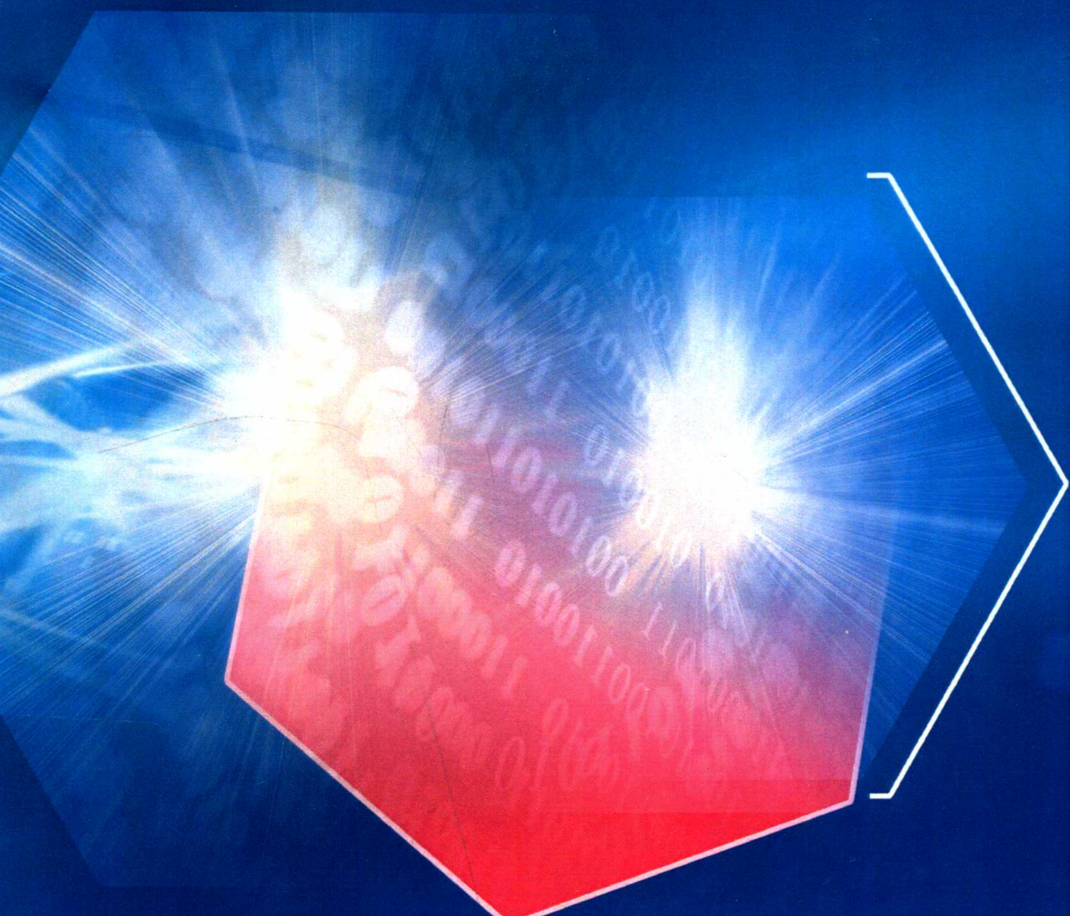
变分法与非线性椭圆型方程

焦玉娟 郭丽娜 著



科学出版社

变分法与非线性椭圆型方程

焦玉娟　郭丽娜　著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书应用变分法对无界区域上一些非线性椭圆型方程及方程组解的存在性和集中性进行研究. 这些方程及方程组源自理论物理、天体物理、等离子物理、流体力学、非线性弹性学等领域. 研究内容主要包括带电磁场位势的非线性 Schrödinger 方程组解的存在性和集中性，带位势的拟线性 Schrödinger 方程最小能量解的存在性以及一类拟线性椭圆型方程组解的存在性.

