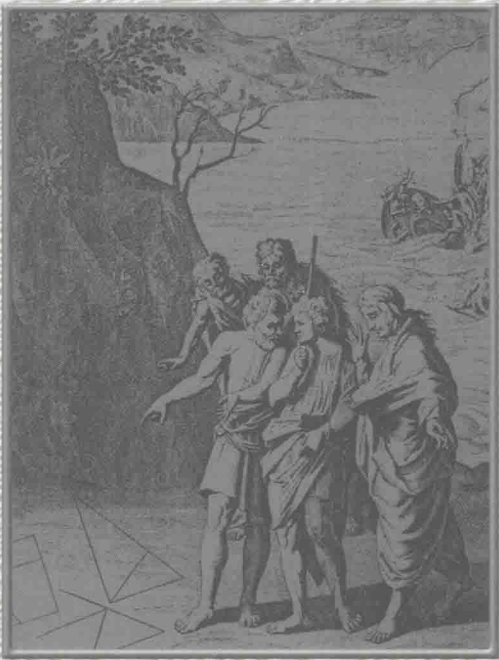
德国讲义日本考题

——微积分卷

[德]罗德 著

刘培杰数学工作室 编译



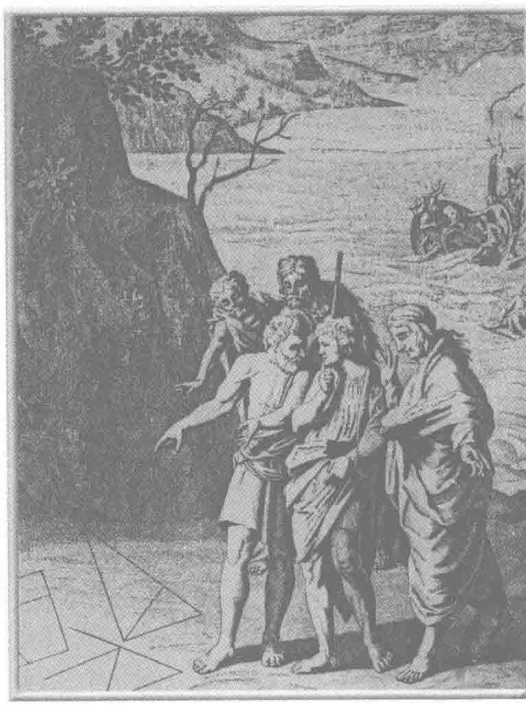
- 数、变量与函数
- 整函数与内插法
- 微分学的主要定理与积分学的基本公式
- 积分法作为微分法的反运算
- 二元及多元函数
- 日本考研试题

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTIT… …Y PRESS

德国讲义日本考题

——微积分卷

[德]罗德 著
刘培杰数学工作室 编译



◎数、变量与函数
◎整函数与内插法
◎微分学的主要定理与积分学
◎积分法作为微分法的反运算
◎二元及多元函数
◎日本考研试题

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书收录了大量德国和日本关于微积分方程方面的知识点和考题，每个知识点后配有大量的典型例题，书中的问题有趣，解题思路多样.

本书适合大学生参考阅读，也适合数学很强的初中生及数学爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

德国讲义日本考题. 微积分卷/(德)罗德著；刘培杰数学工作室编译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015.4

ISBN 978 - 7 - 5603 - 5273 - 2

Ⅰ. ①德… Ⅱ. ①罗… ②刘… Ⅲ. ①微积分 Ⅳ. ①O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 064531 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　单秀芹
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451 - 86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 20　字数 212 千字
版　　次　2015 年 4 月第 1 版　2015 年 4 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978 - 7 - 5603 - 5273 - 2
定　　价　48.00 元

目录

第一编　德国讲义

第二编　日本考研试题

第一编

德国讲义

数、变量与函数

第 1 章

§1 数与变量

1. 有理数

数的概念是解析①的基础，而且通过计数与度量这种有组织的理性活动，使我们能掌握愈来愈多的客观世界现象，这无疑是人类自然知识的进步，因而也是人类文化进步的基础. 整数 ±1，±2，…，并包括零在内，以及正负分数，合起来构成全部有理数的集合. 把随便两个有理数加、减、乘、除（零作除数除外），结果总还是一个有理数. 即有一个例外，就是：不准用零除. 这样，一个有理数就是两个整数的商（分数）.

