自主创新
方法先行

伴你学数学

——线性代数及其应用导学

（第二版）

李乃华　徐　立　耿峤峙　编

高等教育出版社

自主创新
方法先行

伴你学数学

BANNI XUE SHUXUE
XIANXING DAISHU JIQI YINGYONG DAOXUE

——线性代数及其应用导学

（第二版）

李乃华　徐　立　耿峤峙　编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是与李乃华等编著的高等教育出版社出版的《线性代数及其应用（第二版）》配套的导学教材。

全书分为五章，内容包括行列式，矩阵，向量 线性方程组，矩阵的对角化及二次型。每一章通过课前预习导引，整理、归纳和提升，帮助与提高及走进数学四个模块实现“翻译”、“梳理”、“答疑解惑”、“启发开拓”四项功能。内容顺序的编排，既注意到了与教材的同步性，又注意到了学习者使用的方便性，可以与教材同步使用，也可以独立使用。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数及其应用导学/李乃华，徐立，耿峤峙编．--2版．--北京：高等教育出版社，2016.9
（伴你学数学）
ISBN 978-7-04-045932-6

Ⅰ．①线… Ⅱ．①李… ②徐… ③耿… Ⅲ．①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ．①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 176547 号

策划编辑 贾翠萍 责任编辑 贾翠萍 封面设计 张 楠 版式设计 范晓红
插图绘制 邓 超 责任校对 吕红颖 责任印制 耿 轩

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　　刷	大厂益利印刷有限公司		http://www.hepmall.com
开　　本	787mm×960mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印　　张	23.75	版　　次	2012年8月第1版
字　　数	430千字		2016年9月第2版
购书热线	010-58581118	印　　次	2016年9月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　　价	37.00元

物 料 号 45932-00

编者的话

根据国家新一轮高校分类办学和建设应用技术型高校的需要,如何编写一部适合应用技术型高校的概率论与数理统计教材,一直是我们这类应用技术型高校教师在积极思考的课题。我们的教师在教学的过程中一直都在不断探索此类应用型教材的实现形式,总感觉到目前的教材在使用中存在一些问题,如数学推理过多,理论过于深奥,而应用方面讲得不够透彻等。在高等教育大众化的背景下,学生的数学能力相对不足,有些数学问题即使讲了作用也不大,而学生在以后的专业学习或实际工作当中所需要的解决本学科问题的应用统计方法却讲得少之又少,应用例子不够具体,更没有应用案例引导学生如何应用所学知识去解决实际问题,甚至因为课时不断缩减,大部分课时都放在了前面的概率论部分,统计方法部分的课时往往安排较少。在学习的过程中学生往往不知道概率统计的理论从何而来,有何用,如何用,学了以后也不知道如何应用概率统计的理论去理解和解决实际问题,如何在后续的课程中应用概率统计的理论和方法解决本学科的问题。学生难听懂,教师不知如何教。这些都是很多教师在概率论与数理统计课程教学中经常碰到的困惑。

研究型高校培养的是学术型人才,着重知识创新,而应用技术型高校培养的是应用技术型人才,重视的是技术创新,人才的能力结构,应由知识体系向技术体系转变。所以我们教材编写的指导思想是:淡化理论、强化应用、对接专业。本书的编写过程融合了编者从事概率论与数理统计教学实践二十多年,以及承担一些国家、省部级科研课题的研究过程中对一些应用问题的心得体会,根据这门课程的基本特点和在理、工、经、管等学科教学及实际应用的需要,对教材内容进行了精选和合理安排。首先,对于每个主要的理论问题或概念,我们尽量尝试说明引入的背景,讲清该问题从何而来(说明为什么要学),用到何处去(回答有什么用),方便学生理解概念。对于一些比较复杂的数学定义、定理通过引例引入,代替定理证明,尽量使学生学起来容易一些。当然,作为一门数学课程,如果一点数学理论都不涉及,也就不成为一门数学课了,如何处理这个问题教师也要在教学实践中加以注意,做好平衡。简单的数学理论还是要介绍,较为复杂的数学理论可以通过例子引入。