本书可作为偏微分方程、泛函分析专业及相关理科方向研究生的教材和参考书，也可供有关专业的教师和科技人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

变分法与非线性椭圆型方程/焦玉娟，郭丽娜著. —北京：科学出版社，2015.10

ISBN 978-7-03-045978-7

Ⅰ. ①变… Ⅱ. ①焦… ②郭… Ⅲ. ①变分法-研究 ②非线性椭圆型方程-研究 Ⅳ. ①O176②O175.25

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 243956 号

责任编辑：赵彦超 月庆家 / 责任校对：钟 洋

责任印制：徐晓晨 / 封面设计：迷底书装

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京厚诚则铭印刷科技有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015 年 10 月第 一 版 开本：720 × 1000 B5

2016 年 3 月第二次印刷 印张：7 1/4

字数：125 000

定价：48.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

许多物理现象和几何问题可以由一个或一组非线性椭圆型偏微分方程来描述. 这类方程解的存在性、多解性、集中性深受人们所关注. 我们知道很多椭圆型方程的解通常对应于某个泛函在适当函数空间的临界点. 因此, 变分方法结合临界点理论成了寻求解的主要方法之一. 开展对非线性椭圆问题解的存在性及集中性的研究不仅涉及理论物理等重要的应用领域, 同时也涉及偏微分方程、非线性分析等相关领域的最新知识.

1926 年, 奥地利物理学家 Erwin Schrödinger 在描述量子力学的波函数时引进了 Schrödinger 方程. 方程一经提出, 就得到了大量物理实验的验证, 为量子力学奠定了坚实的理论基础. Erwin Schrödinger 也因“发现了原子理论新的多产形式” (for the discovery of new productive forms of atomic theory) 于 1933 年和英国物理学家 Dirac 共同获得了诺贝尔物理学奖, 并被誉为量子物理学之父. 作为量子力学的奠基理论之一, Schrödinger 方程不仅受到物理学家们的关注与研究, 也是偏微分方程领域研究的重要对象.

非线性 Schrödinger 方程是一种典型的色散方程, 这类方程揭示了线性色散与非线性作用项之间的相互关系. 当非线性项起主导作用时, 波会坍塌 (collapse), 解在有限时间内爆破; 当线性色散与非线性项作用平衡时, 就形成局部化的有限能量解, 通常称为行波解; 当线性色散起主导作用时, 能量在空间扩散, 解整体存在, 并随着时间的发展渐近衰减.

一个典型的非线性 Schrödinger 方程形为

$$\mathrm{i}\hbar\psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(x)\psi - \gamma|\psi|^{p-1}\psi, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{0.0.1}$$

其中, i 是虚数单位, $\hbar$ 是 Planck 常数, $m > 0$, γ 是实常数, 当 $N \geqslant 3$ 时, $1 \leqslant p < (N+2)/(N-2)$, 当 $N = 1, 2$ 时, $1 \leqslant p < \infty$, 函数 $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ 称为位势. 通常人们感兴趣的一类解是行波解, 即形为 $\psi(x,t) = \exp(-\mathrm{i}Et/\hbar)\, v(x)$ 的解, 其中 E 是实常数, $v(x)$ 是实值函数. 这样 (0.0.1) 式化为

$$-\frac{\hbar^2}{2}\Delta v + (V(x) - E)v = \gamma|v|^{p-1}v, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{0.0.2}$$

近 30 年来, 许多注意力集中于方程 (0.0.2) 单包或多包解的存在性和集中性上. 例如, 在文献 [1] 中, 在 $\inf_{x\in\mathbb{R}^N} V(x) > E$ 的情形下, 对充分小的 $\hbar$, 应用 Lyapunov-Schmidt 约化, Floer 和 Weinstein 在一维空间中证明了方程 (0.0.2) 存在单包解, 且当 $\hbar \to 0$ 时, 单包解集中在 $V(x) - E$ 的非退化的临界点附近. Oh 在文献 [2−3] 中用类似的方法证明了方程 (0.0.2) 在高维的情形下存在多包解, 且当 $\hbar \to 0$ 时, 多包解集中在 $V(x) - E$ 几个非退化的临界点附近. 在 $\inf_{x\in\mathbb{R}^N} V(x) = E$ 的情形下, Byeon 和 Wang 在文献 [4−5] 研究了方程 (0.0.2) 的能量水平和正解的渐近性态. Cao 和 Noussair 在文献 [6] 推广了 Byeon 和 Wang 的结果, 证明了方程 (0.0.2) 存在多包解, 且当 $\hbar \to 0$ 时, 多包解集中在 $V(x) - E$ 几个孤立的连通零点集附近. 更多的结果, 请参见文献 [7 − 10] 及其参考文献.

