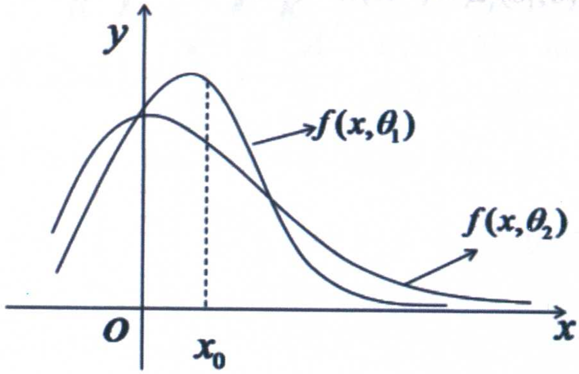


GAILULUN YU SHULI TONGJI

概率论与数理统计

主编 · 陈振龙 陈宜治 龚小庆
主审 · 王炳兴

浙江工商大学出版社
ZHEJIANG GONGSHANG UNIVERSITY PRESS

概率论与数理统计

陈振龙　陈宜治　龚小庆 主编
王炳兴 主审

浙江工商大学出版社
ZHEJIANG GONGSHANG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 陈振龙，陈宜治，龚小庆主编.
—杭州：浙江工商大学出版社，2016.9
ISBN 978-7-5178-1838-0

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①陈… ②陈… ③龚… Ⅲ. ①概率论
②数理统计 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 206195 号

概率论与数理统计

陈振龙　陈宜治　龚小庆 主编　王炳兴 主审

责任编辑　吴岳婷　刘　韵
封面设计　李瑞敏
责任印制　包建辉
出版发行　浙江工商大学出版社
(杭州市教工路 198 号　邮政编码 310012)
(E-mail:zjgsupress@163.com)
(网址:http://www.zjgsupress.com)
电话:0571-88904980,88831806(传真)
排　　版　杭州朝曦图文设计有限公司
印　　刷　虎彩印艺股份有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　23.25
字　　数　481 千
版 印 次　2016 年 9 月第 1 版　2016 年 9 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5178-1838-0
定　　价　45.00 元

浙江工商大学出版社营销部邮购电话　0571-88904970

前 言

本教材是在我们多年教学实践的基础上撰写的，可作为高等学校统计和数学类本科专业概率论与数理统计基础课程的教材，也可作为报考硕士研究生人员和科研工作者的参考书。

概率论与数理统计作为现代数学的一个分支，是专门研究随机现象的统计规律性的一门学科，具有其特殊性。概率统计一方面具有应用性很强的特点，另一方面在数学理论上又显得比较抽象并且涉及的数学工具也较多。它有别于数学其他课程的重要一点在于，初学者往往对一些重要概率统计的概念实质感到疑惑不解，尤其是在学习数理统计时常常会有“入宝山而空归”的感觉。考虑到这些因素，我们在取材和写作上，在以下几个方面作了努力：

(1)用较多的篇幅详细地叙述了概率统计中的一些主要概念和方法产生的背景和思路，从直观入手逐步过渡到数学表述。

(2)坚持数学理论的完整性和严谨性，对基本的概念、定理和公式作严格、准确和规范的叙述，并尽量阐述其实际意义。

(3)由于基础课程本身的特点，本教材的重点放在对基本概念的准确理解、对常用方法的熟练掌握上。

(4)坚持理论与实际相结合的原则，注重培养学生对随机现象的理解和概率统计直觉。为此，我们不仅从实例出发引入基本概念，还精选了大量能够加深理解基本概念、定理和公式的例题和习题，目的在于使学生对实际事物中的随机性产生敏感、培养学生的概率统计直觉能力。

(5)注重思想方法的介绍。概率统计不仅是一门数学理论，而且还具有世界观的性质。具备正确的概率统计的思想方法是大学生应该具备一种基本修养和素质。因此本书特别注重阐释统计的思想、问题的背景和统计方法产生的历史，以使学生对统计的思想方法有一个系统的了解。

