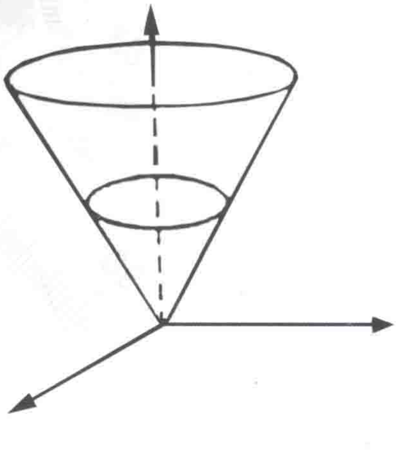
普通高等教育“十三五”规划建设教材

高等数学
同步学习指导

Gaodeng Shuxue Tongbu Xuexi Zhidao

曹殿立　马巧云　主编



中国农业大学出版社
CHINA AGRICULTURAL UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十三五”规划建设教材

高等数学同步学习指导

曹殿立　马巧云　主编

中国农业大学出版社
·北京·

内 容 提 要

本书系《高等数学》(曹殿立、姬利娜主编，中国农业大学出版社出版)的配套学习教材，内容依照主教材的章节顺序依次编排，按章编写. 各章内容包括内容提要、典型例题、习题解答和综合练习题及其解答四个部分.

本书注重课程内容的系统归纳与总结，突出典型例题的示范讲解. 为便于读者学习，给出了主教材全部习题及综合练习题的详尽解答. 在例题和习题的解答中，注重思路分析和方法归纳，并且对于部分题目给出了多种解法. 本书的编写参考了最新的全国硕士研究生入学考试大纲，例题、习题数量多且题型丰富.

本书可作为高等学校非数学专业学生学习高等数学课程的辅导教材、考研复习用书或教师教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步学习指导/曹殿立，马巧云主编. —北京：中国农业大学出版社，2016.8
ISBN 978-7-5655-1683-2

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①曹… ②马… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 187884 号

书　　名　高等数学同步学习指导
作　　者　曹殿立　马巧云　主编

策划编辑	赵　中	**责任编辑**	韩元凤
封面设计	郑　川		
出版发行	中国农业大学出版社		
社　　址	北京市海淀区圆明园西路 2 号	**邮政编码**	100193
电　　话	发行部 010-62818525，8625	读者服务部	010-62732336
	编辑部 010-62732617，2618	出　版　部	010-62733440
网　　址	http://www.cau.edu.cn/caup	**E-mail**	cbsszs@cau.edu.cn
经　　销	新华书店		
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司		
版　　次	2016 年 9 月第 1 版　2016 年 9 月第 1 次印刷		
规　　格	787×1 092　16 开本　23.75 印张　580 千字		
定　　价	50.00 元		

图书如有质量问题本社发行部负责调换

编 写 人 员

主　编　曹殿立　马巧云

副主编　张建林　苏克勤　尹　丽　王亚伟

参　编　乔松珊　李艳华　吕海燕　侯贤敏　卢亚丽

前　言

本书是《高等数学》(曹殿立、姬利娜主编，中国农业大学出版社出版)的配套学习教材.

本书以系统把握知识脉络、增强综合应用能力、提高学习效果为宗旨. 内容依照主教材的章节顺序依次编排，按章编写. 每章内容如下：

1. 内容提要　对教学内容进行系统地归纳总结，使读者能够全面把握知识体系与学习重点；

2. 典型例题　对重点例题进行分类解析，对各类题型的解题思路和方法进行归纳总结，选题广泛，题型丰富；

3. 习题解答　对教材的全部习题进行了详细解答；

4. 综合练习题及其解答　包括填空、单项选择、计算和证明题，以检验学习效果，题型与研究生考试接轨；

本书可作为高等学校非数学专业学生学习高等数学课程的辅导教材、考研复习用书或教师教学参考书.

参加本教材编写的有河南农业大学的曹殿立、马巧云、苏克勤、尹丽、王亚伟、李艳华、吕海燕、侯贤敏，中原工学院的张建林，中原工学院信息商务学院的乔松珊和华北水利水电大学的卢亚丽，最后由曹殿立统一定稿.