本书主要关心带电磁场位势的非线性 Schrödinger 方程 (组) 和带位势的拟线性 Schrödinger 方程 (组) 单包或多包解的存在性和集中性. 下面分别介绍这两类方程 (组) 的研究进展.

带电磁场位势的非线性 Schrödinger 方程

$$-(\hbar\nabla + \mathrm{i}A(x))^2u(x) + V(x)u(x) = |u(x)|^{p-2}u(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{0.0.3}$$

单包或多包解的存在性引起了人们的广泛关注, 其中 i 是虚根单位, 当 $N \geqslant 3$ 时, $2 \leqslant p < 2N/(N-2)$, 当 $N = 1,2$ 时, $2 \leqslant p < \infty$, $A(x) = (A_1(x), A_1(x), \cdots, A_n(x)) : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$ 是电磁场向量位势, 函数 $V(x)$:

$\mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ 为标量电位势, $\hbar$ 是 Planck 常数, 当 $\hbar \to 0$ 时, 形成了从量子力学到经典力学的转变, 因此对小的 $\hbar$, 方程 (0.0.3) 的解有非常重要的物理意义. 对小的 $\hbar$, 其行波解通常称为半古典约束态. 对特殊类型的电磁场, 在空间维数 $N=2$ 和 $N=3$ 的情形下, 通过解对应能量泛函的极小化问题, Esteban 和 Lions 在文献 [11] 中证明了方程 (0.0.3) 解的存在性. 在函数 $A(x)$ 和 $V(x)$ 满足一定条件下, Kurata 在文献 [12] 中证明了方程 (0.0.3) 存在最小能量解. 应用拓扑度理论, 对小的 $\hbar>0$, Cingolani 在文献 [13] 中证明了方程 (0.0.3) 解的多重性. 进一步, Cingolani 和 Secchi 在文献 [14] 中证明了方程 (0.0.3) 存在单包约束态, 且当 $\hbar$ 趋于 0 时, 单包约束态集中在 $V(x)$ 的非退化临界点附近. Cao 和 Tang 在文献 [15] 中证明了: 当 $\hbar$ 趋于 0 时, 方程 (0.0.3) 集中在 $V(x)$ 的几个不同的非退化临界点附近多包约束态的存在性和唯一性. Liang 和 Zhang 在文献 [16] 中证明了具有临界非线性方程 (0.0.3) 行波解的存在性和多重性. 在适当的假设下, Li, Peng 和 Wang 在文献 [17] 中证明方程 (0.0.3) 存在无穷多个非径向的复值解.

在上面提到的文献中, 方程 (0.0.3) 的位势 $V(x)$ 满足 $V(x) \geqslant V_0 > 0$. 在 $V(x) \geqslant 0$ 的条件下, 当 $\hbar > 0$ 充分小时, Bartsch, Dancer 和 Peng 在文献 [18] 中证明了方程 (0.0.3) 存在多包半古典约束态, 且当 $\hbar \to 0$ 时, 多包半古典约束态集中在 $V(x)$ 局部极小值附近. Cingolani, Jeanjean 和 Secchi 在文献 [19] 中发展了文献 [18] 的结果, 在非线性项条件几乎最优的情形下得到了方程 (0.0.3) 多峰解的存在性.

设 $v(x) := u(\hbar x)$, (0.0.3) 式化为

$$-(\nabla + \mathrm{i}A(\hbar x))^2 v(x) + V(\hbar x)v(x) = |v(x)|^{p-2}v(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{0.0.4}$$

在文献[20]中, Tang 考虑了类似于方程 (0.0.4) 的带电磁场位势的非线性

Schrödinger 方程

$$-(\nabla+\mathrm{i}A(x))^2u(x)+(\lambda a(x)+1)u(x)=|u(x)|^{p-2}u(x),\quad x\in\mathbb{R}^N.\tag{0.0.5}$$

应用变分方法, 对大的 λ, Tang 证明了方程 (0.0.5) 存在最小能量解, 且当 $\lambda\to\infty$ 时, 最小能量解集中在位势井 int $a^{-1}(0)$ 的附近. Tang 把 Bartsch 和 Wang 在文献 [21] 中 $A(x)\equiv 0$ 的方程 (0.0.5) 解的存在性和集中性进行了推广.

受单个方程研究的启发, 在第 2 章, 我们分别考虑了方程 (0.0.5) 所对应的方程组最小能量解的存在性和集中性以及方程 (0.0.5) 所对应具有临界频率的方程组多包解的存在性和集中性.