(6)本书有针对性地在例题和习题中收录了历年考研的各种题型，对考研中的重点和难点内容，我们尽可能地进行了细致的处理。

(7)为了帮助学生正确理解基本概念、准确掌握基本结论，本教材还特别配备了大量的客观练习题。

(8)在保持传统体系和经典内容的同时，注意渗透和吸收现代概率统计新的思想、概念和方法，有些思想和观点是第一次出现在此类教材中。

(9)本教材特别介绍了 Excel 2007 办公软件在概率统计计算中的应用。目的在于让学生在弄清概率统计基本思想的基础上能够学以致用。

根据我们的教学经验，讲完本书大约需要 96 学时。为了便于学生自学，我们配备了较多的例题，教师可根据需要选择其中的一部分在课堂讲授。

本书由浙江工商大学统计与数学学院组织编写，大纲和体系由集体讨论而定。概率论部分由陈振龙和王炳兴执笔；数理统计部分由陈宜治和龚小庆执笔，王炳兴教授主持了本书的审稿，最后由陈振龙统一修改定稿。

在编写的过程中，我们参考了较多的文献，为此我们均在书末的参考文献中列出。本书的编写自始至终得到浙江工商大学出版社、浙江工商大学教务处和浙江工商大学统计与数学学院的大力支持，尤其是浙江商大学统计与数学学院的领导和老师给予了许多的帮助，研究生刘忠义、李楚砚、王杰、陈钰和朱玉等也参与了本书的部分抄写和校对工作，对此我们一并表示衷心的感谢。另外，还要特别感谢浙江省高校人文社科重点研究基地(浙江工商大学统计学)、浙江省“十二五”优势专业(统计学)、浙江工商大学优势特色专业(数学与应用数学)和浙江省高等教育课堂教学改革项目(KG2015146)的资助。

由于编者的水平有限，书中不当乃至错误之处在所难免，恳请读者不吝赐教。

编　者

2016 年 5 月于杭州

目 录
Contents

第一章 随机事件与概率

在自然界和人类社会中发生的现象大体上可分为两种类型.

一类是**确定性现象**.这类现象的特点是,一旦某些条件给定,某一特定的结果将必定会发生,或者已知它过去的状态,它将来某一时刻的状态也被完全确定.例如,在一个标准大气压下,水在0℃和100℃时都会发生相变(结冰或汽化);同性电荷一定相斥而异性电荷一定相吸;下一次日全食和月全食发生的时刻能精确预测;等等.可以说正是这一类现象的存在,导致了人们关于自然界中一定存在着秩序和规律的信念,这种信念又进一步导致了近代科学的发展.

另一类现象则是**不确定性现象**或**随机现象**.这类现象的特点是,即使在相同的条件下,也无法确定每次试验所得的结果,或者已知它过去的状态,它将来的发展状态仍然无法确定.例如,抛掷一枚质地均匀的硬币出现的结果是正面朝上还是反面朝上;中国足球队能否在下一届世界杯预选赛中出线;下一个星期的股市是涨还是跌等等.另外,有些事情即使已经发生了,但是在你知道结果之前,它们仍然具有不确定性.例如,一枚放在抽屉里的硬币的状态虽然已经确定,但是在观察之前你还是无法确定硬币是正面朝上还是反面朝上;病人以及得的是什么病虽然已经是客观存在的事实,但是在确诊之前,在医生看来仍然有多种可能性,而且即使是有经验的医生也有可能发生误诊等等.因此,不确定性现象中的"不确定性"包含有两方面的含义,其一是客观结果的不确定性,其二是主观判断的不确定性,后者往往融入了观察者个人的信念.

一般而言,概率是衡量随机事件发生可能性大小的一个数量指标.但是,这只是一种比较直观的说法,在涉及概率的本质时却存在着两种不同的观点.