① “解析”这个名称的原文“Analysis”（也译作“分析”），起源自欧拉的经典著作“无穷解析引论”Introduction in analysis infinite，1948 年出版. ——欧拉（L. Euler，1707—1783）瑞士数学家，曾在俄国讲学.

整数可以跟一定向直线上的等分点相对应,而且再细分之后,可使每个有理数 x(例如$\frac{1}{2}$,$\frac{3}{4}$等等)都对应了数轴上以 x 为横坐标的一点(有理点). 在随便两个有理数 a 与 b 间,不管其差数怎么小,永远可以再插入别的有理数,例如可插入其算术中数$\frac{1}{2}(a+b)$. 与此相应,在直线上随便两个不管怎样近的点之间,永远会有别的(甚至是无穷多的)有理点. 因此,我们说:全部有理数的集合是自相密集的,全部有理点的集合也一样.

2. 无理数

纵然这样,全部有理点的集合并充不满整条直线,在直线上仍还有些横坐标为非有理数的点,比方就像那样的一个点,它的正横坐标 d 等于边长是 1 的正方形对角线的长,即是由方程 $d^2=2$ 或 $d=\sqrt{2}$(后一个式子只不过是另一种写法)所确定的长. 因为假使 d 是有理数,有如 $d=\frac{p}{q}$,其中 p 与 q 都只是正整数,但不都是偶数,因如不然,$\frac{p}{q}$便可用 2 约掉,因此 q 不能等于 1,因为 d 不是整数. 可是由 $d^2=2$,应得 $p^2=2q^2$,因此便得 p 是偶数;但若 $p=2m$ 是偶数,那么,便又得 $p^2=4m^2=2q^2$,因此 $q^2=2m^2$,即 q 同样是偶数,与上面的话正相矛盾,因此 d 不能是有理数,相应的点 d 也不是有理点(据,欧几里得,“几何原本”——300 年左右出版).

这样的点,也有数与之对应,就是所谓无理(即非有理)数. 一方面对无理数作一种适当的一般定义,另

一方面对直线上的无理点也作一种适当的一般定义，那就会显而可见：如果把无理数与有理数合在一起，一下子得到"全部数的集合"，那便使每个数，在直线上都恰有一个点与之对应，并使直线上每个点也都恰有一个数与之对应. 我们便说：全部数的集合是无隙的，也就是连续的. ①

3. 戴狄金(R. Dedekind)分划

有理数虽可由一个通用定义来说明，就是作为单位的几分之几，但对无理数却不能这样说：例如对$\sqrt{2}$与π就不能这样来说明. 话虽如此，我们也未尝不能把无理数，并因而把一切数都拿一个共同标志来说明，这就是数轴上的每个点P都把全部有理点的集合分成两类，一类在它前头的，一类在它后头的，而若P本身是有理的，则可随意算在第一类里，或算在第二类里. 以此便有下面的说明. 全部有理数若照着下述方案分成两类，也就是：第一类中的一切有理数都比第二类中的一切有理数小，则每一这样的分法都恰恰规定一个(实)数，它不比第一类中的一切有理数小，也不比第二类中的一切有理数大.

如果这个数本身属于两类中的一类，它就是有理数，不然，它就叫作无理数.

全部有理数集合在这种意义上的"分划"，用以照既定方案来定义任一实数的，叫作"戴狄金分划"(德国数学家，1831—1916). 例如$\sqrt{2}$就是那样的一个正数，它所对应的分划是照下述方案来确定的：取平方后小于2的一切有理数都分到第一类中，取平方后大于

① 此处以及以后暂只讲实数，复数以后再讲.

2 的都分到第二类中;而$\sqrt{2}$本身,则照前面所证明过的,不属于两类中的任一类.