近十几年来, 许多注意力集中于如下形式的拟线性 Schrödinger 方程:

$$-\Delta u+V(x)u-\Delta\left(u^2\right)u=|u|^{p-2}u,\quad x\in\mathbb{R}^N.\tag{0.0.6}$$

这种类型的拟线性 Schrödinger 方程通常称为修正的拟线性 Schrödinger 方程, 它的解与下述拟线性 Schrödinger 方程

$$-\mathrm{i}\partial_t z=-\Delta z+V(x)z-f(|z|^2)z-\kappa\Delta h(|z|^2)h'(|z|^2)z\tag{0.0.7}$$

的行波解有关, 其中, $V(x)(x\in\mathbb{R}^N)$ 是给定的位势, κ 是实常数, 函数 f,h 是实值函数. 对于 $\kappa=0$ 半线性的情形已经被广泛研究 [1,22]. 形为 (0.0.7) 式的拟线性方程更自然地出现在数学物理中, 根据不同类型的 h, (0.0.7) 式可作为不同物理现象的方程. 例如, 当 $h(s)=s$ 时, Kurihara 在文献 [23] 中把 (0.0.7) 式作为等离子物理中的超薄膜方程; 当 $h(s)=(1+s)^{1/2}$ 时, (0.0.7) 式作为物质中的高功率超短激光方程; 方程 (0.0.7) 也出现在流体力学理论的铁磁体和磁振子、耗散的量子力学以及凝聚态理论中等.

在文献 [24] 中, Liu, Wang 和 Wang 考虑了 $h(s)=s^\alpha, f(s)=\lambda s^{(p-1)/2}$ 且 $\kappa>0$ 的情形, 令 $z(x,t)=\exp(-\mathrm{i}Ft)u(x)$, 其中 F 为常数, (0.0.7) 式化

为

$$-\Delta u+V(x)u-\frac{1}{2}\left(\Delta(u^2)\right)u=\lambda|u|^{p-1}u,\quad x\in\mathbb{R}^N. \tag{0.0.8}$$

这里新的势函数 $V(x)$ 为 $V(x)-F$, 为了方便起见, 取 $\kappa=1/2$. 应用变分法, Liu, Wang 和 Wang 证明了方程 (0.0.8) 行波解的存在性. 通过约束极小化论证, 方程 (0.0.6) 正基态解的存在性被 Poppenberg, Schmitt 和 Wang 在文献 [25] 中所证明. 通过变量变换, 在 Orlicz 空间中, Liu, Wang 和 Wang 在文献 [26] 中应用山路定理证明了方程 (0.0.6) 孤立波解的存在性. Colin 和 Jeanjean 在文献 [27] 中也应用了变量变换, 但在 Sobolev 空间 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中证明了方程 (0.0.6) 正解的存在性, 这个正解是由 Berestycki 和 Lions 在文献 [22] 中给出的古典解.

在 Orlicz 空间中, 应用 Nehari 流行方法和集中紧性原理 [28], Guo 和 Tang 在文献 [29] 中考虑了如下方程:

$$-\Delta u+(\lambda a(x)+1)u-\frac{1}{2}\left(\Delta|u|^2\right)u=u^p,\quad u>0,\ x\in\mathbb{R}^N, \tag{0.0.9}$$

其中, $a(x)\geqslant 0$ 具有位势井, $4<p+1<2\cdot 2^*$, 证明了方程 (0.0.9) 存在基态解, 且当 λ 充分大时, 基态解集中在位势井 $\operatorname{int} a^{-1}(0)$ 附近.

基于 Liu, Wang 和 Wang[24] 的思想, 在第 3 章, 我们把方程 (0.0.9) 中的非线性项 u^p 推广到一般形式 $f(u)$, 在 $f(u)$ 满足适当的条件下, 证明了解的存在性和集中性.

