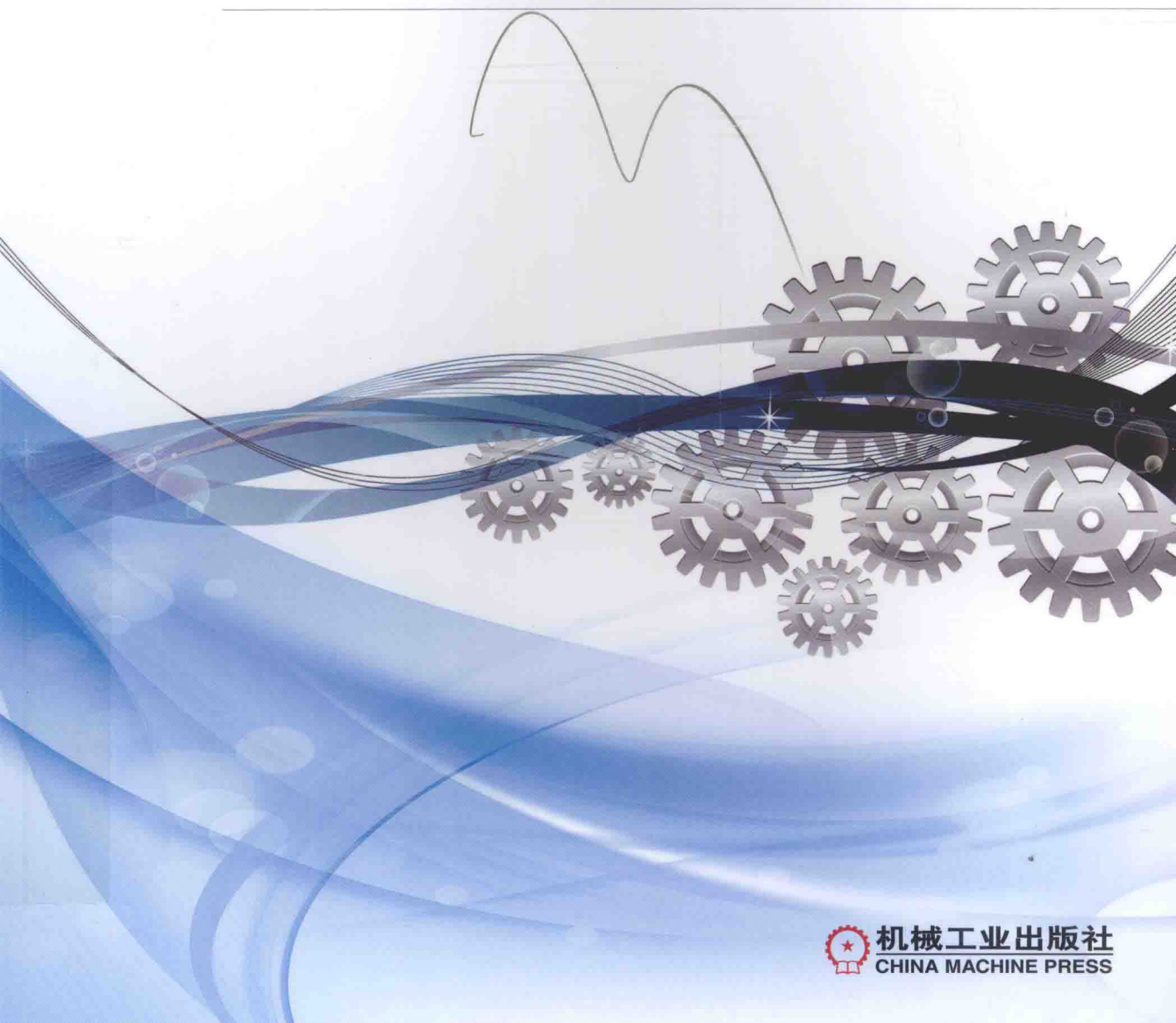


普通高等教育“十三五”规划教材

工程测试技术

Measurement Technology on Engineering

杨建伟 主编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

“三五”规划教材

工程测试技术

Measurement Technology on Engineering

主 编 杨建伟
副主编 杨 超 郭 宏
参 编 陈永会 周素霞 刘 畅 姚德臣



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

本书系统地阐述了工程测试技术的研究对象、理论基础以及典型物理量的测试方法。全书共 12 章。前 6 章介绍测试技术的理论基础, 主要包括测量的本质, 信号理论和测试信号的分析与处理, 测试系统的特性描述, 信号的传感、调理与输出以及计算机测试系统。后 6 章为典型测试技术的应用, 主要介绍振动(位移、速度、加速度)、力(压力)、温度、流体参量和噪声等常见物理量的测试方法与应用, 以及大型测试系统的组成与应用。本书在突出实用性和可操作性的同时, 也力图满足卓越工程师培养的需求, 可作为普通高等学校本科的教材, 同时也可供从事工程测试相关工作的人员学习和参考。