4. 有理近似值

对每个无理数 z,总可以举出这样的两个有理数 r' 与 r'',使 $r'<z, r''>z$,而 $r''-r'=\delta$,不管这个随意选定的有理正数 δ 是多么小.

若因 a 这个有理数属于定义 z 的那个分划的第一类中,则应有 $a<z$,在无穷多的有理数 $a, a+\delta, a+2\delta, a+3\delta, \cdots$,当中,应该有一个最大的并且仍属于第一类的一数,设它是 $r'=a+n\delta<z$,而其次的 $r''=a+(n+1)\delta$ 就已属于第二类,因此大于 z. 可是 $r''-r'=\delta$,即得所证. r''和 r'就叫作 z 的有理近似值,δ 是近似的准确度.

在应用数学上,每个数 z,不是有穷位小数的,用两个确定的 m 位小数来近似表达它,是非常重要的事. 这两个数只在小数点后第 m 位上差一,即只差 10^{-m},这里的 m 是随便给定的一个位数. 用所谓"夹套法"拿小数来"计算"随便一个数,就是根据这个道理而来的. 用这个一般方法来计算$\sqrt{2}$,先设 $1<\sqrt{2}<2$,因 $1^2<2<2^2$,其次 $1.4<\sqrt{2}<1.5$,因 $1.4^2<2<1.5^2$,复次 $1.41^2<2<1.42^2$,余类推. 初学者常看不起这种方法,说它只是一种凑凑数字的"尝试",其实这每次都是从小数位的十个 1,2,3,…中作系统选择的,不是随便试也不是碰巧凑的. 每个数都是可以照这个方式用近似小数来计算的,纵然有时这并不是最简单的方法,例如对$\sqrt{2}$就是这样.

在数学的应用上,经常使用的就是这样的近似值,

因此在实际上有有理数一般都够用了. 可是,如要从理性认识上来掌握数的整体和相互间的关系,无理数的概念便是不可缺的. 可以证明:无理数的算法,也跟有理数的算法一样,按照人人所熟悉的那些法则来做.

5. 不等式算法 · 绝对值

对不等式(估计式)有以下的法则,这些法则,初学者虽不大熟悉,却都容易证明,即:

由 $a<b$(或另一种写法 $b>a$),得出 $a+c<b+c$, $ap<bp$(假使 $p>0$ 的话), $aq>bq$(假使 $q<0$ 的话), $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$(假使 $a>0$ 的话),倒过来推也可以.

由 $a<b$ 及 $c<d$,得出 $a+c<b+d$, $ac<bd$(假使 $b>0$且 $c>0$ 的话). 一个数 z 去掉正负号后的值,叫作它的绝对值 $|z|$,因此 $z>0$ 时 $|z|=z$, $z<0$ 时 $|z|=-z$, $|0|=0$.

$|z|\geqslant 0$ 永远成立. 下面的简单计算法则都容易证明,即

$$|ab|=|a|\cdot|b|,\ |a:b|=|a|:|b|,\text{当 } b\neq 0 \text{ 时}$$

$$|a|-|b|\leqslant\Big||a|-|b|\Big|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$$

由

$$|a|+|b|=0$$

得出 $a=b=0$.

$\operatorname{sgn} z=|z|:z=\pm 1$ 具有与 z 相同的正负号,又规定 $\operatorname{sgn} 0=0$.

6. 变量

变量 x 就是一个代表许多不同数的符号,常量 a 就是一个代表某一数(固定值)的符号.

变量 x 可以取有穷个值,也可以取无数多的值. 若

所取无数多的值是可数的(能编号):$x_1, x_2, x_3, \cdots$,这便构成一个(无穷)数列,例如

$$1,2,3,4,\cdots$$

或

$$\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{4}{5},\cdots$$

可注意的是:就是全部有理数的集合也是可数的,虽然它是自相密集的. 因为可以先把全部正分数这样排成数列

$$\frac{1}{1};\frac{1}{2},\frac{2}{1};\frac{1}{3},\left(\frac{2}{2}\right),\frac{3}{1};\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},\frac{4}{1};$$
$$\frac{1}{5},\left(\frac{2}{4}\right),\left(\frac{3}{3}\right),\left(\frac{4}{2}\right),\frac{5}{1};\frac{1}{6},\cdots$$

去掉那些括起来的(即数值出现多次的)分数,置 0 于前,并在每个分数后置负的,这样便得全部有理数,而且每个只出现一次.