郑州大学石东洋教授仔细审阅了全稿，并提出了许多建设性的意见和建议，在此表示由衷的谢意！

对中国农业大学出版社为本书的顺利出版所付出的辛勤劳动表示衷心感谢！

向参考文献的作者们表示感谢！

虽然我们十分努力，但由于水平所限，定有错误与不妥之处，恳请广大师生和读者批评指正.

曹殿立

2016 年 6 月 26 日

目　　录

第一章　函数的极限与连续

内容提要

一、函数的概念

1. 函数的定义

(1)函数的一般定义

设 D 和 W 是两个实数集，f 是一个对应规则. 在此规则下，若对每一个 $x\in D$，在 W 中都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 数集 D 叫作函数的**定义域**，x 叫作**自变量**，y 叫作**因变量**.

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值 $f(x_0)$ 称为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值 . W 的子集 $f(D)=\{y|y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的**值域**.

一个函数由其对应规则 f 及定义域 D 完全确定 . 如果两个函数的定义域和对应规则都相同，那么这两个函数是相同的.

(2)反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 $f(D)$. 如果对于每一个 $y\in f(D)$，都有唯一确定的 $x\in D$ 与之对应，满足 $y=f(x)$，则在 $f(D)$ 上确定了以 y 为自变量的函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，$y\in f(D)$，并称 $x=f^{-1}(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数.

由于习惯上 x 表示自变量，y 表示因变量，将 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 与 y 对换，得到 $y=f^{-1}(x)$. 也称 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数.

为区别起见，称 $x=f^{-1}(y)$ 为 $y=f(x)$ 的**直接反函数**，称 $y=f^{-1}(x)$ 为 $y=f(x)$ 的**间接反函数**.

严格单调增加(减少)函数必有反函数，且反函数在其定义域上也是严格单调增加(减少)函数.

(3)复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 E，$u=\varphi(x)$ 的值域为 W，若 $W\cap E\neq\Phi$，则称由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为**复合函数**.

(4)基本初等函数与初等函数

常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数称为**基本初等函数**；

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算所构成的能用一个式子表示的函数称为**初等函数**.

(5)分段函数

在定义域的不同范围内有不同对应规则的函数称为**分段函数**.

2. 函数的几何性质

(1)有界性

设函数 $y=f(x)$,$x\in D$,若存在常数 $K>0$,对任意的 $x\in D$ 都有 $|f(x)|\leqslant K$,则称函数 $f(x)$在 D 上有界.

函数的有界性还可以等价地表述为:

设函数 $y=f(x)$,$x\in D$,若存在两个数 m 和 M,对任意的 $x\in D$ 都有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$,则称函数 $f(x)$在 D 上是有界的.其中 m 称为 $f(x)$在 D 上的下界,而 M 称为 $f(x)$在 D 上的上界.

(2)单调性

设函数 $y=f(x)$,$x\in D$,若对任意的 $x_1,x_2\in D$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$($f(x_1)\geqslant f(x_2)$)成立,则称 $f(x)$在 D 上**单调增加(减少)**.上述不等式中若没有等号,则称 $f(x)$在 D 上**严格单调增加(减少)**.单调增加或单调减少的函数均称为**单调函数**.

在某个区间上,若 $f(x)$为单调函数,则称该区间为函数 $f(x)$的单调区间.

(3)奇偶性

设函数 $y=f(x)$的定义域 D 关于原点对称.若对任意 $x\in D$,有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$是**奇函数**;若对任意的 $x\in D$,有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$是**偶函数**.

奇函数的图形关于原点对称,偶函数的图形关于 y 轴对称.

(4)周期性

设函数 $y=f(x)$,$x\in D$,若存在常数 $T>0$,使对任意 $x\in D$ 有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$为**周期函数**,称 T 为 $f(x)$的一个周期.通常所说的周期函数的周期指的是它的**最小正周期**.