图书在版编目(CIP)数据

工程测试技术/杨建伟主编. —北京: 机械工业出版社, 2015.10

普通高等教育“十三五”规划教材

ISBN 978-7-111-51690-3

I. ①工… II. ①杨… III. ①工程测试—高等学校—教材
IV. ①TB22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 227037 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑: 舒恬 责任编辑: 舒恬 王荣

责任校对: 张征 封面设计: 张静

责任印制: 李洋

河北鑫宏源印刷包装有限责任公司印刷

2016 年 10 月第 1 版第 1 次印刷

184mm×260mm·21.75 印张·494 千字

标准书号: ISBN 978-7-111-51690-3

定价: 43.50 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

电话服务

网络服务

服务咨询热线: 010-88379833

机工官网: www.cmpbook.com

读者购书热线: 010-88379649

机工官博: weibo.com/cmp1952

教育服务网: www.cmpedu.com

封面无防伪标均为盗版

金书网: www.golden-book.com

前 言

“工程测试技术”是一门技术基础课。通过对本课程的学习，学生能较正确地选用测试装置和初步掌握进行动态测试所需要的基本理论、基本知识和基本技能。

全书共 12 章，前 6 章着重介绍工程测试技术的基本知识，包括测试信号分析与处理、测试系统特性分析、常用传感器及测试信号的调理与记录、现代测试系统等。为了加深对上述基础知识的理解，本书介绍了几种典型参数的测试方法。第 7 到 12 章介绍工程测试中典型物理量（力、转矩、温度等）的测量方法和应用，不同的专业可以根据其教学要求从中选择相应内容进行教授。

本书的编写特点如下：

（1）突出以注重物理概念为主线、工程实践应用为目的的特色，做到重点突出、条理清晰、分析透彻，便于教与学。

（2）在阐述测试理论的基础上，主要结合实例讲解及其应用，突出实际应用和系统集成，形成一套从理论到实际的完整的学习体系，便于学生理解和掌握后续专业课程中所需测试实践环节。

（3）理论学习结合 MATLAB 工具实现，使抽象的问题具体化，激发学生的学习兴趣。

本书适用面广，既可作为大专院校相关工科专业的教学用书，也可作为从事工程测试技术人员的学习参考书。

参加本书编写的有：北京建筑大学杨建伟（第 1 章、第 12 章），太原科技大学陈永会（第 2~3 章），华东交通大学杨超（第 4 章、第 11 章），太原科技大学郭宏（第 5 章），北京建筑大学姚德臣（第 9 章、第 7~8 章实例部分），太原科技大学刘畅（第 6 章、第 10 章），北京建筑大学周素霞（第 7~8 章），并由杨建伟担任主编，杨超、郭宏担任副主编，太原科技大学研究生蔡志宇和北京建筑大学研究生温敏健、杨明瀚、王金海、赵春青、王富民、王贺玺、白永亮、武慧杰、钱盈、王雯雯参与了文字处理和绘图工作。全书由杨建伟统稿。

本书承蒙北京交通大学博士生导师刘志明教授担任主审。刘教授提出了很多宝贵意见和建议，在此表示衷心感谢。

由于出版时间紧迫、作者水平有限，本书难免有不当之处，欢迎广大读者提出宝贵意见和建议，联系方法如下：电子邮件 railyjw@163.com。

编者

目 录

前言

第1章 绪论	1
1.1 测试技术的发展与研究的内容	1
1.2 测试的基本概念	3
1.3 测试系统的一般组成	3
习题	4
第2章 测试信号分析与处理	5
2.1 信号描述	5
2.2 信号的相关分析	28
2.3 数字信号处理	34
2.4 其他频谱分析技术简介	48
习题	49
第3章 测试系统特性分析	52
3.1 概述	52
3.2 测量误差	54
3.3 测试装置的静态响应特性	58
3.4 测试装置动态特性的数学描述	60
3.5 测试系统实现精确测量的条件	69
3.6 测试系统的负载效应	72
习题	74
第4章 常用传感器	76
4.1 传感器的分类	76
4.2 机械式传感器	80
4.3 电阻式传感器	81
4.4 电感式传感器	93
4.5 电容式传感器	103
4.6 压电式传感器	110
4.7 磁电式传感器	120
4.8 光电传感器	123
4.9 新型传感器	132
4.10 传感器的选用原则	141
习题	143

