = -1$ 或 $|q| > 1$ 时，$\lim\limits_{n \to \infty} q^n$ 不存在.

4）几个常用的等价无穷小量公式

当 $x \to 0$ 时，有：

$$\sin x \sim x; \tan x \sim x; 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2; \arctan x \sim x; \arcsin x \sim x;$$

$$e^x-1\sim x;a^x-1\sim x\ln a;\ln(1+x)\sim x;\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x.$$

5）几个常用的极限公式

（1）幂指函数的极限公式：$\lim[\alpha(x)]^{\beta(x)}=e^{\lim[\beta(x)\ln\alpha(x)]}$（其中 $\alpha(x)>0$）.

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m\\ 0, & n>m\\ \infty, & n<m\end{cases}$.

6）几个常用的结论

（1）在同一极限过程中，若 $f(x)=o(g(x))$，则 $f(x)+g(x)\sim g(x)$.

（2）设 $y=f(x)$ 是连续函数，则 $y=|f(x)|$ 也是连续函数.

（3）若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是连续函数，则

$$\varphi(x)=\min\{f(x),g(x)\},\quad \psi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$$

也都是连续函数.

1.2　典型例题分析

例1　设 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid |x|<2\}$，求 $f(x)+f(2x)$ 的定义域.

解　由 $|2x|<2$，解得：$|x|<1$，即 $f(2x)$ 的定义域为 $\{x\mid |x|<1\}$.

综上：$f(x)+f(2x)$ 的定义域为 $\{x\mid |x|<1\}$.

小结：求复合函数的定义域时，内层函数的值域必须包含在外层函数的定义域内.

例2　已知 $f(u)=2(1-u^2)$，求 $f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)$.

解　令 $u=\cos\dfrac{x}{2}$，得

$$f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=2\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)=2\sin^2\frac{x}{2}=1-\cos x.$$

例3　已知 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=e^x$，求 $g[f(x)]$ 的表达式.

解　$g[f(x)]=e^{f(x)}$，而 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，所以

$$g[f(x)]=\begin{cases}e, & |x|\leqslant 1\\ 1, & |x|>1\end{cases}.$$

例 4 证明：$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 为奇函数.

证明 $\forall x\in(-\infty,\infty)$，则

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$$
$$=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$$

故 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 为奇函数.

例 5 计算下列数列的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2n}-\sqrt{2n-1})$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right]$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-n}}\right)$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2n}-\sqrt{2n-1})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n}+\sqrt{2n-1}}=0$.

小结：当数列极限为 $\infty-\infty$ 型时，可恒等变形为$\frac{\infty}{\infty}$ 或$\frac{0}{0}$，再求极限.

(2) 先求出数列的一般项的初等函数关系表达式，即

$$原式=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

小结：求数列极限，当不能直接用极限运算法则求时，可先将数列的通项化为初等函数关系的表达式，再求极限.

(3) 利用夹逼准则，由于

$$\frac{n}{\sqrt{n^2-n}}\leqslant\left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-n}}\right)\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}$$

又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}=1,\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=1$$

故由夹逼准则可得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-n}}\right)=1$$

小结: 求数列极限,若通项的初等函数关系表达式不易求得时,可利用夹逼准则求极限.

例 6　设 $a>0, x_0>0, x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right), n=0,1,2,\cdots$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解　由于 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)\geqslant\sqrt{x_n\frac{a}{x_n}}=\sqrt{a}$,故 $\{x_n\}$ 有下界. 又

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{x_n^2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{(\sqrt{a})^2}\right)=1,$$

故 $x_{n+1}\leqslant x_n\quad(n=0,1,2,\cdots)$.

所以 $\{x_n\}$ 单调减少且有下界,故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$,对递推公式两边求极限,

则 $l=\frac{1}{2}\left(l+\frac{a}{l}\right)$,解得 $l=\sqrt{a}$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

小结: 对于题设中给出递推项的数列极限常用单调有界准则求该极限.