二、极限的概念

1. 极限的形式

(1)数列的极限

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a$$

(2)函数的极限

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A, \lim_{x\to+\infty} f(x) = A, \lim_{x\to\infty} f(x) = A;$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A, \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A;$$

2. 极限的基本性质

(1)唯一性;(2)有界性;(3)保号性.

3. 极限的存在准则

(1)单调有界准则;(2)迫敛准则.

4. 函数极限存在的充要条件

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = A.$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0-0) = f(x_0+0) = A.$$

5. 无穷小量与无穷大量

(1)无穷小量与无穷大量的定义

在某一极限过程中,如果函数 $f(x)$的极限为零(无穷大),则称 $f(x)$为该极限过程之下的**无穷小量(无穷大量)**.

(2)无穷小量与极限的关系

在某一极限过程中,函数 $f(x)$的极限为 A 的充分必要的条件是 $f(x)=A+\alpha$,其中 $\alpha=\alpha(x)$为该极限过程之下的无穷小量.

(3)无穷小量与无穷大量的关系

无穷大量的倒数为无穷小量;非零无穷小量的倒数为无穷大量.

(4)无穷小量的运算

有限个无穷小量的和(或差)是无穷小量;

无穷小量的乘积是无穷小量;

有界函数(或常数)与无穷小量的乘积是无穷小量.

(5)无穷小量的阶

设变量 $\alpha(\alpha\neq 0)$,β 是同一个极限过程中两个无穷小量,如果

① $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$,则称 β 是比 α **高阶的无穷小量**,记作 $\beta=o(\alpha)$;

② $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$,则称 β 是比 α **低阶的无穷小量**;

③ $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=C\neq 0$,则称 β 与 α 是**同阶无穷小量**(C 为常数);

④ $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$,则称 β 与 α 是**等价无穷小量**,记作 $\alpha\sim\beta$.

当 $x\to 0$ 时,常见的等价无穷小量有:

① $x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$;

② $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$,$\tan x-\sin x\sim\dfrac{1}{2}x^3$,$x-\sin x\sim\dfrac{1}{6}x^3$;

③ $a^x-1\sim x\ln a(a>0,a\neq 1)$;

④ $(1+\beta x)^\alpha-1\sim\alpha\beta x$.

三、极限的计算

1. 极限的运算法则

(1)四则运算法则

若$\lim f(x)=A$,$\lim g(x)=B$,则

① $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim(x)=A\pm B$;

② $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$;

③ $\lim[kf(x)]=k\lim f(x)$;

④ $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}\quad(B\neq 0)$.

其中的①、②可以推广到有限个函数. 例如:

$\lim[f(x)+g(x)-h(x)]=\lim f(x)+\lim g(x)-\lim h(x)$;

$\lim[f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)]=\lim f(x)\cdot \lim g(x)\cdot \lim h(x)$;

$\lim[f(x)^n]=[\lim f(x)]^n$，$n$ 为正整数.

(2)复合运算法则

设 $y=f[g(x)]$ 由 $y=f(u)$ 以及 $u=g(x)$ 复合而成，且 $y=f[g(x)]$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义．若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，但在点 x_0 的某去心邻域内 $g(x)\neq u_0$，则当 $x\to x_0$ 时，复合函数 $y=f[g(x)]$ 的极限也存在，且

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A;$$

特别地，当 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$ 时，

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)=f[\lim_{x\to x_0}g(x)].$$

2. 求极限的方法

(1)多项式函数 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 的极限

① $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$. 即求多项式函数在某点 x_0 处的极限时，将 x_0 替代 x；

② 当 $n\geqslant 1$ 时，$\lim\limits_{x\to\infty}P(x)=\infty$. 即根据无穷小量与无穷大量的关系，因 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{P(x)}=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}P(x)=\infty$.

当 $x\to\infty$ 时，所有最高幂次非 0 的多项式函数都是无穷大量.