第 5 章 测试信号的调理与记录	146
5.1 信号的放大	146
5.2 电桥	149
5.3 调制与解调	154
5.4 滤波	161
5.5 模-数和数-模转换器	167
5.6 信号的传输与记录	171
习题	174
第 6 章 现代测试系统	176
6.1 计算机测试系统的基本组成	176
6.2 虚拟仪器的构成	178
6.3 虚拟测试系统的应用	190
习题	193
第 7 章 力及转矩的测量	194
7.1 概述	194
7.2 基本测力方法	195
7.3 测力传感器	196
7.4 转矩测量	206
7.5 应用实例	209
习题	220
第 8 章 振动测试	221
8.1 概述	221
8.2 机械振动的电测法及测试系统的构成	222
8.3 测振传感器	223
8.4 激振器	236
8.5 测振仪器的校准	241
8.6 车辆振动测量	243
8.7 动车组齿轮箱箱体模态测试	244
习题	250
第 9 章 温度的测量	251
9.1 温度标准和测量方法	251
9.2 热电偶温度计	253
9.3 热电阻温度计	261
9.4 非接触式测温法	265
习题	269



第 10 章 流体参量的测量	270
10.1 流体的特性	270
10.2 不同的流量测量方法及仪器	273
10.3 不同的压力测量方法及仪器	289
10.4 应用实例	299
习题	302
第 11 章 噪声测量	303
11.1 噪声评价指标	303
11.2 噪声测量仪器	317
11.3 噪声测量方法	321
11.4 噪声测量应用——发动机的安装和噪声测量工况	326
习题	327
第 12 章 测试系统实例	329
12.1 建筑机械、材料及设备的性能测试系统	329
12.2 车辆综合性能测试系统——铁路隧道提速列车的振动测试	334
习题	340
参考文献	341

第1章 绪 论

1.1 测试技术的发展与研究的内容

1.1.1 测试技术的发展方向

先进技术的发展日新月异,测试技术应该适应这种发展。根据先进制造技术发展的要求以及测试技术自身的发展规律,新的测量原理、测试方法及测试信息处理技术不断拓展着,具体体现在:

1) 传感器向新型、微型、智能型方向发展。

2) 测试仪器向高精度、多功能、小型化、在线监测、性能标准化和低成本发展。

3) 参数测量与数据处理以计算机为核心,使测量、分析、处理、打印、绘图、状态显示及故障预报向自动化、集成化、网络化发展。

4) 软测量技术(Soft Sensing Technique)迅速发展。软测量是以易测过程变量(辅助变量或二次变量)为基础,利用易测过程变量和待测过程变量(难测主导变量)之间的数学关系(软测量型),通过各种数学计算和估计实现对待测过程变量的测量。软测量是目前过程检测和控制研究发展的重要方向。

而就机械工程而言,测试技术在以下几个方面需要发展:

(1) 测量方式的多样化

1) 采用多传感器融合技术。多传感器融合是解决测量过程中测量信息获取的方法,它可以提高测量信息的准确性。由于多传感器是以不同的方法或从不同的角度获取信息的,因此可以通过它们之间的信息融合去伪存真,提高测量精度。

2) 采用积木式、组合式测量方法。这种方法可以增加测试系统的柔性,实现不同层次、不同目标的测试目的。

3) 采用便携式测量仪器。便携式光纤干涉测量仪、便携式大量程三维测量系统等便携式测量仪器,用于解决现场大尺寸的测量问题。

4) 采用虚拟仪器。虚拟仪器是虚拟现实技术在精密测试领域的应用。一种是将多种数字化的测试仪器虚拟成一台以计算机为硬件支撑的数字式智能化测试仪器;另一种是研究虚拟制造中的虚拟测量,如虚拟量块、虚拟坐标测量机等。