在文献 [30] 中, Guo 和 Tang 也考虑了与 (0.0.9) 相对应的拟线性 Schrödinger 方程组:

$$\begin{cases}-\Delta u+(\lambda a(x)+1)u-\dfrac{1}{2}\left(\Delta|u|^2\right)u=\dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta}|u|^{\alpha-2}\cdot|v|^{\beta}u, & x\in\mathbb{R}^N;\\ -\Delta u+(\lambda b(x)+1)u-\dfrac{1}{2}\left(\Delta|u|^2\right)u=\dfrac{2\beta}{\alpha+\beta}|u|^{\alpha}\cdot|v|^{\beta-2}v, & x\in\mathbb{R}^N;\\ u(x)\to 0,\quad v(x)\to 0, & |x|\to\infty;\end{cases}$$

其中, $a(x)\geqslant 0$, $b(x)\geqslant 0$, $\alpha>2,\beta>2$, $\alpha+\beta<2\cdot 2^*$, 通过应用类似于文献 [29] 中的方法, 得到了与文献 [29] 相同的结果.

2013 年, 在文献 [31] 中, 应用扰动方法, Liu, Liu 和 Wang 证明了如下拟线性椭圆型方程

$$\sum_{i,j=1}^{N} D_j(a_{ij}(x,u)D_iu)-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} D_sa_{ij}(x,u)D_iuD_ju+f(x,u)=0,\quad x\in\Omega \tag{0.0.10}$$

解的存在性和多重性. 其中, $D_iu=\partial u/\partial x_i$, $D_sa_{ij}(x,u)=\partial a_{ij}(x,u)/\partial u$, $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ $(N\geqslant 3)$ 是一个有界的光滑区域. 当 $a_{ij}(x,u)=(1+u^2)\delta_{ij}$ 时, 其中 δ_{ij} 是 Kronecker 符号, 这个方程包含了所谓修正的非线性 Schrödinger 方程. 一个自然的问题是: (0.0.10) 式所对应的方程组是否具有解的存在性和集中性? 本书在第 4 章, 考虑了与 (0.0.10) 式相对应的一般形式拟线性椭圆型组, 在适当的条件下, 证明了其正解和负解的存在性.

本书的结构如下:

第 2 章分两部分, 第一部分研究带电磁场位势的非线性 Schrödinger 方程组:

$$\begin{cases}-(\nabla+\mathrm{i}A(x))^2u(x)+(\lambda a(x)+1)u(x)=\dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta}|u(x)|^{\alpha-2}\cdot|v(x)|^{\beta}u(x), & x\in\mathbb{R}^N;\\ -(\nabla+\mathrm{i}B(x))^2v(x)+(\lambda b(x)+1)v(x)=\dfrac{2\beta}{\alpha+\beta}|u(x)|^{\alpha}\cdot|v(x)|^{\beta-2}v(x), & x\in\mathbb{R}^N;\\ |u(x)|\to 0,\quad |v(x)|\to 0,\quad |x|\to\infty; \end{cases} \tag{0.0.11}$$

其中, 参数 $\lambda>0$, i 是虚数单位, $\alpha>1,\beta>1$, $\alpha+\beta<2^*$, 2^* 是临界的 Sobolev 指数, 当 $N\geqslant 3$ 时, $2^*=2N/(N-2)$, 当 $N=1,2$ 时, $2^*=+\infty$, 函数 $a(x)$ 和 $b(x)$ 是 $\mathbb{R}^N$ 上的非负连续函数, 向量函数 $A(x)=(A_1(x),A_2(x),\cdots,A_N(x))$ 和 $B(x)=(B_1(x),B_2(x),\cdots,B_N(x))$ 是实值电磁场向量位势, 分量 $A_j(x),B_j(x)(j=1,2,\cdots,N)$ 局部 Hölder 连续. 应用变分法, 我们证明方程 (0.0.11) 存在最小能量解 $(u_\lambda(x),v_\lambda(x))$, 且当 λ 充

分大时, $(u_\lambda(x),v_\lambda(x))$ 集中在位势井 $\text{int }a^{-1}(0)\bigcap\text{int }b^{-1}(0)$ 附近. 我们将文献 [20] 中的主要结果从单个方程推广到了方程组. 第二部分考虑如下带电磁场位势的非线性 Schrödinger 方程组:

$$\begin{cases}-(\nabla+\mathrm{i}A(x))^2u(x)+\lambda V(x)u(x)=\dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta}|u(x)|^{\alpha-2}\cdot|v(x)|^{\beta}u(x), & x\in\mathbb{R}^N;\\ -(\nabla+\mathrm{i}B(x))^2v(x)+\lambda W(x)v(x)=\dfrac{2\beta}{\alpha+\beta}|u(x)|^{\alpha}\cdot|v(x)|^{\beta-2}v(x), & x\in\mathbb{R}^N;\\ |u(x)|\to 0,\quad |v(x)|\to 0,\quad |x|\to\infty;\end{cases}\tag{0.0.12}$$