为了使学生清楚每一章的学习目的和要求,我们在每一章的开头列出了该章导学:说明该章必须了解和掌握的基本内容,方便学生按要求掌握。在每一章的后面通过一两个应用案例介绍该章知识的具体应用方法。在各章的结束部

分，提供了该章的一个知识网络图，方便读者了解该章各基本概念、基本理论和方法之间的内在联系，形成知识系统，以便牢固掌握所学知识体系。

本书主要为应用技术型高校非数学类专业教学编写，当然也可以供各类需要提高数学素养和能力的专业技术和管理人员使用，教材主要内容包括：随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、样本及抽样理论、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析等。

本书由曾凡平、黎协锐、秦斌主编，由屈思敏、李成群担任副主编，其他参加编写的人员有：冯烽、涂火年、宁良烁、唐沧新、陈颖。全书由黎协锐负责修改和定稿。

本书在编写过程中得到了广西财经学院信息与统计学院农卓恩教授的大力支持，在此深表感谢！

全书内容的讲授约需68学时，可以根据实际情况作适当增删，缩减为48学时，如第三章多维随机变量及其分布可只作简单介绍，方差分析与回归分析可以只选一章讲授。公式与定理的推导证明，也可以不全部讲授，以适应数学类课程学时数不断缩短的现实。

由于编者业务水平有限，时间比较仓促，错误或不当之处在所难免，恳请使用本书的教师和同学以及广大读者提出宝贵意见，以便今后改正。

曾凡平　黎协锐　秦　斌

2015年3月

目　录

绪　论

一、 课程的性质、地位和任务要求

概率论与数理统计是一门研究随机现象统计规律性和随机数据处理技术的数学分支，在高等学校的教学计划中属于基础理论课，也是部分理、工、经、管等专业，诸如保险实务、金融保险、风险管理与保险、保险管理、投资与理财、金融管理等专业必修的专业基础课.概率论与数理统计主要以高等数学(微积分)和线性代数等作为工具研究随机现象.如求极限、导数、积分等是常用的方法，还有线性代数的矩阵、解方程组等.通过本课程的学习使学生掌握一些必要的概率论与数理统计方面的基本知识和基本概念，了解数理统计的基本理论和基本思想，从而使学生掌握一些最常用的处理随机现象(随机数据)的数理统计方法，培养学生使用概率统计方法分析和解决实际问题的能力，为以后的专业课学习打下必要的基础和掌握在实际应用中必要的基本工具.随着计算机技术的发展和广泛应用，以前各种计算量非常大的很难在实际中应用的概率统计方法，由于各种统计软件的研发使得它的应用已经相当方便和普及，成为各类技术和管理人员在实际工作中必须掌握的基本工具.在美国，所有大学一年级的学生必修的一门课程就是概率统计.目前，在国内，“概率论与数理统计”也是高等学校很多非数学类的理、工、农、经、管等专业的三门核心数学课程之一.掌握一些基本的统计理论和方法已经成为一名技术和管理人员的基本素养.

二、 本学科发展的历史、现状和趋势

有人认为概率统计起源于赌博，因为赌博中充满着不确定性，赌徒们总想了解其中蕴含着的某种规律性，确保自己在博弈中能赢的机会更大.但以概率论为基础，以统计推断为主要内容的现代统计也就是概率统计，到 20 世纪才逐渐发展成熟.数理统计与概率论两个学科有着密切联系，以至于我们把它们并排在一起统称为概率论与数理统计，这是因为数理统计所考察的数据都带有随机性(偶然性)，要利用这些随机数据作出统计推断，就必须借助于概率论的概念和方法.