一种观点认为,概率是随机事件的客观属性,它像面积、体积一样也是可以"测量"的.测量的方式,就是重复试验.表1-1给出了历史上一些科学家所做的著名的抛硬币试验以及相关的数据.

从表1-1中我们可以看到,随着试验次数的增加,正面朝上的次数所占的比例将逐渐稳定于50%.这种在大量试验中呈现的稳定性,我们将其称之为统计规律性.统计规律性的存在,使得所谓对事件不确定性大小进行度量的概率就有了其客观的基础.

表 1-1　历史上一些著名的抛硬币试验

实验者	n	n_H	$f_n(H)$
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲　丰	4040	2048	0.5069
K.皮尔逊	12000	6019	0.5016
K.皮尔逊	24000	12012	0.5005
维　尼	30000	14994	0.4998

表中 n 表示抛掷硬币的次数，n_H 表示出现正面的次数，$f_n(H)=n_H/n$ 表示出现正面的次数所占的比例.

另一种观点认为，不确定性在很大的程度上是由人的有限理性、不完全信息和环境的不确定等因素造成的，因此所谓概率只是反映了人们对事件发生可能性的主观信念.

例如，企业 A 生产的液晶电视的成本是给定的，但是在它的竞争者企业 B 看来却具有不确定性. 类似于“企业 A 有 50% 的可能是低成本的”这一判断很显然表达的是一种主观信念. 不管真实的状况如何，关于企业 A 生产液晶电视成本的不同信念将会导致企业 B 的不同决策. 例如，一旦企业 B 认为企业 A 是低成本的概率很大，则它就很有可能会作出放弃与其竞争的决策.

抛硬币这一类试验是可以重复进行的，但是像“新产品投放市场后是否畅销”，“经济是否已经复苏”，“某企业在刚刚过去的一个月里是否存在有偷税漏税的行为”之类的试验则是不可重复的，人们更多是通过主观的信念来把握.

本教材将主要从概率的客观属性出发来处理随机事件，但是由于在经济管理中，概率的主观解释被越来越多地应用到实际决策中，因此，在某些例题中我们也会适当地阐述基于主观信念的概率含义.

数学以逻辑的严密性为其基本特征，因此将随机现象纳入数学研究范围的一个先决条件是，必须给出一个持各种不同观点的人都能接受的关于概率的定义. 1932 年，苏联数学家柯尔莫格洛夫给出了概率的公理化定义，使得概率论很快就发展成现代数学的一个分支.

在给出概率的公理化定义以前，先引入一些基本的概念.

§1.1　基本概念

1.1.1　随机试验与事件

研究随机现象，首先要对研究对象进行观察或试验. 这里所说的观察或试验，意义比

较广泛，可以是各类科学试验，也可以是对某些事物的某些特征的观察.下面是一些试验的例子：

E_1：抛一枚硬币，观察正面 H，反面 T 出现的情况；

E_2：将一枚硬币抛掷两次，观察正面 H，反面 T 出现的情况；

E_3：将一枚硬币抛掷三次，观察正面 H，反面 T 出现的情况；

E_4：掷一颗骰子，观察出现的点数；

E_5：在电视机厂的仓库里随机地抽取一台电视机，测试它的寿命；

E_6：记录某一天城市发生车祸的次数.

以上所述的试验具有如下的共同特点：

(1)可在相同的条件下重复进行；

(2)每次试验的可能结果不止一个，但是能事先明确试验的所有可能的结果；

(3)试验之前不能确定哪一个结果会出现.

一般地，我们称满足以上三个特点的试验为**随机试验**，简称为**试验**.

由于计算机仿真技术的普及，使得很多在现实生活中成本很大或者不能重复的试验(如航天飞机发射、地震和溃坝等)现在都可以在计算机中实现，这样就保证了随机试验第一个特点的普遍性.

由随机试验的第二个特点知，那些事先不知道所有可能结果的随机现象不属于我们的考虑范围.