其中, 函数 $V(x)$ 和 $W(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}^N$ 上的非负连续实值函数, 且满足 $\liminf\limits_{|x|\to\infty}V(x)>0$, $\liminf\limits_{|x|\to\infty}W(x)>0$. 通过修正非线性项和应用下降流理论, 我们证明: 如果 $\Omega:=\text{int }V^{-1}(0)\bigcap\text{int }W^{-1}(0)$ 有几个孤立的连通部分 $\Omega_1,\Omega_2,\cdots,\Omega_k$ 使得对所有 $j\in\{1,2,\cdots,k\}$, Ω_j 的内部不空并且边界 $\partial\Omega_j$ 光滑, 那么对任意的非空子集 $J\subset\{1,2,\cdots,k\}$, 对充分大的 $\lambda>0$, 方程 (0.0.12) 存在解 (u_λ,v_λ), 而且对任意的序列 $\lambda_n\to\infty$, 存在一个子列, 仍然用 $\{\lambda_n\}$ 来表示, 使得 $(u_{\lambda_n},v_{\lambda_n})$ 在 $\Omega_j(j\in J)$ 中收敛到如下极限问题

$$\begin{cases}-(\nabla+\mathrm{i}A(x))^2u(x)=\dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta}|u(x)|^{\alpha-2}\cdot|v(x)|^{\beta}u(x), & x\in\Omega_j;\\ -(\nabla+\mathrm{i}B(x))^2v(x)=\dfrac{2\beta}{\alpha+\beta}|u(x)|^{\alpha}\cdot|v(x)|^{\beta-2}v(x), & x\in\Omega_j;\\ (u(x),v(x))\in H^{0,1}_{A,B}(\Omega_j)\end{cases}\tag{0.0.13}$$

的最小能量解 (u,v), 且在 $\bigcup\limits_{j\in J}\Omega_j$ 的外部收敛到 $(0,0)$.

第 3 章考虑具有位势的拟线性 Schrödinger 方程:

$$-\Delta u+(\lambda a(x)+1)u-\frac{1}{2}\left(\Delta|u|^2\right)u=f(u),\qquad x\in\mathbb{R}^N,\tag{0.0.14}$$

其中, 参数 λ 充分大, $N\geqslant 3$, 函数 $a(x)$ 是 $\mathbb{R}^N$ 中的非负连续函数. 在对非线性项 f 适当的假设下, 通过变量变换, 在 Orlicz 空间中, 应用变分法和集中紧性方法, 我们证明方程(0.0.14) 存在最小能量解 u_λ, 且当 λ 充分

大时, 最小能量解 u_λ 集中在位势井 $\operatorname{int} a^{-1}(0)$ 附近.

第 4 章考虑如下拟线性椭圆型方程组

$$\begin{cases}-\sum_{i,j=1}^{N} D_j(a_{ij}(x,u)D_iu)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} D_sa_{ij}(x,u)D_iuD_ju=\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}|u|^{\alpha-2}\cdot|v|^{\beta}u, & x\in\Omega;\\ -\sum_{i,j=1}^{N} D_j(b_{ij}(x,v)D_iv)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} D_sb_{ij}(x,v)D_ivD_jv=\frac{2\beta}{\alpha+\beta}|u|^{\alpha}\cdot|v|^{\beta-2}v, & x\in\Omega;\\ u=0,\quad v=0, & x\in\partial\Omega;\end{cases}\tag{0.0.15}$$

其中, $D_iu=\partial u/\partial x_i$, $D_sa_{ij}(x,u)=\partial a_{ij}(x,u)/\partial u$, $D_sb_{ij}(x,v)=\partial b_{ij}(x,v)/\partial v$, $\alpha>2,\ \beta>2$, $\alpha+\beta<2\cdot 2^*$, $\Omega\subset\mathbb{R}^N\ (N\geqslant 3)$是一个有界的光滑区域. 当 $a_{ij}(x,u)=(1+u^2)\delta_{ij},\ b_{ij}(x,v)=(1+v^2)\delta_{ij}$ 时, 其中 δ_{ij} 是 Kronecker 符号, 这个方程组包含了所谓的修正的非线性 Schrödinger 方程组, 即

$$\begin{cases}-\Delta u-\frac{1}{2}u\Delta\left(u^2\right)=\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}|u|^{\alpha-2}\cdot|v|^{\beta}u, & x\in\Omega;\\ -\Delta v-\frac{1}{2}v\Delta\left(v^2\right)=\frac{2\beta}{\alpha+\beta}|v|^{\alpha}\cdot|v|^{\beta-2}v, & x\in\Omega;\\ u=0,\quad v=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