讲到概率统计史，不得不提到德国的数学王子高斯(Gauss，1777—1855)，正是他给出了概率统计最核心的一个概率分布——正态分布，可以说，没有高斯和正态分布就没有概率统计今天的辉煌.高斯的头像和正态分布曲线甚至成为了德国 10 马克纸币上的头像和图案，这在世界科学界都是绝无仅有的.而英国数

学家贝叶斯(Bayes,1701—1761)首先将归纳推理法用于概率论基础理论,并创立了贝叶斯统计理论,对于统计决策函数、统计推断、统计的估算等做出了贡献,他于1763年发表了这方面的论著,对于现代概率论和数理统计都有很重要的作用.卡尔·皮尔逊(Karl Pearson,1857—1936),英国数学家,是现代统计科学的创立者,他在生物学家高尔登(Galton,1822—1911)和韦尔顿(Weldon,1860—1906)的影响下,从19世纪90年代初开始进军生物统计学,他不断运用统计方法对生物学、遗传学、优生学做出贡献.同时,他在其先辈们关于赌博机遇的概率论研究的基础上,导入了许多新的概念,把生物统计方法提炼为处理统计资料的通用方法,发展了统计方法论,把概率论与统计学两者熔为一炉,他被公认是“旧派理学派和描述统计学派的代表人物”,并被誉为“现代统计科学的创立者”.伯恩斯坦(Bernstein,1880—1968),俄国数学家,在概率论方面,他是最早(1917年)提出概率论的公理化结构的数学家之一,另一位苏联的数学家柯尔莫哥洛夫(Andrey Nikolaevich Kolmogorov,1903—1987)在世界上首次以测度论和积分论为基础建立了概率论的公理结构.在公理化的基础上,现代概率论取得了一系列理论突破,从而使概率统计成为一门严谨的数学学科.伯恩斯坦与莱维(Lévy,1886—1971)共同开创了相关随机变量之和依概率收敛问题的研究.1917年他们得到了相当于独立随机变量之和的中心极限定理,其特点是把独立性换为渐近独立性.从1922年起,他又着手研究一些应用的实例,诸如马尔可夫(A. A. Markov,1856—1922)单链成果的推广等.费希尔(R. A. Fisher,1890—1962),英国统计学家,是现代统计学的鼻祖.在20世纪20和30年代,费希尔提出了许多重要的统计方法,他给出了方差分析的原理和方法,并应用于试验设计,阐明了最大似然方法和随机化、重复性和统计控制的理论,此外还阐明了各种相关系数的抽样分布,亦进行过显著性测验研究.1946年,瑞典数学家克拉默尔(Cramer,1893—1985)的著作《统计学的数学方法》,利用测度论系统总结了数理统计的发展,标志着数理统计学的成熟.

概率论与数理统计在近年来有所发展,但理论突破不大,最引人注目的是它的普及和广泛应用,它几乎渗透到一切学科之中,哪里有试验,哪里有数据,哪里就少不了数理统计,它已经成为现代最基本的工具之一,没有数理统计就无法应对大量的数据和信息,特别是在当今这个大数据时代,数理统计还将为社会的进步作出更大的贡献.

三、 学习方法和建议

概率论与数理统计是一门非常独特的数学学科,其内容和思想与其他数学学科有很大的不同,不能把高等数学的学习方法照搬到概率统计的学习上来,而

应按照概率统计自身的特点提出学习方法，才能取得事半功倍的效果.

