

21世纪高等学校规划教材 | 计算机科学与技术

# 离散数学

陈志奎 周勇 高静 编著



清华大学出版社

21世纪高等学校规划教材 | 计算机科学与技术

# 离散数学

陈志奎 周勇 高静 编著

清华大学出版社  
北京

## 内 容 简 介

本书分为数理逻辑、集合论、代数结构和图论4个部分。全书内容严谨,条理清晰,对概念的阐述精确,对实例的使用合理,适合作为高等学校软件工程专业和计算机专业离散数学课程的本科教材,也可作为软件工程与计算机等相关专业的自学参考书。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

### 图书在版编目(CIP)数据

离散数学/陈志奎,周勇,高静编著.——北京:清华大学出版社,2016

21世纪高等学校规划教材.计算机科学与技术

ISBN 978-7-302-44898-3

I. ①离… II. ①陈… ②周… ③高… III. ①离散数学—高等学校—教材 IV. ①O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第201707号

责任编辑:贾 斌 薛 阳

封面设计:傅瑞学

责任校对:时翠兰

责任印制:何 芊

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦A座 邮 编:100084

社 总 机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, [c-service@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:c-service@tup.tsinghua.edu.cn)

质 量 反 馈:010-62772015, [zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn)

课 件 下 载: <http://www.tup.com.cn>, 010-62795954

印 装 者:三河市少明印务有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm 印 张:18.25 字 数:441千字

版 次:2016年8月第1版 印 次:2016年8月第1次印刷

印 数:1~2000

定 价:39.80元

产品编号:070389-01

# 出版说明

---

随着我国改革开放的进一步深化,高等教育也得到了快速发展,各地高校紧密结合地方经济建设发展需要,科学运用市场调节机制,加大了使用信息科学等现代科学技术提升、改造传统学科专业的投入力度,通过教育改革合理调整和配置了教育资源,优化了传统学科专业,积极为地方经济建设输送人才,为我国经济社会的快速、健康和可持续发展以及高等教育自身的改革发展做出了巨大贡献。但是,高等教育质量还需要进一步提高以适应经济社会发展的需要,不少高校的专业设置和结构不尽合理,教师队伍整体素质亟待提高,人才培养模式、教学内容和方法需要进一步转变,学生的实践能力和创新精神亟待加强。

教育部一直十分重视高等教育质量工作。2007年1月,教育部下发了《关于实施高等学校本科教学质量与教学改革工程的意见》,计划实施“高等学校本科教学质量与教学改革工程”(简称“质量工程”),通过专业结构调整、课程教材建设、实践教学改革、教学团队建设等多项内容,进一步深化高等学校教学改革,提高人才培养的能力和水平,更好地满足经济社会发展对高素质人才的需要。在贯彻和落实教育部“质量工程”的过程中,各地高校发挥师资力量强、办学经验丰富、教学资源充裕等优势,对其特色专业及特色课程(群)加以规划、整理和总结,更新教学内容、改革课程体系,建设了一大批内容新、体系新、方法新、手段新的特色课程。在此基础上,经教育部相关教学指导委员会专家的指导和建议,清华大学出版社在多个领域精选各高校的特色课程,分别规划出版系列教材,以配合“质量工程”的实施,满足各高校教学质量和教学改革的需要。

为了深入贯彻落实教育部《关于加强高等学校本科教学工作,提高教学质量的若干意见》精神,紧密配合教育部已经启动的“高等学校教学质量与教学改革工程精品课程建设工作”,在有关专家、教授的倡议和有关部门的大力支持下,我们组织并成立了“清华大学出版社教材编审委员会”(以下简称“编委会”),旨在配合教育部制定精品课程教材的出版规划,讨论并实施精品课程教材的编写与出版工作。“编委会”成员皆来自全国各类高等学校教学与科研第一线的骨干教师,其中许多教师为各校相关院、系主管教学的院长或系主任。