5) 采用智能结构。它属于结构检测与故障诊断,是一种仿生结构体系,使监测的概念过渡到在线、动态、主动的实时监测与控制。

(2) 视觉测试技术 视觉测试技术是建立在计算机视觉研究基础上的一门新兴测试技术。与计算机视觉的视觉模式识别、视觉理解等内容不同,视觉测试技术重点研究物体的几何尺寸及物体的位置测量,如三维面形的快速测量、大型工件同轴度测量、共面性测量



等。它可以广泛应用于在线测量、逆向工程等主动、实时测量过程。

(3)测量尺寸继续向两个极端发展 两个极端就是指相对于现在测量尺寸的大尺寸和小尺寸。通常尺寸的测量已被广为注意,也开发了多种多样的测试方法。近年来,由于国民经济的快速发展和迫切需要,使得很多方面的生产和工程中测试的要求超过了测试的范围,如飞机外形的测量、大型机械关键部件测量、高层建筑电梯导轨的准直测量、油罐车的现场校准等都要要求进行大尺寸测量;随着微电子技术、生物技术的快速发展,探索物质微观世界的需求增加,不仅要求测量精度不断提高,还要求进行微米、纳米测试。纳米测量也多种多样,有光干涉测量仪、量子干涉仪、电容测微仪、X射线干涉仪、频率跟踪式法珀(F-P)标准具、扫描电子显微镜(SEM)、扫描隧道显微镜(STM)、原子力显微镜(AFM)和分子测量机(Molecular Measuring Machine. M3)等。

1.1.2 测试技术的内容与任务

1. 测试技术的内容

测试技术研究的主要内容为被测量的测量原理、测量方法、测量系统及数据处理四个方面。

测量原理是指实现测量所依据的物理、化学、生物等现象及有关定律的总体。例如,用压电晶体测振动加速度时所依据的是压电效应;用电涡流式位移传感器测静态位移和振动位移时所依据的是电磁效应;用热电偶测量温度时所依据的是热电效应等。不同性质的被测量用不同的原理去测量,同一性质的被测量亦可用不同的原理去测量,如位移、温度等的测量。

测量原理确定后,根据对测量任务的具体要求和现场实际情况,需要采用不同的测量方法,如直接测量法或间接测量法、电测法或非电测法、模拟量测量法或数字量测量法、等精度或不等精度测量法等。

在确定了被测量的测量原理和测量方法以后,就要设计或选用装置组成测量系统。

最后,实际测试所得数据必须加以处理,才可得正确可靠的结果。

2. 测试技术的任务

测试技术的任务主要有以下五个方面:

1)在设备设计中,通过对新旧产品的模型试验或现场实测,为产品质量和性能提供客观的评价,为技术参数的优化和效率的提高提供基础数据。

2)在设备改造中,为了挖掘设备的潜力,以便提高产量和质量,经常需要实测设备或零件的载荷、应力、工艺参数和电机参数,为设备强度校验和承载能力的提高提供依据。

3)在工作和生活环境的净化及监测中,经常需要测量振动和噪声的强度及频谱,经过分析源,并采取相应的减振、防噪措施,改善劳动条件与工作环境,保证人的身心健康。

4)科学规律的发现和新的定律、公式的诞生都离不开测试技术。从实验中可以发现规律,验证理论研究结果,实验与理论可以相互促进,共同发展。

5)在工业自动化生产中,通过对工艺参数的测试和数据采集,实现对设备的状态监测、质量故障诊断。

1.2 测试的基本概念

测试技术属于信息科学的范畴，与计算机技术、自动控制技术、通信技术共同构成了完整的信息技术学科。

测量是指确定被测对象属性量值为目的的全部操作。测试是具有试验性质的测量，或者可以理解为测量和试验的综合。

在工程实际中，无论是工程研究、产品开发，还是质量监控、性能试验等，都离不开测试技术。测试技术是人类认识客观世界的手段，是科学研究的基本方法。

1.3 测试系统的一般组成

测试系统是指由相关的器件、仪器和测试装置有机组合而成的具有获取某种信息之功能的整体（见图 1-1）。

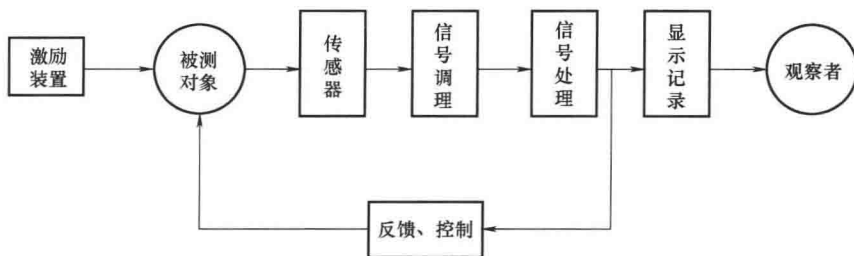


图 1-1 测试系统的组成

一个被测对象的信息总是通过一定的物理量——信号表现出来。有些信息可以在被测对象处于自然状态时所表现出的物理量中显现出来，而有些信息却无法显现或显现得不明显。在后一种情况下，需要通过激励装置作用于被测对象，使之产生出一种新的信号，使要获取的信息载于其中。

传感器是将被测信息转换成某种电信号的器件。它包括敏感元件和转换元件两部分。敏感元件一般是将被测量如温度、压力、位移、振动、噪声和流量等转换成某种容易检测的信号，而转换元件则是将这种信号变成某种易于传输、记录、处理的电信号。

信号的调理环节是把来自传感器的信号转换成更适合于进一步传输和处理的形式。这种信号的转换多数是电信号之间的转换，如幅值放大、将阻抗的变化转换成电压的变化或频率的变化等。

信号处理环节是对来自信号调理环节的信号进行各种运算、滤波和分析。

信号显示、记录环节是将来自信号处理环节的信号以观察者易于观察的形式来显示或存储测试的结果。

而反馈、控制环节主要用于闭环控制系统中的测试系统。

图 1-1 中信号调理、信号处理、反馈、控制、显示记录等环节，目前的发展趋势是经 A-D（模-数）转换后采用计算机等进行分析、处理，并经 D-A（数-模）转换控制



被测对象。

在这里，需要指出的是，为了准确地获得被测对象的信息，要求测试系统中的每一个环节的输出量与输入量之间必须具有一一对应的关系，而且其输出的变化能够准确地反映出其输入的变化，即实现不失真的测试。

习 题

- 1-1 简述测试技术的发展方向。
- 1-2 简述测试系统的一般组成。
- 1-3 简述测试技术的任务。

第2章 测试信号分析与处理

2.1 信号描述

2.1.1 信号的分类

通常按照不同的分类方法, 信号的分类也会有很大区别, 为了深入了解信号的物理实质, 将其分类研究是非常必要的。下面讨论几种比较常见的分类方法。

1. 确定性信号与非确定信号

(1) 确定性信号 可用明确的数学关系式描述的信号称为确定性信号。它可以进一步分为周期信号、非周期信号。

周期信号是按一定时间间隔周而复始重复出现, 无始无终的信号, 可表达为

$$x(t) = x(t + nT_0) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2-1)$$

式中 T_0 ——周期, $T_0 = 2\pi/\omega_0$, ω_0 为基频。

例如, 机械系统中, 回转体不平衡引起的振动, 往往就是一种周期性运动。另外, 集中参量的单自由度振动系统做无阻尼振动时, 其位移也是确定性的周期信号。

非周期信号是指确定性信号中那些不具有周期重复性的信号。它有两种: 准周期信号和瞬变非周期信号。准周期信号是由两种以上的周期信号合成的, 但其组成分量间无法找到公共周期, 因而无法按某一时间间隔周而复始重复出现。例如

$$x(t) = \sin t + \sin \sqrt{3}t \quad (2-2)$$

这种信号往往出现在通信、振动系统, 应用于语音分析、机械转子振动分析、齿轮噪声分析等。

除准周期信号之外的其他非周期信号, 是一些或在一定时间区间内存在, 或随着时间的增长而衰减至零的信号, 称为瞬变非周期信号。例如, 单自由度有阻尼振动系统的质点位移 $x(t)$ 可以表示为

$$x(t) = x_0 e^{-at} \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2-3)$$

其图形如图 2-1 所示, 它是一种瞬变非周期信号, 随着时间的无限增长而衰减至零。

(2) 非确定信号 非确定信号即随机信号是一种不能准确预测其未来瞬时值, 也无法用数学关系式来描述的信号。但是, 它具有某些统计特征, 可以用概率统计方法由其过去来估计其未来。随机信号所描述的现象是随机过程。自然界和生活中有许多随机过程, 例