(2)有理分式函数 $F(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 的极限

① 求点 x_0 处的极限：

若 $Q(x_0)\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$，即直接将 x_0 替代 x；

若 $Q(x_0)=0$，$P(x_0)=0$，此时 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 为 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式，消去 $P(x)$，$Q(x)$ 的公因式 $(x-x_0)^m$ 后，再运用商的极限法则求解；

若 $Q(x_0)=0$，$P(x_0)\neq 0$，则根据无穷小量与无穷大量的关系，因 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{Q(x)}{P(x)}=0$，故 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\infty$.

② 求无穷远处的极限

此时 $F(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式．求解方法是：用分式的最高次幂函数去除分子与分母，将未定式化为确定式从而求出极限.

其结果包括以下三种情况：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}a_0/b_0, & m=n,\\ 0, & m>n,\\ \infty, & m>n.\end{cases}$$

多项式函数以及有理分式函数极限的求解方法，对于其他类似极限的求解具有典型的借鉴意义.

(3)无理函数的极限

一般是将无理函数有理化以后,再求极限.

(4)无限多个函数和、差、积的极限

通常需要通过求和公式或消项法化为有限个函数的运算,或运用极限的迫敛准则.

(5)无穷小量与有界量乘积的极限

根据无穷小量的运算性质,无穷小量与有界量的乘积是无穷小量.

(6)利用两个重要极限及其变形求极限

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$;

② $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$, $\lim\limits_{\varphi(x)\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}=\mathrm{e}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}$. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

(7)利用等价无穷小量求极限

设 $\alpha\sim\alpha'$, $\beta\sim\beta'$,且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$存在,则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

无穷小量的等价替代,适用于两个无穷小量的商;无穷小量与某个函数的乘积;无穷小量与某个函数的商.

(8)复合函数的极限

运用$\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}g(x)]$,将极限号与函数符号相交换,求得极限.

(9)运用单调有界准则求数列的极限

(10)运用洛必达法则求极限(在第三章介绍)

四、函数的连续性

1. 函数连续的概念

(1)连续函数的定义

① 函数在某点 x_0 处连续的定义

定义 1　设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某邻域 $U(x_0,\delta)$内有定义,如果当自变量 x 的增量 Δx 趋近于零时,相应的函数增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$也趋近于零,即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$,则称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处**连续**.

定义 2　设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某邻域 $U(x_0,\delta)$内有定义,若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处连续.

② 函数在区间上连续的定义

函数 $f(x)$在开区间(a,b)内的每一点都连续,则称 **$f(x)$在开区间(a,b)内连续**;如果 $f(x)$在(a,b)内连续,且在点 a 处右连续,点 b 处左连续,则称 **$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续**.

(2)函数在某点 x_0 处连续的充要条件

函数 $y=f(x)$在点 x_0 处连续的充要条件是:函数 $f(x)$在点 x_0 处既左连续,也右连续. 即 $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$.

(3)连续函数的运算

① 四则运算的连续性

设 $f(x)$与 $g(x)$在点 x_0 处连续,则 $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$在点 x_0

处连续.

② 反函数的连续性

设 $f(x)$ 在区间 I 上严格单调且连续，$f(x)$ 的值域 J 是一个区间，则 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(y)$ 在区间 J 上也单调且连续(单调性与 $f(x)$ 相同).

③ 复合函数的连续性

设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 连续，且 $\varphi(x_0)=u_0$，函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 也连续.

(4)初等函数的连续性

① 基本初等函数在其定义域内连续；

② 初等函数在其定义区间内连续．所谓**定义区间**，指的是函数定义域内的区间.

2. 函数间断点的类型

(1)第一类间断点

$f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$ 都存在的间断点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的**第一类间断点**．第一类间断点包括可去间断点与跳跃间断点.

① $f(x_0-0)=f(x_0+0)$ 的间断点 x_0 称为 $f(x)$ 的**可去间断点**.

② $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$ 的间断点 x_0 称为 $f(x)$ 的**跳跃间断点**.

(2)第二类间断点

$f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$ 至少有一个不存在的间断点 x_0 为 $f(x)$ 的**第二类间断点**.

特别地，若 $f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$ 中至少有一个为 ∞ 时，点 x_0 又称为 $f(x)$ 的**无穷间断点**.