定义 1.1.1 随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**，记为 S. S 的元素，即 E 的一个可能结果，称为**样本点**或**基本事件**.

上面提到的各试验 E_k 的样本空间 S_k 分别为：

$S_1=\{H,T\}$

$S_2=\{HH,HT,TH,TT\}$

$S_3=\{HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT\}$

$S_4=\{1,2,3,4,5,6\}$

$S_5=\{t:t\geqslant 0\}$

$S_6=\{0,1,2,3,\cdots\}$

设 E_7 表示试验：将一枚硬币抛掷两次，观察正面出现的次数，则此时样本空间为 $S_7=\{0,1,2\}$. 同样是将硬币抛掷两次，但是 S_2 和 S_7 截然不同. 这说明，试验的目的决定试验所对应的样本空间.

今后，我们将把样本空间的某个子集(具有某种特征的样本点组成的子集)称为“随机事件”，简称为“事件”. 以 E_5 为例，如果电视机的寿命超过 10 000 个小时被认为是合格品，则“所抽取的电视机是合格品”这一事件可以用 S_5 的子集 $A=\{t:t>10\ 000\}$ 来表示. 又如在 E_2 中，如果用 A 表示“至少出现一次正面”这一事件，则 $A=\{HT,TH,HH\}$.

在 E_6 中，"发生了奇数次车祸"这一事件等同于 S_6 的子集 $\{1,3,5,7,\cdots\}$.

设 A 为一个事件，如果在试验中出现的样本点 $\omega \in A$，则称事件 A（在该次试验中）发生. 例如，在 E_5 中，若抽出的电视机的寿命为 10 500 小时，则事件"所抽取的电视机是合格品"即 $A = \{t:t > 10\ 000\}$ 在该次试验中发生；若抽取的电视机的寿命为 9 500 小时，则事件"所抽取的电视机是合格品"没有发生. 在 E_6 中，若发生了 9 次车祸，则事件 $\{1,3,5,7,\cdots\}$ ="发生了奇数次车祸"发生；若发生的车祸数为 2，则"发生了奇数次车祸"这个事件没有发生.

一般地，我们用英文字母表中前面的大写字母(可以带下标)表示事件，如用 A,B,C，或 A_1,A_2,B_2,D_{11} 等表示事件.

样本空间 S 有两个特殊的子集，一个是 S 本身，由于它包含了所有可能的结果，所以在每次试验中它总是发生的，我们将其称为**必然事件**. 另一个子集是空集 $\varnothing$，它不包含任何元素，因此在每次试验中都不发生，我们将其称为**不可能事件**.

1.1.2 事件间的关系与运算

由于事件是样本空间的一个子集，因此事件之间的关系与运算就是集合间的关系与运算. 虽然在中学时就已经学过一些集合论方面的知识，但是读者们仍然要特别关注本节的内容. 在这里重点需要做的就是能正确地将集合论中的符号翻译成概率论的语言.

如上节所述，我们有如下的对应关系：

$$\text{事件 } A \text{ 发生} \Leftrightarrow \text{试验 } E \text{ 的结果 } \omega \in A \tag{1.1.1}$$

其中符号"$\Leftrightarrow$"表示"当且仅当"或"充分必要条件". 从这个关系出发，就可以进一步讨论事件间的关系与运算.

(1)包含关系

符号"$A \subset B$"在集合论中意味着："若 $\omega \in A$，则必有 $\omega \in B$"，因此，依据对应关系(1.1.1)，其在概率论中的含义为："若事件 A 发生，则事件 B 必发生". 这时我们就称事件 B 包含事件 A.

因此，符号"$A \subset B$"用概率论的术语表示就是："事件 B 包含事件 A".

如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则我们称事件 A 与事件 B 相等，并记为 $A = B$.

(2)"和"运算

符号"$A \cup B$"在集合论中意味着："$\omega \in A \cup B \Leftrightarrow \omega \in A$ 或 $\omega \in B$"，因此，其在概率论中的含义是："$A \cup B$ 发生 $\Leftrightarrow A$ 发生或 B 发生 $\Leftrightarrow A$ 与 B 至少有一个发生".