如汽车奔驰时产生的振动、树叶随风飘动、环境噪声等。

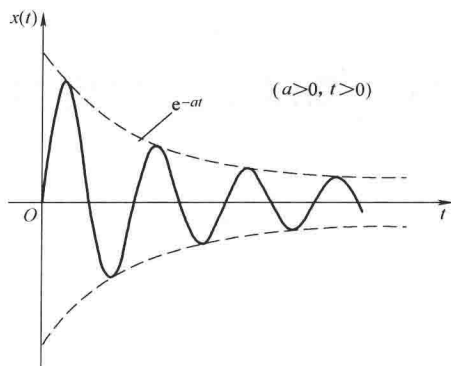


图 2-1 衰减振动信号

但是，需要指出的是：实际物理过程往往是相当复杂的，既无理想的确定性，也无理想的非确定性，而是相互掺杂的。

2. 连续信号与离散信号

根据函数取值的连续性与离散性，可分为连续信号与离散信号。

若信号数学表达式中的独立变量取值是连续的，则称为连续信号（见图 2-2a）。若独立变量取离散值，则称为离散信号。图 2-2b 是将连续信号等时距采样后的结果，它就是离散信号。离散信号可用离散图形表示，或用数字序列表示。连续信号的幅值可以是连续的，也可以是离散的。如果独立变量和幅值均取连续值的信号称为模拟信号。若离散信号的幅值也是离散的，则称为数字信号。数字计算机的输入、输出信号都是数字信号。

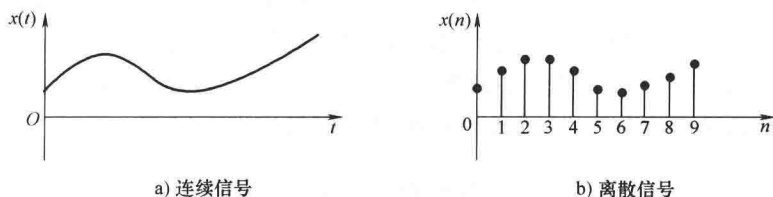


图 2-2 连续信号和离散信号

3. 能量信号和功率信号

在非电量测量中，常把被测信号转换为电压或电流信号来处理。显然，电压信号 $U(t)$ 加到电阻 R 上，其瞬时功率 $P(t)=U^2(t)/R$ ；或者电流信号 $I(t)$ 加到电阻 R 上，其瞬时功率 $P(t)=RI^2(t)$ 。当 $R=1$ 时， $P(t)=U^2(t)$ 或 $P(t)=I^2(t)$ 。瞬时功率对时间积分就是信号在该积分时间内的能量。因此，不考虑信号实际的量纲，而把信号 $x(t)$ 的二次方 $x^2(t)$ 及其对时间的积分分别称为信号的功率和能量。当在所分析的区间 $(-\infty, \infty)$ ， $x(t)$ 满足时，

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty$$

则认为信号的能量是有限的, 并称之为能量有限信号或称为能量信号, 例如, 矩形脉冲(t_1, t_2)、减幅正弦波、衰减指数函数等。

有许多信号, 如周期信号、随机信号等, 它们在区间 $(-\infty, \infty)$ 内能量不是有限值, 在这种情况下, 研究信号的平均功率更为合适。

若信号在区间 $(-\infty, \infty)$ 的能量是无限的, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \rightarrow \infty \quad (2-4)$$

但它在有限区间(t_1, t_2)的平均功率是有限的, 即

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt < \infty \quad (2-5)$$

这种信号称为功率有限信号, 或功率信号。

显而易见, 一个能量信号具有零平均功率, 而一个功率信号具有无限大能量。但是必须注意, 信号的功率和能量, 未必具有真实功率和能量的量纲。

4. 时限与频限信号

时域有限信号是指在有限区间(t_1, t_2)内有定义, 而在其外恒等于零, 例如, 矩形脉冲、三角脉冲、余弦脉冲等。而周期信号、指数衰减信号、随机过程等, 则称为时域无限信号。

频域有限信号是指信号经过傅里叶变换, 在频域内占据一定带宽(f_1, f_2), 其外恒等于零, 例如, 正弦信号、 $\text{sinc}(t)$ 函数、限带白噪声等, 为时域无限频域有限信号; 而 δ 函数、白噪声、理想采样信号等, 则为频域无限信号。

时域有限信号的频谱, 在频率轴上可以延伸至无限远。由时、频域对称性可推论, 一个具有有限带宽的信号, 必然在时间轴上延伸至无限远处。因此, 一个信号不可能在时域和频域都是有限的。也就是, 一个严格的频域有限信号, 不能同时又是时间有限信号, 反之亦然。