按照教育部的要求,“编委会”一致认为,精品课程的建设工作从开始就要坚持高标准、严要求,处于一个比较高的起点上。精品课程教材应该能够反映各高校教学改革与课程建设的需要,要有特色风格、有创新性(新体系、新内容、新手段、新思路,教材的内容体系有较高的科学创新、技术创新和理念创新的含量)、先进性(对原有的学科体系有实质性的改革和发展,顺应并符合21世纪教学发展的规律,代表并引领课程发展的趋势和方向)、示范性(教材所体现的课程体系具有较广泛的辐射性和示范性)和一定的前瞻性。教材由个人申报或各校推荐(通过所在高校的“编委会”成员推荐),经“编委会”认真评审,最后由清华大学出版

社审定出版。

目前,针对计算机类和电子信息类相关专业成立了两个“编委会”,即“清华大学出版社计算机教材编审委员会”和“清华大学出版社电子信息教材编审委员会”。推出的特色精品教材包括:

- (1) 21 世纪高等学校规划教材·计算机应用——高等学校各类专业,特别是非计算机专业的计算机应用类教材。
- (2) 21 世纪高等学校规划教材·计算机科学与技术——高等学校计算机相关专业的教材。
- (3) 21 世纪高等学校规划教材·电子信息——高等学校电子信息相关专业的教材。
- (4) 21 世纪高等学校规划教材·软件工程——高等学校软件工程相关专业的教材。
- (5) 21 世纪高等学校规划教材·信息管理与信息系统。
- (6) 21 世纪高等学校规划教材·财经管理与应用。
- (7) 21 世纪高等学校规划教材·电子商务。
- (8) 21 世纪高等学校规划教材·物联网。

清华大学出版社经过三十多年的努力,在教材尤其是计算机和电子信息类专业教材出版方面树立了权威品牌,为我国的高等教育事业做出了重要贡献。清华版教材形成了技术准确、内容严谨的独特风格,这种风格将延续并反映在特色精品教材的建设中。

清华大学出版社教材编审委员会

联系人:魏江江

E-mail: weijj@tup.tsinghua.edu.cn

# 前言

随着国内软件行业的迅猛发展,社会对软件人才的需求量越来越大。为此,教育部于2001年12月发布《关于批准有关高等学校试办示范性软件学院的通知》,以35所重点高校为依托,开办示范性软件学院,采取开放式的培养模式,摸索培养高素质的软件工程人才的方式。

软件工程专业所使用的教材大多来自于计算机科学与技术。“离散数学”是计算机科学与技术 and 软件工程专业培养体系中的核心基础课程。大多数离散数学的教材都是针对计算机科学与技术专业,多着重于数学理论的建立与推导,涉及的实际工程应用较少。这使得学生在学习的过程中,很难对重要的知识点消化吸收,降低了学习效率。国外的一些经典教材逻辑性强但实例较少,并不太适合自学,而有些教材虽然实例较多,但逻辑性中国学生难以接受。基于这种现状,在我们软件工程专业教授离散数学多年经验的基础上,经过广泛的调研以及与相关任课老师的交流与讨论,认为有必要编写一本实例较多,逻辑合理,浅显易懂,便于软件工程专业学生学习的离散数学教材。

离散数学在软件工程专业授课内容一般分为4大部分:数理逻辑、集合论、代数系统、图论,这4个部分紧密连接。数理逻辑描述了一个符号化体系,这个体系可以描述集合论中的所有概念。集合论中又有三个小模块:集合、关系、函数。关系是集合中迪卡儿乘积的子集,函数是关系的子集,代数系统是定义函数的运算,图论是一类特殊的代数系统。本教材针对软件工程专业,强调系统逻辑性,前后内容的衔接,在内容安排上会点出这种联系并将章节高度地模块化,另外,整本书使用统一的符号化体系描述和解题。因此本教材具有以下一些特点:

首先,本教材着重体现理论与应用的结合。离散数学是软件工程专业核心课程之一,与高等数学、线性代数等其他公共数学课程不同,但是,对于学生而言,往往误把它作为同高等数学一样的公共数学课,仅仅认识到离散数学的理论公式部分,看不到其在实际中的应用价值以及同软件工程专业之间的关系和在软件工程专业中处的位置。本书的一个着眼点就是在章节结构清晰的基础上,每一个部分都与具体的应用相结合,比如说布尔逻辑与信息检索、图的遍历与网络爬虫、图的最短路径与地图导航等。每一个定义、定理都由软件工程的实例加以解释和说明,增强可读性,这对软件专业的学生来说,看到这些应用与实例能够激发学生的学习热情,并培养建立离散模型解题的认识和能力,不断增强对软件工程的认识和理解。为此,在本教材中,我们为这些定义和定理准备了大量的范例,将抽象的内容具体化,来降低理解的难度。

其次,实例同软件工程专业的相关性强。对知识点的解释方式同被教授对象的知识体系的吻合度越高,其被理解和吸收的效率就越高。为了使教材中的知识点可以更好地被软件专业的学生所掌握,我们在教材中应用了许多同计算机科学相关的实例。

最后,离散数学是很多软件工程专业课程的先修课,比如说操作系统、数据结构、编译原

理等。本书将相关理论与后续专业课联系,真正实现先修课的价值和无缝衔接,帮助学生构建自己的知识架构。将软件工程的基本原理贯穿到离散数学的知识点,贯穿到后续课程的体系中。

在本书的编写过程中,得到了许多教师的帮助,特别是曹晓东教授对书稿进行了认真的审阅,并提出了宝贵的修改意见,对此我们表示衷心的感谢。本教材的第3~5章由周勇老师完成,其他部分由陈志奎老师完成,高静老师参与了例习题的补充和部分内容的修改与完善。作者还要感谢清华大学出版社的编辑,是在他们的支持下,才能使本书很快出版发行。另外,本书在编写过程中参考和引用了有关方面的书籍,以及一些网络材料,作者在此对参考文献中所有的作者表示衷心的感谢。

由于作者的学识水平有限,书中如出现不准确、不适宜或者疏漏的内容,希望读者给予批评指正,在此表示感谢。

编者

2016年春于大连理工大学

# 目 录

第 1 章 命题逻辑	1
1.1 命题和联结词	1
1.1.1 命题的概念	1
1.1.2 联结词	2
1.2 合式公式与真值表	7
1.2.1 合式公式	7
1.2.2 真值表	8
1.3 永真式和等价式	9
1.3.1 永真式	9
1.3.2 等价式	10
1.3.3 代入规则和替换规则	11
1.4 对偶式与蕴涵式	12
1.4.1 对偶式	12
1.4.2 蕴涵式	14
1.5 范式和判定问题	15
1.5.1 析取范式和合取范式	15
1.5.2 主析取范式和主合取范式	17
1.6 命题演算的推理理论	20
1.7 基于布尔逻辑的信息检索	24
1.7.1 布尔逻辑运算符	24
1.7.2 应用技巧	26
习题	26
第 2 章 谓词逻辑	30
2.1 基本概念和表示	30
2.1.1 个体、谓词和谓词形式	30
2.1.2 量词	32
2.1.3 合式谓词公式	33
2.1.4 自由变元和约束变元	34
2.2 谓词逻辑的翻译与解释	35
2.2.1 谓词逻辑的翻译	35
2.2.2 谓词公式的解释	36