1. 学习概率论要注意以下几个要点

（1）在学习概率论的过程中要抓住对概念的引入和背景的理解，例如为什么要引进随机变量这一概念. 这实际上是一个抽象过程. 正如小学生最初学数学时总是1个苹果加2个苹果等于3个苹果，然后抽象为 $1+2=3$. 对于具体的随机试验中的具体随机事件，可以计算其概率，但这毕竟是局部的，孤立的，能否将不同随机试验的不同样本空间予以统一，并对所有随机试验进行刻画？随机变量 X（即从样本空间到实轴的单值实函数）的引进使原先不同随机试验的随机事件的概率都可转化为随机变量落在某一实数集合 B 的概率，不同的随机试验可由不同的随机变量来刻画. 此外若对一切实数集合 B，知道 $P(X\in B)$，那么随机试验的任一随机事件的概率也就完全确定了. 所以我们只需求出随机变量 X 的分布 $P(X\in B)$，就对随机试验进行了全面的刻画. 它的研究成了概率论的研究中心课题. 故而随机变量的引入是概率论发展历史中的一个重要里程碑. 类似地，概率公理化定义的引进，分布函数、离散型和连续型随机变量的分类，随机变量的数字特征等概念的引进都有明确的背景，在学习中要深入理解体会.

（2）在学习概率论过程中对于引入概念的内涵和相互间的联系和差异要仔细推敲，例如随机变量概念的内涵有哪些意义：它是一个从样本空间到实轴的单值实函数 $X(e)$，但它不同于一般的函数，首先它的定义域是样本空间，不同随机试验有不同的样本空间，而它的取值是不确定的，随着试验结果的不同可取不同值，但是它取某一区间的概率又能根据随机试验予以确定，而我们关心的通常只是它的取值范围，即对于实轴上任一区间 B，计算概率 $P\{X\in B\}$，即随机变量 X 的分布，只有理解了随机变量的内涵，下面的概念如分布函数等才能真正理解. 又如随机事件的互不相容和相互独立两个概念通常会混淆，前者是事件的运算性质，后者是事件的概率性质，但它们又有一定联系，如果 $P(A)\cdot P(B)>0$，则 A 与 B 相互独立时一定相容. 类似地，如随机变量的相互独立和不相关等概念的联系与差异一定要真正搞懂.

（3）搞懂了概率论中的各个概念，一般具体的计算都是不难的，如 $F(x)=P\{X\leqslant x\}$，$E(X)$，$D(X)$ 等按定义都易求得. 计算中的难点有古典概型和几何概型的概率计算，二维随机变量的边缘分布 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y$，事件 $(X,Y)\in B$ 的概率 $P\{(X,Y)\in B\}=\iint_B f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，卷积公式等的计算，它们形式上很简单，但是由于 $f(x,y)$ 通常是分段函数，真正的积分限并不再是 $(-\infty,+\infty)$ 或 B，这时如何正确确定事实上的积分限就成了正确解题的关键，要切实掌握.

（4）概率论中也有许多习题，在解题过程中不要为解题而解题，而应理解题

目所涉及的概念及解题的目的,至于具体计算中的某些技巧基本上在高等数学中都已学过. 因此概率论学习的关键不在于做许多习题,而要把精力放在理解不同题型涉及的概念及解题的思路上去. 这样往往能事半功倍.

2. 学习数理统计要注意以下几个要点

(1) 由于数理统计是一门实用性极强的学科,在学习中要紧扣它的实际背景,理解统计方法的直观含义,了解数理统计能解决哪些实际问题. 对如何处理抽样数据,并根据处理的结果作出合理的统计推断,该结论的可靠性有多少要有一个总体的思维框架,这样,学起来就不会枯燥而且容易记忆. 例如估计未知分布的数学期望,就要考虑到①如何寻求合适的估计量的途径? ②如何比较多个估计量的优劣? 这样,针对①按不同的统计思想可推出矩估计量和极大似然估计量,而针对②又可分为无偏估计、有效估计、相合估计,因为不同的估计名称有着不同的含义,一个具体估计量可以满足上面的每一个,也可能不满足. 掌握了寻求估计量的统计思想,具体寻求估计量的步骤往往是“套路子”的,并不困难,然而如果没有从根本上理解,仅死背“套路子”往往会出现各种错误.