2.1.2 信号的时域和频域描述

在信号描述中, 直接观测或记录到的信号, 一般是以时间为独立变量的, 称其为信号的时域描述。信号时域描述能反映信号幅值随时间变化的关系, 而不能明显揭示信号的频率组成关系。为了研究信号的频率结构和各频率成分的幅值、相位关系, 应对信号进行频谱分析, 把信号的时域描述通过适当方法变成信号的频域描述, 也就是以频率为独立变量来表示信号。

例如, 图 2-3 是一个周期方波的一种时域描述, 而下式则是其时域描述的另一种形式

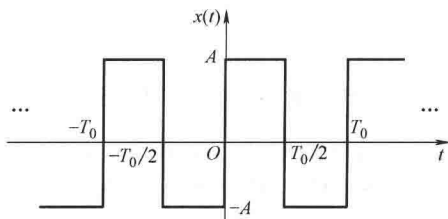


图 2-3 周期方波



$$\begin{cases} x(t) = x(t + nT_0) & n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ x(t) = \begin{cases} A & 0 < t < \frac{T_0}{2} \\ -A & -\frac{T_0}{2} < t < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (2-6)$$

如果该周期方波应用傅里叶级数展开, 即得

$$x(t) = \frac{4A}{\pi} \left(\sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \frac{1}{7} \sin 7\omega_0 t + \dots \right) \quad (2-7)$$

式中 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ 。

式 (2-7) 表明该周期方波是由一系列幅值和频率不等、相角为零的正弦信号叠加而成的。式 (2-7) 还可以改写成

$$x(t) = \frac{4A}{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\omega_0 t \right) \quad (2-8)$$

式中 $\omega = n\omega_0$, $n=1, 3, 5, \dots$ 。可见, 此式除 t 之外还有另一变量 ω ——各正弦成分的频率。若视 t 为参变量, 以 ω 为独立变量, 则式 (2-8) 即为该周期方波的频域描述。

在信号分析中, 将组成信号的各频率成分找出来, 按序排列, 得出信号的“频谱”。若以频率为横坐标、分别以幅值或相位为纵坐标, 便分别得到信号的幅频谱或相频谱。图 2-4 表示出了该周期方波的时域图形、幅频谱和相频谱三者的关系。

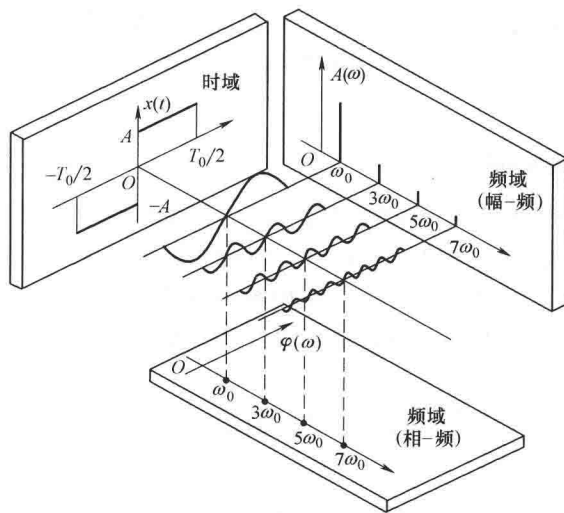
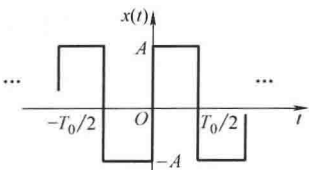
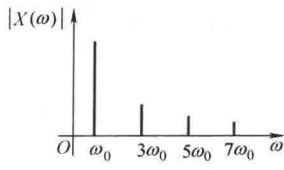
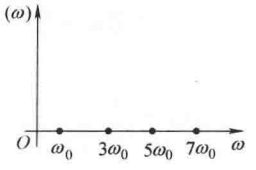
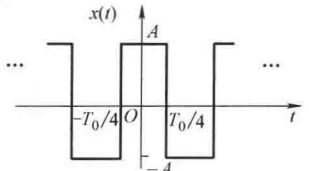
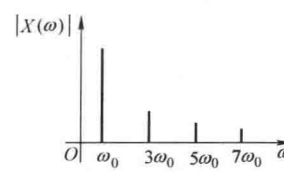
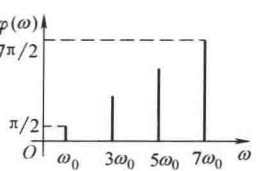