数列 x_n 有聚值(聚点)α,如果任意选定 $\varepsilon>0$ 后,可使无数个的 n(不必要全部),适合

$$|x_n-\alpha|<\varepsilon$$

例如,上述的数列 $1,2,3,4,\cdots$ 就没有聚点,$\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{4}{5},\cdots$ 有两个聚点:0 与 1,数列 $\frac{1}{1};\frac{1}{2},\frac{2}{1};\frac{1}{3},\left(\frac{2}{2}\right),\frac{3}{1},\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},\frac{4}{1};\frac{1}{5},\left(\frac{2}{4}\right),\left(\frac{3}{3}\right),\left(\frac{4}{2}\right),\frac{5}{1};\frac{1}{6},\cdots$ 有无数多个聚点.

如 x 能取两个数 a 与 b 间的一切值(有理的与无理的),x 就叫作以 $|a-b|$ 为长度的域或区间或变化范

围(a,b)内的一个连续变量.

像$a\leqslant x\leqslant b$这样的区间叫作闭区间,区间$a<x\leqslant b$叫作左开右闭的,其余类推. 能取随便什么数值的变量叫作无界变量.

变量x相应于数轴(即x轴)上一个横坐标为x的动点,这个点也应以x表示. 如点x的变动方向不会倒过来,变量x就叫作单调的,而且如x不减小,就说它是单调增大的.

7. 极限

设a是一个常数而x是一个变量,那么$x=a$的意思就是说x取定值a:x等于1.

现设$x\neq a$,如变量x能取无穷多的值,但到后来只取那种与a相差为任意小的值,那么便说,x趋向a,或向a收敛或趋于极限a,并写为①

$$x\to a$$

或

$$\lim x=a$$

则a就叫作x的极限.

趋近于一个极限这一概念,在高等解析学中是有根本意义的. 这个概念的精确说明如下:$x\to a$的意思是差数$|x-a|$到后来终于会而且永远保持比随便什么不管怎样小的正数ε还小,即

$$0<|x-a|<\varepsilon$$

或者写成

$$a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$$

意义和上式完全相同.

① 读作"x趋于a"或"x趋向a".

显然,如 x 通过某个只有一个聚值的有界数列,这个聚值同时也就是 x 的极限.

举例 如 x 通过数列 0.3,0.33,0.333,…,那么就有 $x\to\frac{1}{3}$ 或 $\lim x=\frac{1}{3}$. 因为我们有 $\frac{1}{3}-0.\overbrace{33\cdots3}^{m}=\frac{1}{3}-\frac{\overbrace{33\cdots3}^{m}}{10m}=\frac{10^m-\overbrace{99\cdots9}^{m}}{3\cdot10^m}=\frac{1}{3\cdot10^m}$,因为我们可以把它弄得随便怎样的小,只要把位数 m 取得足够大(参看本章 §5,4. g)). 如 $x\to a$ 而 x 离 a 足够近,x 就是 a 的一个近似值,写作 $x\approx a$(近似地等于 a). 例如,$0.333\,3\approx\frac{1}{3}$. 极限是个本身就很抽象的概念,对于实用计算上的意义就在于此.

这种极限步骤,也可用几何方式来说明,这就是,我们让横轴上的变点 x 无限地趋近固定点 a,但却不许它与 a 碰到一起.

如 x 只从右边接近 a,也就是说,如 $x>a$,便写 $x\to a+0$(下限),如从左边接近 a,其实 $x<a$,就写 $x\to a-0$(上限)(因此符号 0 在这里并不表示一个确定的数). 在上例中,就有 $x\to\frac{1}{3}-0$.

8. 无穷小与无穷大

如 $x\to0$,那么便也说 x 变成无穷小. 在数学里无穷小这一句词只与变量这个概念相结合才有意义. 异于零而等于常数的无穷小是没有的,因此便相应有 $x\to+0$ 与 $x\to-0$ 的区别,如 $|x|$ 能取的值,超过随便哪个不管多么大的数 ω,$|x|>\omega$,那么便说,x 变成无穷大,

并写成 $x \to \infty$ 或 $\lim x = \infty$[1]. 于此又按 $x<0$ 还是 $x>0$,从几何上来说,也就是按变点 x 能在直线上无限地向左还是向右移动,把 $x \to \infty$ 区别为 $x \to -\infty$ 与 $x \to +\infty$ 两种情形. 由 $|x| \to \infty$ 得出 $x \to \infty$ 得出 $\frac{1}{x} \to 0$,并且倒过来说也成立,又由 $|x| \to 0$ 得出 $x \to 0$,并且倒过来说仍然成立.

§2 函数

1. 函数概念

如一个变量 y 的值,与另一变量 x 的值相对应,y 便叫作自变量(宗量)x 的函数[2].

普通写作 $y=f(x)$,或 $y=g(x)$,$y=y(x)$,等等. 这种对应关系可以用许多方式表示出来,例如用一张表,或用一个规定,平常多半是用一个计算上的规定. 例如:$y=x^2$. 现在首先就专讲从计算上来规定的这种函数——在多个自变量的情形下,我们相应地有:$w=f(x,y,z)$.

举例 a)一个整(有理)函数(多项式)就是

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

这种形式的式子,其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 都是常系数. 假使 $a_n \neq 0$,那么 n 便叫作这个整函数的次数. 对 x 的每一

---

① 有时也简单写作 $x=\infty$. 不过符号 ∞ 绝不表示一个确定的数值:我们称 ∞ 为"非本义的数值". 例如 $-\infty<x<+\infty$ 的意思就是说:x 是无界变量;$0 \leq x<+\infty$ 的意思就是说:x 能取一切不是负的值.

② 这个一般界说(定义)起源于狄利克雷(P. G. L. Dirichlet,1805—1859). 函数的原名起源于莱布尼兹(G. W. Leibniz,1646—1716).

个值都有 y 的一个值,而且只有一个值与之相应(单值函数). 它的特例是:$y=a+bx$(线性函数或一次函数),$y=x^n$($n>0$,整数).

b)一个(分式)有理函数就是两个整函数的商,例如

$$y=\frac{1}{x}$$

或

$$y=\frac{x^2-3x}{(x-3)(x-5)(x-6)}=R(x)$$

有理函数也是单值的. 但这里 x 已不可再随便取任意一个值,就 $y=\frac{1}{x}$ 这个函数,必须 $x\neq0$,就 $R(x)$ 来说必须 $x\neq3$,$x\neq5$,$x\neq6$,因为不然,除数(分母)就会变成零.

c)指数函数 $y=a^x$($a>0$)与对数函数 $y=\log_a x$,三角函数 $y=\sin x$,$y=\cos x$,$y=\tan x$,$y=\cot x$ 与圆函数(即反三角函数)$y=\arcsin x$,$y=\arccos x$,$y=\arctan x$,$y=\mathrm{arccot}\, x$,都属于超越函数,是即非代数函数.

所有这些函数,都是以对数表与别的表以足够初步实用的近似值给出来的. 不过在解析学上,三角函数的自变量值与圆函数的函数值,都不是用平常的度数来量而是用"弧度"量的. $\alpha°$的弧度数 x 就是它所张半径 1 的圆弧弧长数

$$x=\mathrm{arc}\ \alpha°=\frac{\pi}{180}\alpha$$

于是有 $\mathrm{arc}\ 1°=\frac{\pi}{180}\approx0.017\ 453$,$\mathrm{arc}\ 57.296°\approx1$.

以上在 a)至 c)项下列举的函数,以及一切由这些函数作有限次任意的结合而得出来的函数,总称为初等函数. 以后还要讲些其他函数.