(2) 许多同学在学习数理统计过程中往往抱怨公式太多,置信区间和假设检验表格多而且记不住. 事实上概括起来只有八个公式需要记忆,而且它们之间有着紧密联系,并不难记,而区间估计和假设检验中只是这八个公式的不同运用而已,关键在于理解区间估计和假设检验的统计意义,在理解基础上灵活运用这八个公式,完全没有必要死记硬背.

四、 概率论与数理统计的实际应用

概率论与数理统计作为一门处理随机数据的工具性的数学学科,其应用是非常广泛的,几乎渗透到了所有科学技术领域,如工业、农业、国防与国民经济的各个部门,可以说只要有数据的地方都需要统计方法. 例如,工业生产中,可以应用概率统计方法进行质量控制、工业试验设计、产品的抽样检查等. 还可使用概率统计方法进行气象预报、水文预报和地震预报等等. 另外,概率统计的理论与方法正在向各基础学科、工程学科、经济学科渗透,产生了各种边缘性的应用学科,如排队论、计量经济学、信息论、控制论、时间序列分析等.

例如:

(1) 气象、水文、地震预报、人口控制及预测都与概率论紧密相关;

(2) 产品的抽样验收,新研制的药品能否在临床中应用,均需要用到假设检验;

(3) 寻求最佳生产方案要进行试验设计和数据处理;

(4) 电子系统的设计、火箭卫星的研制与发射都离不开可靠性分析;

(5) 处理通信问题,需要研究信息论;

(6) 探讨太阳黑子的变化规律时,时间序列分析方法非常有用;

(7) 研究化学反应的时变率,要以马尔可夫过程来描述;

(8) 在生物学中研究群体的增长问题时提出了生灭型随机模型,传染病流行问题要用到多变量非线性生灭过程;

(9) 许多服务系统,如电话通信、船舶装卸、机器维修、病人候诊、存货控制、可用一类概率模型来描述,其涉及的知识就是排队论.

目前,概率统计理论进入其他自然科学领域的趋势还在不断发展. 在社会科学领域,特别是经济学中研究最优决策和经济的稳定增长等问题,都大量采用概率统计方法. 法国数学家拉普拉斯(Laplace)说对了:"**生活中最重要的问题,其中绝大多数在实质上只是概率的问题.**"英国的逻辑学家和经济学家杰文斯(Jevons,1835—1882)曾对概率论大加赞美:"**概率论是生活真正的领路人,如果没有对概率的某种估计,那么我们就寸步难行,无所作为.**"

第一章　随机事件与概率

本 章 导 学

概率论研究的对象是随机现象.随机事件和概率是概率论的两个最基本的概念.通过本章的学习要达到:

1. 理解随机现象的统计规律性,概率的定义和基本性质.
2. 掌握事件的运算法则和概率的加法、乘法公式.
3. 理解条件概率及独立性概念,会用全概率公式、贝叶斯公式.
4. 掌握古典概型及伯努利试验概型的有关的概率计算方法.

本章问题背景

自然界和社会上发生的现象是多种多样的,概括起来可分为两类现象:确定性的和不确定性的(或随机性的).例如:向上抛一石子必然下落;同性电荷相互排斥,异性电荷相互吸引;太阳必然从东方升起;水在通常条件下温度达到 100 ℃时必然沸腾,温度为 0 ℃时必然结冰等等,这类现象称为确定性现象,它们在一定的条件下一定会发生.另有一类现象,在一定条件下,有多种可能的结果,但事先又不能预测哪一种结果会出现,此类现象称为随机现象.例如:在相同条件下抛同一枚硬币,落地时面的朝向;用同一门炮向同一目标射击,弹着点的确切位置;测量一个物体的长度,其测量误差的大小;股票市场将来某时刻的指数;从一批电视机中随便取一台,电视机的寿命长短等都是随机现象.人们在长期的生产和生活实践中发现随机现象在一次试验或观察之前虽然不能预知确定的结果,但在大量的重复试验或观察下,其结果却呈现出某种规律性.例如,多次重复抛一枚硬币得到正面朝上大致有一半;同一门炮射击同一目标的弹着点按照一定规律分布等等.这种在大量重复试验或观察中所呈现出的固有规律称之为统计规律性.概率论与数理统计,就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科.