图 2-4 周期方波的描述

表 2-1 列出两个同周期方波及其幅频谱、相频谱。显而易见, 在时域中, 两方波除彼此相对平移 $T_0/4$ 之外, 其余完全一样。但两者的幅频谱虽相同, 相频谱却不同。平移使各频率分量产生了 $n\pi/2$ 相角, n 为谐波次数。总之, 每个信号有其特有的幅频谱和相频谱。所以在频域中每个信号都需同时用幅频谱和相频谱来描述。

表 2-1 周期方波的频谱

时域波形	幅 频 谱	相 频 谱
		
		

信号时域描述直观地反映出信号瞬时值随时间变化的情况；频域描述则反映信号的频率组成及其幅值、相角的大小。为了解决不同问题，往往需要掌握信号不同方面的特征，因而可以采用不同的描述方式。例如，评定机器振动烈度，需用振动速度的方均根值作为判据。若速度信号采用时域描述，就能很快求得方均根值。而在寻找振源时，需要掌握振动信号的频率分量，这就需采用频域描述。实际上，两种描述方法能相互转换，而且包含同样的信息。

2.1.3 周期信号的频域描述

从数学分析已知，任何周期函数在满足狄里赫利（Dirichlet）条件下，都可以展开成傅里叶级数。

傅里叶级数的三角函数展开式如下：

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad n=1, 2, \dots \quad (2-9)$$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t - \varphi_n) \quad n=1, 2, \dots \quad (2-10)$$

复数形式表达式为

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2-11)$$

三式中各参数及相应关系如下：

$$\text{常值分量} \quad a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad (2-12)$$

$$\text{余弦分量的幅值} \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (2-13)$$

$$\text{正弦分量的幅值} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (2-14)$$



各频率分量的幅值
$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (2-15)$$

各频率分量的相位
$$\varphi_n = \arctan \frac{b_n}{a_n} \quad (2-16)$$

傅里叶系数
$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (2-17)$$

$$C_n = |C_n| e^{j\varphi_n} \quad (2-18)$$

$$C_n = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} A_n \quad (2-19)$$

$$\varphi_n = \arctan \frac{\text{Im}[C_n]}{\text{Re}[C_n]} \quad (2-20)$$

平均功率

$$\Psi_x^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \quad (2-21)$$

或

$$\Psi^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \quad (2-22)$$

以上, $A_n - \omega$ 、 $|C_n| - \omega$ 关系称为幅频谱; $\varphi_n - \omega$ 关系称为相频谱; $A_n^2 - \omega$ 、 $|C_n|^2 - \omega$ 关系称为功率谱。

从式 (2-10) 可见, 周期信号是由一个或几个、乃至无穷多个不同频率的谐波叠加而成的。以圆频率为横坐标, 幅值 A_n 或相角 φ_n 为纵坐标作图, 则分别得其幅频谱和相频谱图。由于 n 是整数序列, 各频率成分都是 ω_0 的整倍数, 相邻频率的间隔 $\Delta\omega = \omega_0 = 2\pi/T_0$, 因而谱线是离散的。通常把 ω_0 称为基频, 并把成分 $A_n \cos(n\omega_0 t - \varphi_n)$ 称为 n 次谐波。

把周期函数 $x(t)$ 展开为傅里叶级数的复指数函数形式后, 除了作幅频谱图和相频谱图, 还可以分别以 C_n 的实部或虚部与频率的关系作幅频图, 并分别称为实频谱图和虚频谱图。比较傅里叶级数的两种展开形式可知: 复指数函数形式的频谱为双边谱 (ω 从 $-\infty$ 到 $+\infty$), 三角函数形式的频谱为单边谱 (ω 从 0 到 $+\infty$); 两种频谱各谐波幅值在量值上有确定的关系, 即 $|C_n| = \frac{1}{2} A_n$, $|C_0| = a_0$ 。双边幅频谱为偶函数, 双边相频谱为奇函数。

在式 (2-11) 中, n 可取正、负值。当 n 为负值时, 谐波频率 $n\omega_0$ 为“负频率”。出现“负”的频率似乎不好理解, 实际上角速度按其旋转方向可以有正有负, 一个向量的实部可以看成是两个旋转方向相反的矢量在其实轴上投影之和, 而虚部则为其在虚轴上投影之差 (见图 2-5)。