2.3	谓词逻辑的等价式与蕴涵式	36
2.4	谓词逻辑中的推论理论	39
2.4.1	推理规则	39
2.4.2	推理实例	40
2.5	谓词逻辑中公式范式	44
2.5.1	前束范式	44
2.5.2	斯柯林范式	45
2.6	谓词逻辑的应用	46
	习题	47
<b>第3章</b>	<b>集合论</b>	<b>50</b>
3.1	集合的概念及其表示	51
3.2	集合的运算及恒等式	53
3.3	有穷集的计数和包含排斥原理	58
	习题	62
<b>第4章</b>	<b>二元关系</b>	<b>65</b>
4.1	多重序元与笛卡儿乘积	65
4.2	关系的基本概念	67
4.3	关系的运算	68
4.4	关系的性质	74
4.5	关系的表示	76
4.6	关系的闭包运算	81
4.7	特殊关系	85
4.7.1	集合的划分和覆盖	85
4.7.2	等价关系	86
4.7.3	相容关系	91
4.7.4	次序关系	94
4.7.5	偏序集合与哈斯图	97
4.8*	关系型数据库与非关系型数据库	99
4.8.1	关系型数据库	99
4.8.2	非关系型数据库	101
	习题	102
<b>第5章</b>	<b>函数</b>	<b>108</b>
5.1	函数的基本概念和性质	108
5.2	函数的合成和合成函数的性质	111
5.3	特殊函数	113
5.4	反函数	115

5.5	特征函数 .....	118
5.6	基数 .....	120
5.7*	不可解问题 .....	122
5.7.1	不可解问题的存在性 .....	123
5.7.2	停机问题 .....	123
	习题 .....	124
<b>第 6 章</b>	<b>代数系统 .....</b>	<b>127</b>
6.1	代数系统的一般概念 .....	128
6.1.1	二元运算 .....	128
6.1.2	代数系统 .....	129
6.2	代数系统的基本性质 .....	130
6.3	同态与同构 .....	137
6.3.1	同态 .....	138
6.3.2	同构 .....	140
6.3.3	同态与同构的性质 .....	144
6.4	同余关系 .....	144
6.5	商代数 .....	146
6.6	积代数 .....	146
6.7	云环境中的数据安全之同态计算 .....	148
6.7.1	云计算中的同态计算 .....	148
6.7.2	数据安全的同态计算过程 .....	149
6.7.3	同态计算在数据安全中的主要应用 .....	149
	习题 .....	149
<b>第 7 章</b>	<b>群与环 .....</b>	<b>152</b>
7.1	半群 .....	152
7.2	群 .....	154
7.2.1	群的概念 .....	154
7.2.2	群的性质 .....	156
7.3	子群与群的陪集分解 .....	159
7.3.1	子群 .....	159
7.3.2	子群的判定 .....	159
7.3.3	子群的性质 .....	160
7.3.4	子群的陪集分解 .....	161
7.3.5	拉格朗日定理 .....	164
7.4	循环群与置换群 .....	164
7.4.1	循环群 .....	165
7.4.2	置换群 .....	166

7.5	群的同态与同构 .....	167
7.6	环与域 .....	168
	7.6.1 环的概念与性质 .....	168
	7.6.2 域的概念 .....	169
7.7	群理论的应用 .....	170
	7.7.1 群与网络安全 .....	170
	7.7.2 群与纠错编码 .....	171
	习题 .....	173
<b>第 8 章</b>	<b>格与布尔代数</b> .....	<b>176</b>
8.1	格的定义与性质 .....	177
8.2	分配格、有补格与布尔代数 .....	179
8.3	应用 .....	180
	习题 .....	181
<b>第 9 章</b>	<b>图的基本概念及其矩阵表示</b> .....	<b>183</b>
9.1	图的基本概念 .....	184
	9.1.1 图的定义及相关概念 .....	184
	9.1.2 结点的度 .....	186
9.2	子图和图的运算 .....	188
	9.2.1 子图和补图 .....	189
	9.2.2 图的运算 .....	190
9.3	路径、回路和连通性 .....	192
	9.3.1 路径和回路 .....	192
	9.3.2 图的连通性 .....	195
9.4	图的矩阵表示 .....	198
	9.4.1 邻接矩阵 .....	198
	9.4.2 可达性矩阵 .....	203
	9.4.3 关联矩阵 .....	206
9.5	图论在社会网络分析中的应用 .....	208
	习题 .....	209
<b>第 10 章</b>	<b>几种特殊图</b> .....	<b>215</b>
10.1	欧拉图 .....	215
10.2	哈密尔顿图 .....	218
10.3	二部图及匹配 .....	220
	10.3.1 二部图的概念及性质 .....	220
	10.3.2 二部图匹配 .....	222
10.4	平面图 .....	224