应用扰动方法和山路定理, 我们证明方程 (0.0.15) 存在正解和负解.

本书适宜作为数学及相关专业人员的阅读材料和研究生学习的教材, 也可以作为青年教师进行深入研究的参考书.

本书是由西北民族大学引进人才科研资金项目 (项目编号: xbmuyjrc 201410) 资助. 本书在编写过程中, 得到了西北民族大学数学与计算机科学学院领导的关心, 许多老师和研究生也提供了宝贵的意见, 在此一并致谢. 最后, 也感谢我们的家人在写作过程中对我们的理解和巨大支持.
由于作者学识水平所限, 书中难免有错误和不足之处, 敬请读者予以批评指正.

作　者

2015 年 7 月 27 日

目　　录

第 1 章　预备知识

作为全书的预备知识, 本章主要介绍一些 Sobolev 空间的基本理论和临界点理论中的一些常用定理.

1.1　常用不等式和 Sobolev 空间理论

本节介绍偏微分方程理论中一些常用的不等式, Sobolev 空间的基本知识和临界点理论中的一些常用结果.

1.1.1　几个常用不等式

ε-Young 不等式　设 $\varepsilon > 0, p > 1, q > 1$, 且 $1/p + 1/q = 1$, 则不等式

$$|a||b| \leqslant \frac{\varepsilon|a|^p}{p} + \frac{\varepsilon^{-\frac{q}{p}}|b|^q}{q} \leqslant \varepsilon|a|^p + \varepsilon^{-\frac{q}{p}}|b|^q$$

成立. 特别地, 当 $p = q = 2$ 时, 称为 Cauchy 不等式.

设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N (N \geqslant 1)$ 为一可测集.

Hölder 不等式　设 $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, 且 $1/p + 1/q = 1$, 则对任意 $f \in L^p(\Omega), g \in L^q(\Omega)$, 不等式

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}$$

成立. 特别地, 当 $p = q = 2$ 时, 称为 Schwarz 不等式.

Minkowski 不等式　设 $1 \leqslant p$, 则对任意 $f, g \in L^p(\Omega)$, 不等式

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^q(\Omega)}$$

成立.

空间 $L^p(\Omega)$ 中的内插不等式 设 $1 \leqslant s \leqslant t \leqslant \infty$, 且 $1/r = \theta/s + (1-\theta)/t$. 假设 $u \in L^s(\Omega) \bigcap L^t(\Omega)$, 则 $u \in L^r(\Omega)$, 而且

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leqslant \|u\|_{L^s(\Omega)}^{\theta} \|u\|_{L^t(\Omega)}^{1-\theta}.$$

Gagliardo-Nirenberg 不等式 设 $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$, 两整数 j, m 满足 $0 \leqslant j < m$, 假定

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{N} + a\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{N}\right) + \frac{1-a}{q},$$

其中 $a \in [j/m, 1]$(如果对任意 $r > 1$ 且 $m - j - N/r = 0$, 取 $a < 1$). 存在 $C = C(N, m, j, a, q, r)$, 使得对任意 $u \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$, 不等式

$$\sum_{|\alpha|=j} \|\partial^{\alpha} u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leqslant C \left(\sum_{|\alpha|=m} \|\partial^{\alpha} u\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}\right)^{a} \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^{1-a}$$

成立.

1.1.2 Sobolev 空间理论

弱导数 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为一开集, $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. 如果存在 $g_i \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)(1 \leqslant i \leqslant N)$, 使得

$$\int_{\Omega} g_i \varphi \mathrm{d}x = -\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega),$$

则称 g_i 为 u 关于 x_i 的弱导数, 记为 $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$, 有时也记为 $D_i u = g_i$ 或者 $\partial_i u = g_i$. 如果对所有的 $1 \leqslant i \leqslant N$, u 关于 x_i 弱导数 g_i 都存在, 则称 $g = (g_1, g_2, \cdots, g_N)$ 为 u 的弱梯度, 记为 $\nabla u = g$, 有时也记为 $Du = g$ 或者 $\partial u = g$. 这时也称函数 u 是弱可微的. 类似地, 可引进 k 阶弱导数和 k 阶弱可微.