3. 闭区间上连续函数的性质

(1)最大值最小值定理

闭区间上的连续函数在该区间上必有最大值和最小值.

(2)有界性定理

闭区间上的连续函数一定在该区间上有界.

(3)介值定理

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在区间的端点取不同的函数值 $f(a)=A$ 及 $f(b)=B$，那么，对于介于 A 与 B 之间的任意一个常数 C，在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=C\quad(a<\xi<b)$.

(4)零点定理

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号(即 $f(a)\cdot f(b)<0$)，那么在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=0$.

典型例题

一、函数的基本概念

例 1 下列各对函数中，表示同一函数的是(　　).

(A) $f(x)=\dfrac{(x-1)(x+3)}{x-1}$，$g(x)=x+3$；

(B) $f(x)=\sqrt{(x+1)(x-1)}$, $g(x)=\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}$;

(C) $f(x)=\sqrt{(2x-1)^2}$, $g(x)=|2x-1|$;

(D) $f(x)=\ln(x+1)^2$, $g(x)=2\ln(x+1)$.

解　选项(C)正确.

因为两个函数相同的充要条件是它们的定义域和对应规则分别相同．在(A)中,因为两个函数的定义域不同,$f(x)$的定义域是$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$,$g(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$,故两个函数不同;(B)中的两个函数不同,是因为它们的定义域不同,$f(x)$的定义域是$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$,$g(x)$的定义域是$[1,+\infty)$;(D)中的两个函数不同,是因为它们定义域不同,$f(x)$的定义域是$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$,而$g(x)$的定义域是$(-1,+\infty)$.

例 2　设 $f(x)=\begin{cases}x, & |x|<1,\\ 2, & 1\leqslant x\leqslant 3,\end{cases}$ 则 $y=f(x-2)$的定义域为________.

解　因

$$f(x-2)=\begin{cases}x-2, & |x-2|<1,\\ 2, & 1\leqslant x-2\leqslant 3,\end{cases}=\begin{cases}x-2, & 1<x<3,\\ 2, & 3\leqslant x\leqslant 5,\end{cases}$$

故 $y=f(x-2)$的定义域为$[1,5]$.

例 3　设 $y=f(\lg x)$的定义域为$\left[\frac{1}{2},2\right]$,则 $y=f(x)$的定义域为________.

解　$y=f(\lg x)$的定义域为$\left[\frac{1}{2},2\right]$,即对于 $y=f(\lg x)$来说,$x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$.

令 $\lg x=t$,即 $x=10^t\in\left[\frac{1}{2},2\right]$.因 $\lg x$ 是单调增加函数,故 $t\in\left[\lg\frac{1}{2},\lg 2\right]$,亦即 $y=f(t)$的定义域为$\left[\lg\frac{1}{2},\lg 2\right]$,所以 $y=f(x)$的定义域为$\left[\lg\frac{1}{2},\lg 2\right]$.

例 4　设 $f(x)=\begin{cases}2, & |x|\leqslant 2,\\ 1, & |x|>2,\end{cases}$ 则 $f[f(x)]=$________.

解　由题设

$$f[f(x)]=\begin{cases}2, & |f(x)|\leqslant 2,\\ 1, & |f(x)|>2.\end{cases}$$

因任一 $x\in(-\infty,+\infty)$,$|f(x)|\leqslant 2$,故 $f[f(x)]=2$.

例 5　设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$ 则 $g[f(x)]=$________.

解　由题设

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0,\\ f(x)+2, & f(x)>0.\end{cases}$$

因 $f(x)\leqslant 0$ 等价于 $x\geqslant 0$　$f(x)=-x$;$f(x)>0$ 等价于 $x<0$ $f(x)=x^2$;故

$$g[f(x)]=\begin{cases}2+x, & x\geqslant 0,\\ x^2+2, & x<0.\end{cases}$$

例 6　$y=f(x)=\begin{cases}x^2, & -2\leqslant x\leqslant 0\\ x^2-4, & 0<x<2\end{cases}$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$为________.