10.4.1	平面图的概念及性质 .....	224
10.4.2	多边形图、对偶图及平面图着色 .....	226
10.5	网络 .....	229
10.5.1	网络的基本概念 .....	230
10.5.2	网络流 .....	231
10.5.3	网络最大流求解 .....	232
10.5.4	开关网络 .....	239
10.6	图的实例分析 .....	247
10.6.1	中国邮递员问题 .....	247
10.6.2	旅行售货员问题 .....	249
10.6.3	排课问题 .....	250
10.6.4	时延容忍网络问题 .....	252
10.6.5	最短路径问题 .....	253
	习题 .....	256
<b>第 11 章</b>	<b>树 .....</b>	<b>260</b>
11.1	树与生成树 .....	260
11.1.1	树及其性质 .....	260
11.1.2	生成树与最小生成树 .....	262
11.2	有向树及其应用 .....	264
11.2.1	有向树 .....	264
11.2.2	$m$ 叉树 .....	265
11.2.3	有序树 .....	267
11.2.4	二叉树的遍历 .....	269
11.2.5	搜索树 .....	270
	习题 .....	273
	参考文献 .....	276

# 第 1 章

## 命题逻辑

逻辑为确定一个给出的论证是否有效提供各种方法和技巧,而根据研究对象和方法的不同,可以分为形式逻辑、辩证逻辑和数理逻辑。其中数理逻辑就是用数学方法研究人的思维形式和规律,通过建立一套表意符号体系对事物进行抽象并推理,从而研究前提和结论间的形式关系的科学。其研究对象是对证明和计算这两个直观概念进行符号化以后的形式系统。

利用计算的方法来代替人们思维中的逻辑推理过程,这种想法早在 17 世纪就有人提出过。莱布尼茨(Gottfried Leibniz, 1646—1716)就曾经设想过能不能创造一种“通用的科学语言”,可以把推理过程像数学一样利用公式来进行计算,从而得出正确的结论。由于当时的社会条件限制,他的想法并没有实现。但是他的思想却是现代数理逻辑部分内容的萌芽,从这个意义上讲,莱布尼茨可以说是数理逻辑的先驱。

一般认为,旧逻辑学的创始人是公元前 4 世纪的希腊思想家亚里士多德(Aristotle, 公元前 384—前 322);新逻辑学的创始人是 17 世纪的德国哲学家莱布尼茨和 19 世纪中叶的英国数学家乔治·布尔(George Boole, 1815—1864)。1847 年,布尔发表了《逻辑的数学分析》一文,建立了“布尔代数”,并创造一套符号系统,利用符号来表示逻辑中的各种概念。布尔建立了一系列的运算法则,利用代数的方法研究逻辑问题,初步奠定了数理逻辑的基础。

19 世纪末 20 世纪初,数理逻辑有了比较大的发展。1884 年,德国数学家戈特洛布·弗雷格(Gottlob Frege, 1848—1925)出版了《数论的基础》一书,在书中引入量词的符号,使得数理逻辑的符号系统更加完备。对建立这门学科做出贡献的还有美国人查尔斯·皮尔斯(Charles Peirce, 1839—1914),他也在著作中引入了逻辑符号,从而使现代数理逻辑最基本的理论基础逐步形成,成为一门独立的学科。之后英国数学家德·摩根(Augustus De Morgan, 1806—1871)和罗素(Bertrand Russell, 1872—1970)等人丰富和完善了数理逻辑。

命题逻辑和谓词逻辑是计算机科学领域中所必需的数理逻辑基础知识。在本章中,将对命题逻辑进行介绍和讨论。

### 1.1 命题和联结词

#### 1.1.1 命题的概念

**定义 1.1** 命题是或者为真,或者为假,而不是两者同时成立的陈述句。

作为命题的陈述句所表达的判断结果称作命题的真值,真值只能取两个值:真或假。真值为真的命题称为真命题,真值为假的命题称为假命题。注意:任何命题的真值都是唯一的。

如果一个命题的真值是真,则用 1 或 T(True)来表示;如果一个命题的真值是假,则用 0 或 F(False)来表示。

命题用大写的英文字母,如  $P, Q, R, \dots$  来表示。

判断给定句子是否为命题分为两步:首先判断该句子是否为陈述句;其次判断它是否有唯一的一个真值。

**例 1.1** 判断下面句子是否是命题。

- (1) 2013 年是闰年。
- (2)  $2 \times 2 = 5$ 。
- (3) 小明晚上去看电影。
- (4) 这朵花真漂亮啊!
- (5) 请不要在此处吸烟!
- (6) 你下午会出去吗?
- (7) 2 既是素数又是偶数。
- (8) 本句话是错的。

以上句子中(1)、(2)、(3)和(7)都是命题。注意:一个陈述句能否判断真假与现在能否判断真假是两件事。(4)、(5)是感叹句,(6)是疑问句,不是命题。对于(8),如果本句话确实是错的,那么“本句话是错的”便是真;另一方面,如果“本句话是错的”是真,那么本句话便是假。从以上分析只能得出这样的结论:本句话既不是对的又不是错的,这显然是矛盾的,也就是说对于该陈述句无法指定它的真值。这样的陈述句称为悖论,不是命题。

在上面的命题中,(1)、(2)、(3)都不能再被分割成为更小的命题,它们是基本的、原始的,这样的命题被称为原子命题。而命题(7)则不是最基本的,它还可以被分解为更小的命题:可将“2 是素数”和“2 是偶数”这两个命题由“与”联结词组合而成。像这种由更小的命题组合而成的命题称为复合命题。

### 1.1.2 联结词

联结词是逻辑联结词或者命题联结词的简称,它是自然语言中连词的逻辑抽象。有了联结词,就可以通过它和原子命题构成复合命题。常用的逻辑联结词主要包括以下 6 种。

- (1) 联结词“非”,记为“ $\neg P$ ”,表示“否定”的意思。
- (2) 联结词“合取”,记为“ $\wedge$ ”,表示“且”的意思。
- (3) 联结词“析取”,记为“ $\vee$ ”,表示“或”的意思。
- (4) 联结词“蕴涵”,记为“ $\rightarrow$ ”,表示“如果 $\dots$ ,则 $\dots$ ”的意思。
- (5) 联结词“等价”,记为“ $\leftrightarrow$ ”,表示“当且仅当”的意思。
- (6) 联结词“异或”,记为“ $\nabla$ ”,表示“要么 $\dots$ ,要么 $\dots$ ”的意思。

下面给出这 6 种联结词的详细定义。

### 1. 逻辑联结词否定—— $\neg$

设  $P$  是一个命题, 则联结词  $\neg$  和命题  $P$  构成  $\neg P$ ,  $\neg P$  为命题  $P$  的否定式复合命题, 读作“非  $P$ ”。联结词  $\neg$  是自然语言中的“非”、“不”和“没有”等的逻辑抽象。

其真值是这样定义的, 若  $P$  的真值是 T, 那么  $\neg P$  的真值是 F; 若  $P$  的真值是 F, 则  $\neg P$  的真值是 T。命题  $P$  与其否定  $\neg P$  的真值如表 1.1 所示。

表 1.1 逻辑联结词“ $\neg$ ”的定义

$P$	$\neg P$		$P$	$\neg P$
F	T	或	0	1
T	F		1	0

**例 1.2** 给出下列命题的否定。

(1) 令  $P$  表示: 大连是北方香港。

于是  $\neg P$  表示: 大连不是北方香港。

**注意:** 逻辑联结词否定是个一元运算符。

(2) 令  $Q$  表示: 所有的素数都是奇数。

于是  $\neg Q$  表示: 并非所有的素数都是奇数。

**注意:** 翻译成“所有的素数都不是奇数”是错误的, 因为否定是对整个命题进行的。

### 2. 逻辑联结词合取—— $\wedge$

设  $P$  是一个命题,  $Q$  是一个命题, 由联结词  $\wedge$  把  $P$  和  $Q$  连接成  $P \wedge Q$ , 称  $P \wedge Q$  为  $P$  和  $Q$  的合取式复合命题,  $P \wedge Q$  读作“ $P$  与  $Q$ ”或者“ $P$  合取  $Q$ ”。联结词  $\wedge$  是“并且”的逻辑抽象。

它的真值是这样定义的: 当且仅当  $P$  和  $Q$  的真值都为 T 时,  $P \wedge Q$  的真值才为 T, 否则  $P \wedge Q$  的真值为 F。逻辑联结词“ $\wedge$ ”的定义如表 1.2 所示。

表 1.2 逻辑联结词“ $\wedge$ ”的定义

$P$	$Q$	$P \wedge Q$		$P$	$Q$	$P \wedge Q$
F	F	F	或	0	0	0
F	T	F		0	1	0
T	F	F		1	0	0
T	T	T		1	1	1

**例 1.3** 令  $P$  表示: 外面正在下雪。

令  $Q$  表示: 3 小于 5。

于是  $P \wedge Q$  表示: 外面正在下雪并且 3 小于 5。

从自然语言看, 上述命题是不合理的、没有意义的, 因为  $P$  和  $Q$  毫不相关。但是, 在数理逻辑中是被允许的, 也是正确的。  $P$  和  $Q$  再合取  $P \wedge Q$  仍可成为一个新的命题。只要  $P$  和  $Q$  的真值给定,  $P \wedge Q$  的真值即可确定。

逻辑联结词“ $\wedge$ ”是个二元运算符,且具有对称性,即  $P \wedge Q$  和  $Q \wedge P$  具有相同真值。

### 3. 逻辑联结词析取—— $\vee$

设  $P$  是一个命题, $Q$  是一个命题,由联结词  $\vee$  把  $P$ 、 $Q$  连接成  $P \vee Q$ ,称  $P \vee Q$  为  $P$ 、 $Q$  的析取式复合命题,读作“ $P$  或  $Q$ ”或“ $P$  析取  $Q$ ”。

其真值是这样的定义的:当且仅当  $P$  和  $Q$  的真值均为  $F$  时, $P \vee Q$  的真值为  $F$ ,其余情况均为  $T$ 。逻辑联结词“ $\vee$ ”的定义如表 1.3 所示。

表 1.3 逻辑联结词“ $\vee$ ”的定义

$P$	$Q$	$P \vee Q$		$P$	$Q$	$P \vee Q$
F	F	F	或	0	0	0
F	T	T		0	1	1
T	F	T		1	0	1
T	T	T		1	1	1

联结词  $\vee$  是自然语言中“或”、“或者”的逻辑抽象。而在自然语言中,“或”是多义的。从析取的定义不难看出,逻辑联结词“ $\vee$ ”和自然汉语中的“或”的意义并不完全相同。因为汉语中的“或”可表示“排斥或”,亦可表示“可兼或”,而逻辑联结词“析取”指的仅仅是“可兼或”,并不表示其他意义的“或”。

**例 1.4** 令  $P$  表示:小明现在正在睡觉。

令  $Q$  表示:小明现在正在打球。

则命题“小明现在正在睡觉或者正在打球”不能用  $P \vee Q$  来表示。因为这里自然语言陈述的或是排斥或,这种意义的或用另一个逻辑联结词“异或”( $\nabla$ )来表示,后面我们将给出它的定义。