例 7　讨论下列函数当 $x\to 0$ 时的极限:

(1) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\sin x, & x<0\\ \cos x, & x>0\end{cases}$.

(2) $f(x)=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

解　(1) 考虑在分段点 $x=0$ 处的左极限与右极限:

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\cos x=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

(2) 考虑在分段点 $x=0$ 处的左极限与右极限:

当 $x\to 0^+$ 时,$e^{\frac{1}{x}}\to+\infty$,故 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$;

当 $x\to 0^-$ 时,$e^{\frac{1}{x}}\to 0$,故 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$,

所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ 不存在.

小结:(1) 分段函数在分段点处的极限应利用左、右极限来求.

(2) 指数函数在使指数处于 ∞ 的点处的极限也必须考虑左、右极限.

例 8 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$. (2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$.

解 (1) 当 $x\to 0$ 时极限为 $\dfrac{0}{0}$ 型,且含有无理式,常先对无理式进行有理化,然后消去零因子,再用极限运算法则即可求出该极限. 故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1$$

(2) 当 $x\to 1$ 时极限为 $\dfrac{0}{0}$ 型,常先对分子、分母进行因式分解,然后消去零因子,再用极限运算法则即可求出该极限. 故

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+2)=3$$

例 9 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^3(2x+1)^7}{(2x-1)^{10}}$ 的极限.

解 当 $x\to\infty$ 时, 极限为 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型,先对分子分母同除以无穷大项的最高次幂 x^{10},再用极限运算法则即可求出该极限. 故

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^3(2x+1)^7}{(2x-1)^{10}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^3\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^7}{\left(2-\dfrac{1}{x}\right)^{10}}=\frac{2^7}{2^{10}}=\frac{1}{8}$$

小结:对于 $\dfrac{0}{0}$,$\dfrac{\infty}{\infty}$,$\infty-\infty$,$0\cdot\infty$ 等极限,若是 $\dfrac{0}{0}$,$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型,一般不能直接运用极限运算法则,必须对原式进行恒等变形、化简,然后再求极限. 常使用的化简方法有:通分,分子、分母有理化,分子、分母进行因式分解等,$\dfrac{0}{0}$ 型的极限常需先消去分子、分母的公因式,然后再求极限;$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的极限常需先对分子、分母同时除以 ∞ 项的最高次幂,然后再求极限. 对于 $\infty-\infty$,$0\cdot\infty$ 型,必须先对原式进行恒等变形化为 $\dfrac{0}{0}$,$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型,然后再求极限.

例 10　计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\arctan x}{\sqrt{x^3-1}}$.　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\ln(1+x^2)}$.　　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$.

解　(1) 由于 $|\arctan x|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^3-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^3}}}=0$，

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\arctan x}{\sqrt{x^3-1}}=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x^2}=1$

小结：利用等价无穷小代换求某些多个因式乘积的极限时比较简便.

(3) 解法一：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x}{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}}=\dfrac{e}{e^{-1}}$

$=e^2$

解法二：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot2+1}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^2\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)$$

$$=e^2\cdot1=e^2$$

小结：对于 1^∞ 型极限，常利用重要极限二的公式求极限，但要注意往往先进行恒等变形或作变量代换使之成为重要极限二的标准形式时才能利用该公式求极限.

例 11　已知 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{\sin(x^2-1)}=3$，求常数 a,b 的值.

解　因为 $\lim\limits_{x\to1}\sin(x^2-1)=0$，故只有当 $\lim\limits_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$ 时才能使 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{\sin(x^2-1)}$ 存在.

由此得 $1+a+b=0$，即 $b=-1-a$，将其代入原式左边，有

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{\sin(x^2-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-a-1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\lim_{x\to1}\frac{x^2-1+a(x-1)}{x-1}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to1}(x+1+a)=\frac{1}{2}(a+2)=3.$$