随机现象总是与一定的条件密切联系的.例如:某超市某柜台的营业额,指定的一天内,营业额多少是一个随机现象,而“指定的一天内”就是条件,若换成 5 天内,一个月内,营业额就会不同.如将营业额换成顾客流量,差别就会更大,故随机现象与一定的条件是有密切联系的.

第一节　样本空间、随机事件

▶ 本节引子

我们对客观世界现象的认识一般都是通过一定的观察或试验来实现的.有一类试验在非常接近的确定条件下基本上会得到相同的结果,比如一般意义下的物理、化学实验等.另一类试验即使大多数的条件是相同的,但每一次试验的结果都可能不相同,这种试验称为是随机的.分析概率论的创始人法国数学家拉普拉斯(Pierre-Simon Laplace,1749—1827)说:**生活中最主要的问题,其中绝大多数在本质上只是随机问题**.正是因为这种现象的普遍性,为概率论的研究提供了广阔空间.

一、 随机试验

基本概念及基本理论

人们是通过试验去研究随机现象的,在这里,我们把试验看作是一个广泛的术语,具体来说,若一个试验具有下列三个特点:

1° 可以在相同的条件下重复地进行;

2° 每次试验的可能结果不止一个,并且事先可以明确试验所有可能出现的结果;

3° 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现,则这一试验称为**随机试验**.简称试验,记为 E.

简单地说,对随机现象加以研究所进行的观察或试验都是随机试验.

下面是这种试验的一些例子:

E_1: 抛一枚硬币,观察正面 H 和反面 T 出现的情况;

E_2: 掷两颗骰子,观察出现的点数;

E_3: 在一批电视机中任意抽取一台,测试它的寿命;

E_4: 城市某一交通路口,指定一小时内的汽车流量;

E_5: 记录某一地区一昼夜的最高温度和最低温度;

E_6: 检查生产流水线上的一件产品是否合格;

E_7: 统计某商店某柜台一天的营业额.

二、 样本空间与随机事件

对于一个随机试验,尽管在每次试验之前不能预知试验的结果,但事先可以

明确试验所有可能出现的基本结果，这些结果满足：

1° 每进行一次试验，必然出现且只能出现其中的一个基本结果.

2° 任何结果，都是由其中的一些基本结果所组成.

样本空间：随机试验 E 的所有基本结果组成的集合称为**样本空间**，记为 Ω. 样本空间的元素，即 E 的每个基本结果，称为**样本点**.

下面写出前面提到的试验 $E_k(k=1,2,3,4,5,6,7)$ 的样本空间 Ω_k：

Ω_1：$\{H,T\}$；

Ω_2：$\{(i,j)\mid i,j=1,2,3,4,5,6\}$；

Ω_3：$\{t\mid t\geqslant 0\}$；

Ω_4：$\{0,1,2,3,\cdots\}$；

Ω_5：$\{(x,y)\mid T_0\leqslant x\leqslant y\leqslant T_1\}$，这里 x 表示最低温度，y 表示最高温度，并设这一地区温度不会小于 T_0 也不会大于 T_1；

Ω_6：$\{Y,N\}$，其中 Y 表示合格，N 表示不合格；

Ω_7：$\{q\mid q\geqslant 0\}$.

了解一个随机现象首先应知道其样本空间. 如果一个样本空间仅有有限个样本点，如 Ω_2，则称为有限样本空间. 如果有如 Ω_4 这样多的样本点，则称为可列的无限样本空间. 如果有一条数轴上一个区间这样多的样本点，比如 $1<x<2$，则称为非可列的无限样本空间. 当一个样本空间是有限的或可列的无限空间时，一般称为**离散样本空间**，而一个非可列的无限样本空间称为**非离散样本空间**.