Sobolev 空间 $W^{k,p}(\Omega)$ 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为一开集, k 为非负整数, $p \geqslant 1$. 称集合

$$\left\{D^{\alpha} u \in L^p(\Omega) \middle| |\alpha| \leqslant k\right\}$$

赋以范数

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leqslant k} |D^\alpha u|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

后得到的线性赋范空间为 Sobolev 空间 $W^{k,p}(\Omega)$.

不难验证, $W^{k,p}(\Omega)$ 在上述范数意义下是一个 Banach 空间. 当 $p=2$ 时, 常将 $W^{k,p}(\Omega)$ 记作 $H^k(\Omega)$.

Sobolev 空间 $W_0^{k,p}(\Omega)$ 表示 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $W^{k,p}(\Omega)$ 中的闭包.

Sobolev 空间的一些性质:

性质 1 $W^{k,p}(\mathbb{R}^N) = W_0^{k,p}(\mathbb{R}^N)$; $W^{0,p}(\Omega) = W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$; 如果 Ω 不是全空间 $\mathbb{R}^N$, 则 $W_0^{k,p}(\Omega)$ 是 $W^{k,p}(\Omega)$ 的一个真子空间.

性质 2 $C^\infty(\Omega)\bigcap W^{k,p}(\Omega)$ 在 $W^{k,p}(\Omega)$ 中是稠密的.

性质 3 $W^{k,p}(\Omega)(1<p<\infty)$ 中的一集合为弱列紧 (即从其中任一序列内都能抽出弱收敛的子序列) 的充要条件是: 范数有界.

性质 4 (紧嵌入定理 [32]) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为一有界区域, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. 若 Ω 满足一致内锥条件, 则

当 $kp<n$ 时,

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leqslant q \leqslant \frac{np}{n-kp};$$

当 $kp=n$ 时,

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad 1 \leqslant q < +\infty;$$

当 $kp>n$ 时,

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^\alpha(\bar{\Omega}), \quad 0 < \alpha \leqslant 1 - \frac{n}{kp}.$$

1.1.3 临界点理论

本节不加证明地给出临界点理论中的一些知识.

引理 1.1.1 (Ekeland 变分原理[33, 34]) 设 M 是完备度量空间, 距离为 d, 泛函 $I(u): M \to \mathbb{R}, I(u) \neq +\infty$, I 是下有界的的下半连续泛函, 则对任意的 $\varepsilon > 0$ 和 $u_0 \in M$, 存在 $v \in M$, 使得对任意的 $w \in M$, 有

(1) $I(w) - I(v) + \varepsilon d(w, v) \geqslant 0$;

(2) $I(v) \leqslant I(u_0) - \varepsilon d(u_0, v)$.

引理 1.1.2(山路定理[35]) 设 X 是 Banach 空间, 泛函 $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, 存在 $e \in X$ 和 $r > 0$, 使得 $\|e\| > r$, 且

$$b := \inf_{\|u\|=r} I(u) > I(0) \geqslant I(e),$$

则对每个 $\varepsilon > 0$, 存在 $u \in X$, 使得

(1) $c - 2\varepsilon \leqslant I(u) \leqslant c + 2\varepsilon$;

(2) $\|I'(u)\| < 2\varepsilon$;

其中

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)),$$

且

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], X) | \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

引理 1.1.3 (P. L. Lions 引理[35]) 设 $r > 0$, $2 \leqslant q < 2^*$, 如果 $\{u_n\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中有界, 而且

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B(y,r)} |u_n|^q \mathrm{d}x \to 0, \quad n \to \infty,$$

那么在 $L^p(\mathbb{R}^N)(2 < p < 2^*)$ 中 $u_n \to 0$.

引理 1.1.4 (Brézis-Lieb 引理[35]) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的一个有界开子集, $\{u_n\} \subset L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$, 如果

(1) $\{u_n\}$ 在 $L^p(\Omega)$ 中有界;