我们将 $A \cup B$ 称为 A,B 的**和事件**，它表示" A 与 B 至少有一个发生"这一新事件. 类似地，我们将"$\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$"称为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件，它表示"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生"这一事件；将"$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$"称为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和事件，它表示

“$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 至少有一个发生”这一事件.

(3)“积”运算

符号“$A \cap B$”或“AB”在集合中的含义是：“$\omega \in A \cap B \Leftrightarrow \omega \in A$ 且 $\omega \in B$”，因此，其在概率论中意味着：“$A \cap B$ 发生 $\Leftrightarrow A$ 发生且 B 发生 $\Leftrightarrow A, B$ 同时发生”.

我们将 $A \cap B$ 或 AB 称为 A, B 的**乘积事件**，它表示“事件 A 与 B 同时发生”这一事件. 类似地，称

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = A_1 A_2 \cdots A_n$$

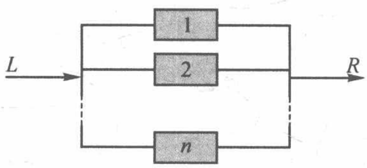
为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的乘积事件，它表示“$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生”这一事件；称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的乘积事件，它“表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 同时发生”这一事件.

例 1.1.1 设有 n 座桥梁如下图所示串联而成

用 A 表示事件“L 至 R 是通路”，表示“第 i 座桥梁是畅通的”$(i=1,2,\cdots,n)$，则有

$$A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 A_2 \cdots A_n$$

如果这 n 座桥梁如下图所示是并联而成



则有

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$ ◇

(4)“差”运算

符号“$A-B$”在集合论中是指：“$\omega \in A - B \Leftrightarrow \omega \in A$ 且 $\omega \notin B$”，因此在概率论中的意味着：“$A-B$ 发生 $\Leftrightarrow A$ 发生但 B 不发生”.

称 $A-B$ 为 A 与 B 的**差事件**，它表示“事件 A 发生而事件 B 不发生”这一新事件.

由定义可知，有 $A-B=A-AB$.

(5) 互不相容或互斥

符号“$A \cap B = \varnothing$”或“$AB = \varnothing$”在集合论表示“A 与 B 不相交即没有公共部分”，因而在概率论中就表示“A 与 B 同时发生是不可能事件”.

一般地，如果 $AB = \varnothing$，我们就称事件 A 与 B **互不相容**或**互斥**，它表示事件 A 与 B 不可能同时发生.

(6)对立事件或逆事件

符号“$B=\overline{A}$”在集合论中表示 B 是 A 的补集,即 $B=S-A$,它又可以表示为:

$$A\cup B=S \text{ 且 } AB=\varnothing$$

因此,其在概率论中的含义为:事件 A 与 B 有且只有一个发生.称 $B=\overline{A}$ 为 A 的**对立事件**或**逆事件**,称 A 与 $\overline{A}$ 的关系为**互相对立**或**互逆**.

由定义,符号 $\overline{A}$ 表示“A 不发生”这一事件,因此有 $A\overline{B}=A-B$.

(7)事件运算的规律

从上面我们可以看出事件的运算实际上就是集合的运算,因此,和集合的运算一样,事件的运算同样满足下面的几条规律:

(a)交换律

$$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$$

(b)结合律

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$$
$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$$

(c)分配律

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cap C)$$
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

(d)德·摩根律(对偶律)

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$$
$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

更一般地,有

$$\overline{\bigcup_{n\geqslant 1}A_n}=\bigcap_{n\geqslant 1}\overline{A}_n$$
$$\overline{\bigcap_{n\geqslant 1}A_n}=\bigcup_{n\geqslant 1}\overline{A}_n$$

正确地用符号表示事件的关系与运算是相当重要的,在很多时候往往成为解题的关键.

例 1.1.2 设 A,B,C 是随机事件,则

(1)“A 与 B 发生,C 不发生”可表示 $AB\overline{C}$;

(2)“A,B,C 至少有两个发生”可表示为

$$AB\cup AC\cup BC$$

或

$$ABC\cup\overline{A}BC\cup A\overline{B}C\cup AB\overline{C}$$

(3)“A,B,C 恰好发生两个”可表示为

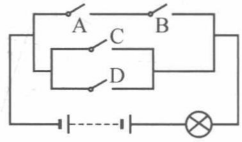
$$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$$

(4) “A,B,C 有不多于一个事件发生”可表示为

$$\overline{A}\overline{B}\overline{C} \cup A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C \qquad \diamond$$

例 1.1.3 如图所示的电路，以 A,B,C,D 分别表示开关 A,B,C,D 闭合，E 表示“信号灯亮”，则有

$$E = AB \cup C \cup D. \qquad \diamond$$



该例表明，在实际问题中，事件之间相互关系的确定有时不必直接借助于集合，而只需从概率论本身的含义出发即可.

本节通过集合论为随机现象与数学之间架接了一座桥梁，迈出了随机现象研究严密化的坚实的一步. 下一节我们将在此基础上进一步给出概率的公理化定义.

练习题

(1) 填空题

设 A,B 是任意的两个事件，则 $(\overline{A} \cup B)(A \cup B) =$ ____________；

$(\overline{A} \cup B)(A \cup B)(\overline{A} \cup \overline{B})(A \cup \overline{B}) =$ ____________.

(2) 选择题

(a) 对于任意二事件 A 和 B，与 $A \cup B = B$ 不等价的是 (　　)

(A) $A \subset B$ (B) $\overline{B} \subset \overline{A}$

(C) $A\overline{B} = \phi$ (D) $\overline{A}B = \phi$

(b) 设 A,B,C 是任意三个事件，事件 D 表示 A,B,C 至少有两个事件发生，则下列事件中与 D 不相等的是 (　　)

(A) $AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$ (B) $S-(\overline{A}\overline{B} \cup \overline{A}\overline{C} \cup \overline{B}\overline{C})$

(C) $AB \cup AC \cup BC$ (D) $AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC \cup ABC$

§1.2 频率与概率

1.2.1 概率的公理化定义

研究随机现象不仅要知道可能出现哪些事件，还要知道各种事件出现的可能性的大小. 我们把衡量事件发生可能性大小的数量指标称作事件的概率. 事件 A 的概率用 $P(A)$ 来表示.

现在我们要提出的问题是，对于一个给定的随机事件，它发生可能性大小的数量指标——概率，该如何确定呢？例如，抛一枚质地均匀的硬币，其正面朝上的概率相信绝大多数读者都可以脱口而出——50%，现在的问题是，这个数字(50%)的客观性基础是什么？

为了从数学上对概率这个概念给出严格的定义，也为了回答以上的问题，先讨论一个与此相关的概念——频率.

定义 1.2.1 在相同条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 的频数，比值 n_A/n 称为事件 A 发生的**频率**，并记为 $f_n(A)$，即

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$$

像某场篮球比赛中某运动员投篮的命中率和民意测验中某领导人的支持率等都是频率.

从实际经验以及本章一开始就给出的表 1-1 中可知，频率具有如下一些特点：

(1)频率的大小能体现事件发生可能性的大小，频率大则发生的可能性也应该大；反之，频率小则发生的可能性也小. 事实上，在很多实际问题中我们就是用频率来衡量事件发生可能性大小的，例如在体育比赛中，体育评论员常用“投篮的命中率”，“射门的命中率”等来表示运动员在某一时段的水平.

(2)频率有一定的随机波动性. 比如在表 1-1 中我们看到，当抛投硬币的次数不同时得到的频率常常会不一样，事实上，即使投同样多次硬币由于抛投的时间地点不同可能也会得到不同的频率. 例如，即使像乔丹这样的篮球运动员其投篮命中率也是有波动和起伏的. 这样就使频率缺乏科学度量单位所具有的客观性.

(3)当试验的次数逐渐增多时，频率具有稳定性. 从表 1-1 中我们可以看出，随着 n 的增大，$f_n(H)$ 稳定在 50%左右.

如何来理解频率的波动性与稳定性呢？

给定一根木棒，谁都不会怀疑它有自身的“客观”长度，问题是它的长度是多少？在实际过程中，我们可以用仪器来测量，但是不论仪器有多精确，反复测量得到的数值总多多少少有一些差异，这类似于前面所说的频率的波动性. 但是如果我们对大量重复测量的结果取平均值，这个平均值却总是稳定在真实的长度值的附近，这又有点类似于频率的稳定性. 这个类比将不但有助于我们去理解概率与频率之间的内在联系，而且还可以更进一步地揭示出客观世界广泛的统一性：概率与长度、面积等变量一样，都具有“测度”(measure)的性质.

从上面的类比中，我们可以认为，频率实际上是概率的一个“测量”. 在这个测量过程中频率所呈现出的稳定性反映了概率的客观性. 因此，如果我们能找出频率所有稳定的性质，那么从这些性质中便可看出概率的本质属性来.

经过归纳总结，可以得到频率的如下三条最基本的性质，即

(1)**非负性** 任意事件 A 的频率非负：$f_n(A)\geqslant 0$

(2)**规范性** 必然事件 S 的频率为 1：$f_n(S)=1$

(3)**有限可加性** 若 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是一组两两不相容的事件，则有

$$f_n(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) = \sum_{i=1}^{m} f_n(A_i)$$

上面的三条性质可直接由频率的定义来证明,请读者完成该证明.

透过现象看本质.如果把频率视为一种现象,那么其本质就是概率.因此,频率所满足的这三条基本性质同时也必须是概率所具有的性质.由于理论上还要考虑到可列无穷多个事件的关系和运算,因此有必要对有限可加性做适当的推广.这样就有了下面的定义.

定义 1.2.2(概率的公理化定义)　设 E 为随机试验,S 相应的样本空间 $\mathbb{F}$,为所有事件组成的集合,对于中的每一个事件 A,分别赋予一个实数,记为 $P(A)$,如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件:

(1)**非负性**:对于每一个事件 A,$P(A) \geqslant 0$

(2)**规范性**:$P(S) = 1$

(3)**可列可加性**:若 $A_1, A_2, \cdots, A_n \cdots$ 是一组两两不相容的事件,则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则我们称 P 为定义在上的**概率**;对任意的 $A \in \mathbb{F}$,称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

由定义可知,概率 P 是一个非负的、规范的和可列可加的实值集函数.

在历史上,对概率的理解一直存在着各种不同看法,有从频率的角度来理解的(如我们这本书中所主要采用的观点),也有从主观信念的角度来理解的(如贝叶斯学派的主观概率),等等,但是不论从哪个角度来理解概率这个概念,大家都承认上面三条是概率最基本的性质.这三条性质就像公理一样已被数学家们所普遍接受.因此,上面的定义又被称为概率的公理化定义.

1.2.2　概率的性质

由定义 1.2.2,可推出概率的如下一些重要性质.

性质 1　不可能事件的概率为零,即 $P(\varnothing) = 0$.

证　令 $A_n = \varnothing (n = 1, 2, \cdots)$,则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$,且当 $i \neq j$ 时,$A_i A_j = \varnothing$,故由概率的可列可加性,得

$$P(\varnothing) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\varnothing)$$

而 $P(\varnothing)$ 为一非负的实数,故只能有 $P(\varnothing) = 0$.

性质 2(有限可加性)　若 $A_1, A_2, \cdots, A_n (n \geqslant 2)$ 是一组两两不相容的事件,则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$