**例 1.5** 将句子“他昨晚做了 20 或者 30 道作业题”表示为复合命题。

在此例中,该句子不能被表示成复合命题,因为这里的“或”表示的是近似或者猜测的意思。

**例 1.6** 令  $P$  表示:张亮是跳高运动员。

令  $Q$  表示:张亮是跳远运动员。

于是命题,张亮可能是跳高或跳远运动员就可以用  $P \vee Q$  来表示,因为这里的或是可兼或。

逻辑联结词析取也是个二元运算符。

### 4. 逻辑联结词单条件—— $\rightarrow$

设  $P$  是一个命题, $Q$  是一个命题,由联结词  $\rightarrow$  把  $P$ 、 $Q$  连接成  $P \rightarrow Q$ ,称  $P \rightarrow Q$  为  $P$ 、 $Q$  的条件式复合命题,把  $P$  和  $Q$  分别称为  $P \rightarrow Q$  的前件和后件,或者前提和结论。 $P \rightarrow Q$  读作“如果  $P$  则  $Q$ ”或“如果  $P$  那么  $Q$ ”。其中  $P$  被称为前件, $Q$  被称为后件。很多时候联结词  $\rightarrow$  也被称为蕴涵。

$P \rightarrow Q$  的真值是这样定义的:当且仅当  $P \rightarrow Q$  的前件  $P$  的真值为  $T$ ,后件  $Q$  的真值为  $F$



时,  $P \rightarrow Q$  的真值为 F, 否则,  $P \rightarrow Q$  的真值为 T。单条件逻辑联结词“ $\rightarrow$ ”的定义如表 1.4 所示。

表 1.4 逻辑联结词“ $\rightarrow$ ”的定义

$P$	$Q$	$P \rightarrow Q$		$P$	$Q$	$P \rightarrow Q$
F	F	T	或	0	0	1
F	T	T		0	1	1
T	F	F		1	0	0
T	T	T		1	1	1

**例 1.7**

(1) 令  $P$  表示: 天不下雨。

令  $Q$  表示: 植物枯萎。

于是  $P \rightarrow Q$  表示: 如果天不下雨, 则植物枯萎。

(2) 令  $R$  表示: 我有时间。

令  $S$  表示: 我一定去学画画。

于是  $R \rightarrow S$  表示: 如果我有时间, 那我一定去学画画。

(3) 令  $U$  表示: 大海的颜色是蓝色的。

令  $V$  表示: 雪的颜色是白色的。

于是  $U \rightarrow V$  表示: 如果大海的颜色是蓝色的, 那么雪的颜色是白色的。

此例中(1)和(2)是有因果关系的, 而(3)在自然科学中毫无道理。在自然语言中, 条件式的前提和结论之间必含有某种因果关系, 但是在命题演算中, 一个单条件逻辑联结词的前件并不需要联系到它的后件, 它给出的是一种实质性的因果关系, 而不单单是形式上的因果关系。也就是说只要前件  $P$  和后件  $Q$  的真值确定下来, 命题  $P \rightarrow Q$  的真值就可以确定。

**例 1.8**

(1) 令  $P$  表示: 发现大自然的奥秘。

令  $Q$  表示: 勤于思考。

于是  $P \rightarrow Q$  表示: 只有勤于思考, 才能发现大自然的奥秘。

(2) 令  $P$  表示: 付出努力。

令  $Q$  表示: 会有收获。

于是  $P \rightarrow Q$  表示: 只要付出努力, 就会有收获。

(3) 令  $P$  表示: 能获得好成绩。

令  $Q$  表示: 用认真的态度对待学习。

于是  $P \rightarrow Q$  表示: 除非你用认真的态度对待学习, 你才能获得好成绩。

逻辑联结词单条件是个二元运算符。

**5. 逻辑联结词双条件—— $\leftrightarrow$** 

设  $P$  是一个命题,  $Q$  是一个命题, 于是联结词  $\leftrightarrow$  把  $P, Q$  连接成  $P \leftrightarrow Q$ , 称  $P \leftrightarrow Q$  为  $P$  和