随机事件：随机试验 E 的样本空间 Ω 的子集称为 E 的随机事件，简称**事件**，一般用大写字母 $A,B,C,\cdots$表示. 简单地说随机事件就是随机试验的每一个可能结果.

事件发生：在每次试验中，当且仅当一个事件 A 中的一个样本点出现时，称这一事件 A 发生.

例如，在掷骰子的试验中，可以用 A 表示“出现点数为奇数”$(=\{1,3,5\})$这个事件，若试验结果是“出现 3 点”，就称事件 A 发生. 同样，“出现 5 点”，事件 A 也发生.

特别地，由一个样本点（亦即基本结果）组成的单点集，称为**基本事件**. 例如，试验 E_1 有两个基本事件$\{H\}$、$\{T\}$；试验 E_2 有 36 个基本事件$\{(1,1)\},\{(1,2)\},\cdots,\{(6,6)\}$.

每次试验中都必然发生的事件，称为**必然事件**. 样本空间 Ω 包含所有的样本点，它是 Ω 自身的子集，每次试验中都必然发生，故它就是一个必然事件. 因而必然事件也用 Ω 表示. 在每次试验中不可能发生的事件称为**不可能事件**. 空集$\varnothing$不包含任何样本点，它作为样本空间的子集，在每次试验中都不可能发生，

故它就是一个不可能事件. 因而不可能事件也用$\varnothing$表示.

应用举例

例 1.1 (1) 设试验 E_1: 将一枚硬币抛两次,观察正反面出现的情况,用 0 表示反面,用 1 表示正面,样本空间为 $\Omega=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$,可绘成图 1-1 中的点,如(1,0)表示第一次正面第二次反面. 用 A_1 表示事件“恰出现一次正面”,则 $A_1=\{(0,1),(1,0)\}$,如图 1-1 中阴影部分的两个点.

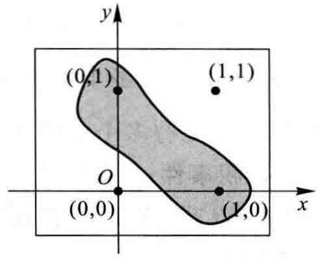


图 1-1

(2) 设试验 E_2: 在一批灯泡中任意抽取一只,测试它的寿命. A_2 表示“寿命小于 1 000 h”,即

$$A_2=\{t \mid 0 \leqslant t<1\ 000\}.$$

(3) 设试验 E_3: 记录某地一昼夜的最高温度和最低温度. 事件 A_3 表示“最高温度与最低温度相差 10 ℃以上”,即

$$A_3=\{(x,y) \mid y-x>10, T_0 \leqslant x \leqslant y \leqslant T_1\}.$$

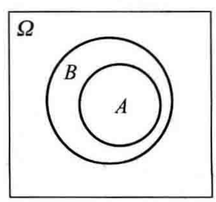
三、 事件之间的关系与运算

基本概念及基本理论

事件是一个集合,因而事件间的关系与事件的运算,可以用集合之间的关系与集合的运算来处理,但在这里要注意事件的概率论意义.

下面给出这些关系和运算在概率论中的提法,并根据事件发生的含义给出它们在概率论中的含义.

1. **包含关系**: 如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 A 包含于事件 B(或称事件 B 包含事件 A),记作 $A\subset B$(或 $B\supset A$). 见图 1-2.



$A\subset B$

图 1-2

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称事件 A 与 B **相等**(或等价),记为 $A=B$. 与集合论相似,规定对于任一事件 A,有$\varnothing\subset A$. 显然,对于任一事件 A,有 $A\subset\Omega$.

2. **和事件**: “事件 A 与 B 中至少有一个发生”的事件称为 A 与 B 的**和事件**,简称和,记为 $A\cup B$ 或 $A+B$,从集合论的角度就是 A 和 B 样本点的并集. 见图 1-3.

由事件和的定义,立即得到: