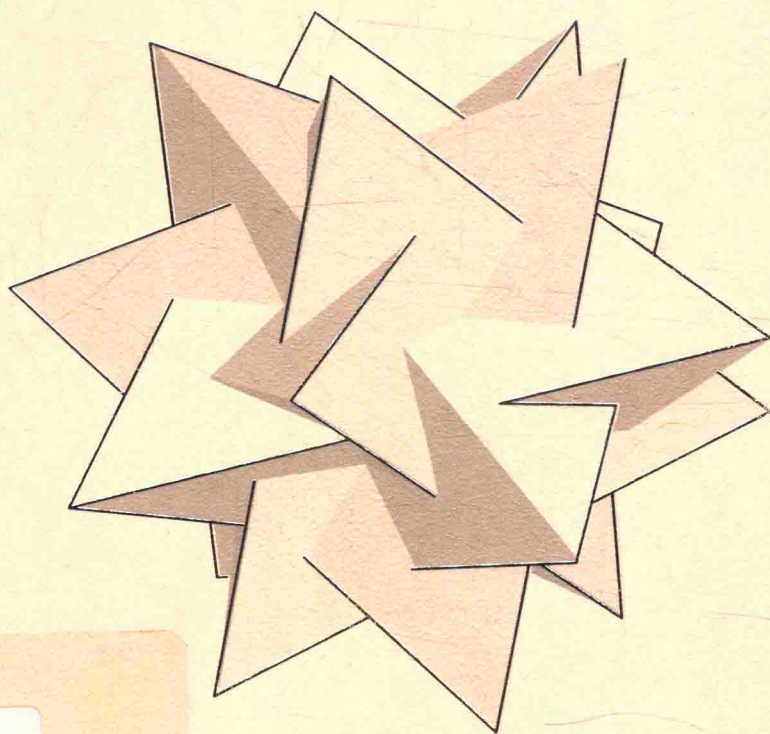


通俗数学名著译丛

Recreations in the Theory of Numbers The Queen of Mathematics Entertains

数论妙趣

——数学女王的盛情款待



【美】阿尔伯特·H·贝勒 著 谈祥柏 译

上海教育出版社

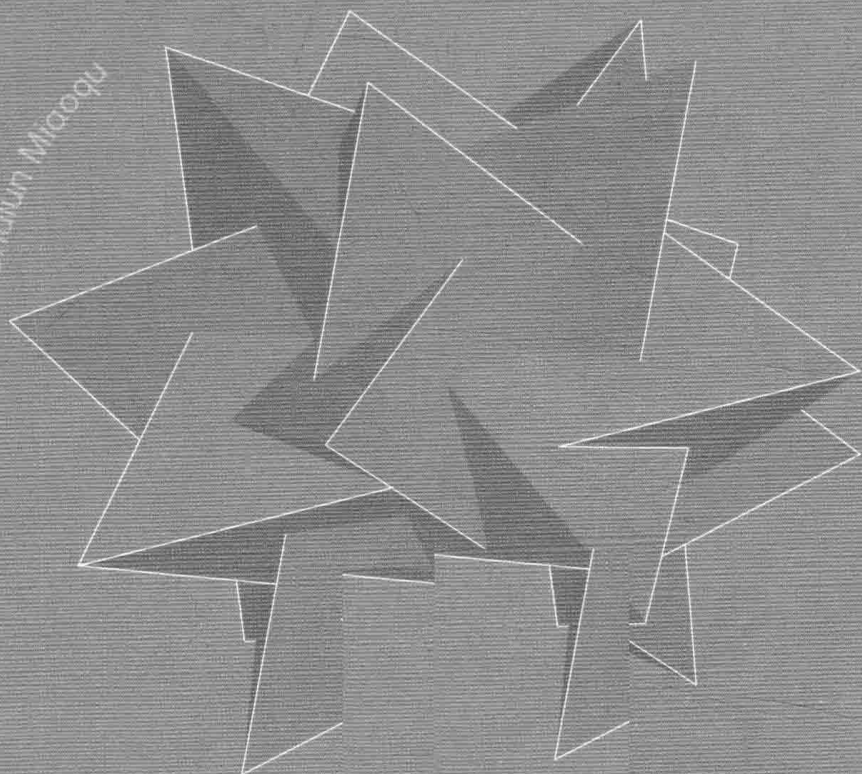


数论妙趣

——数学女王的盛情款待

【美】阿尔伯特·H. 贝勒 著 谈祥柏 译

Shulun Miaoqu



上海教育出版社
SHANGHAI EDUCATIONAL
PUBLISHING HOUSE

Recreations in the Theory of Numbers
Copyright©1964 by Albert Beiler
Translated with permission by Dover Publications,Inc.

图书在版编目(CIP)数据
数论妙趣:数学女王的盛情款待 / (美)贝勒著;谈祥柏译.
—上海:上海教育出版社,2015.12
(通俗数学名著译丛)
ISBN 978-7-5444-6788-9

I. ①数... II. ①贝... ②谈... III. ①数论—普及读物
IV.①0156-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第302981号

通俗数学名著译丛
数论妙趣
——数学女王的盛情款待
[美]阿尔伯特·H.贝勒 著
谈祥柏 译

出 版	上海世纪出版股份有限公司 上 海 教 育 出 版 社 易文网 www.ewen.co
地 址	上海市永福路 123 号
邮 编	200031
发 行	上海世纪出版股份有限公司发行中心
印 刷	上海景条印刷有限公司
开 本	700×1000 1/16 印张 26.75 插页 3
版 次	2015 年 12 月第 1 版
印 次	2015 年 12 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978-7-5444-6788-9/O·0157
定 价	68.00 元

(如发现质量问题,读者可向工厂调换)

上海“十二五”重点图书出版规划项目
上海文化发展基金会图书出版专项基金资助项目

通俗数学名著译丛

主编：李文林 史树中

编委：（按姓氏笔画）

叶其孝 任南衡

赵 斌 胡作玄

袁向东 谈祥柏

惠昌常

大哉言數

引自周髀算經中周公之語白

乙未王元



译丛序言

数学, 这门古老而又常新的科学, 正处于一个空前繁荣又充满挑战的新纪元.

回顾过去的世纪, 数学科学的巨大发展, 比以往任何时代都更牢固地确立了它作为整个科学技术的基础的地位, 数学正突破传统的应用范围向几乎所有的人类知识领域渗透, 并越来越直接地为人类物质生产与日常生活作出贡献. 同时, 数学作为一种文化, 已成为人类文明进步的标志. 因此, 对于当今社会每一个有文化的人士而言, 不论他从事何种职业, 都需要学习数学, 了解数学和运用数学. 现代社会对数学的这种需要, 在未来的世纪中无疑将更加与日俱增.

另一方面, 20 世纪数学思想的深刻变革, 已将这门科学的核心部分引向高度抽象化的道路. 面对各种深奥的数学理论和复杂的数学方法, 门外汉往往只好望而却步. 这样, 提高数学的可接受度, 就成为一种当务之急. 事实上, 世界各国都十分重视并大力加强数学的普及工作, 国际数学联盟(IMU)还曾专门将 2000 年定为“世界数学年”, 其主要宗旨就是“使数学及其对世界的意义被社会所了解, 特别是被普通公众所了解”.

一般说来, 一个国家数学普及的程度与该国数学发展的水平相应并且是数学水平提高的基础. 随着中国现代数学研究与教育的长足进步, 数学普及工作在我国也受到重视. 早在 20 世纪 60 年代, 华罗庚、吴文俊等一批数学家亲自动手撰写的数学通俗读物, 激发了一代青少年学习数学的兴趣, 影响绵延至今. 改革开放以来, 我国数学界对传播现代数学又作出了新的努力. 但总体来说, 我国的数学普及工作与发达国家相比尚有差

距.我国数学要率先赶超世界先进水平,数学普及与传播方面的赶超乃是一个重要的环节和迫切的任务.为此,借鉴外国的先进经验是必不可少的.

《通俗数学名著译丛》的编辑出版,正是要通过翻译、引进国外优秀数学科普读物,推动国内的数学普及与传播工作,为我国数学赶超世界先进水平的跨世纪工程贡献力量.丛书的选题计划,是出版社与编委会在对国外数学科普读物广泛调研的基础上讨论确定的.所选著述,基本上都是在海外已广为流传、受到公众好评的佳作.它们在内容上包括了不同的种类,有的深入浅出介绍当代数学的重大成就与应用;有的循循善诱启迪数学思维与发现技巧;有的富于哲理阐释数学与自然或其他科学的联系;等等,试图为人们提供全新的观察视角,以窥探现代数学的发展概貌,领略数学文化的丰富多彩.

丛书的读者对象,力求定位于尽可能广泛的范围.为此丛书中适当纳入了不同层次的作品,以使包括大、中学生;大、中学教师;研究生;一般科技工作者等在内的广大读者都能开卷受益.即使是对于专业数学工作者,本丛书的部分作品也是值得一读的.现代数学是一株分支众多的大树,一个数学家对于他所研究的专业以外的领域,也往往深有隔行如隔山之感,也需要涉猎其他分支的进展,了解数学不同分支的联系.

早在 20 世纪末,在国内科普译著出版并不景气的情况下,上海教育出版社以世界数学年为契机,按照国际版权公约,不惜耗资购买版权,组织翻译出版这套《通俗数学名著译丛》,实属富有远见的举措.多年来,这套译丛出版发行已有 30 余种,受到了公众的普遍欢迎,产生了良好的社会影响.当前,在我国大力提高全民族科学文化素养、强调科技创新驱动发展的新趋势下,上海教育出版社重新策划续编这套《通俗数学名著译丛》,跟进现代数学的步伐,适应科教强国的需求,无疑又赋予了译丛新的时代意义.参加本丛书翻译的专家学者们,自愿抽出宝贵的时间来进行

这类通常不被算作成果但却能帮助公众了解和欣赏数学成果的有益工作，同样也是值得肯定与提倡的。

像这样集中地翻译、引进数学科普读物，在国内仍不多见。我们热切希望广大数学工作者和科普工作者来关心、扶植这项工作，使《通俗数学名著译丛》的出版取得更大的成功。

让我们携手秉承世界数学年的精神和理念，让公众了解、喜爱数学，让数学走进千家万户！

《通俗数学名著译丛》编委会

序

当作者还是一个学生时，一位热心的数学教授向全班介绍了 W. W. R. 鲍尔(W. W. R. Ball)所写的一本书《数学游戏与欣赏》(*Mathematical Recreations & Essays*)。学生们顺从地记下了书名，绝大多数人无疑转眼就忘得干干净净。多年之后，当作者向自己几个班级的学生提到这本书时，学生们却出乎意外地对书名表示喜爱，并随之引发了一系列的质疑，“游戏”与“数学”是互相抵触的字眼，怎能合在一起呢？这是一群工科大学生的反应，他们对数学的熟练程度在平均水平之上，那么，对一大群并非出于自觉自愿，而是被迫学习数学的人，他们的态度又将如何呢？

尽管事先并不看好，结果发现，仅仅提到几个趣题，就立即使全班学生从出了名的厌学与昏睡中惊醒过来，同数论有关的一个问题竟导致非常热烈的反响以致学生们竟然不愿再回复他们的正常课业。这些问题的刺激力在全班持续了很长时间，为此，他们对代数、三角、解析几何、微积分的规定作业也增添了兴趣。它像是一种催化剂，本身虽然不参加化学反应，却把其他物质激活了。

对一些缺乏数学细胞的朋友(尽管如此，他们还是要曝晒在高中代数之下活活受罪)进行了相当谨慎的实验，引起的反响也同样令人满意，这就使作者产生了编写本书的想法。

一些数学家，例如 W. W. R. 鲍尔与 E. 卢卡(Lucas)等人曾写过质量一流的、一般题材的趣味数学读物；其他一些学者，例如托比亚斯·但捷格(Tobias Dantzig)，E. T. 贝尔(Bell)，爱德华·卡斯纳(Edward Kasner)则写过一些异常优秀的、介绍数学概念以及数学家传记之类的作品。但

是，在英文书里，却缺少一本专讲趣味数论的书，本书试图弥补这个缺陷，为大家提供一些趣味盎然的奇珍异宝。还可以在任何一个收藏着很多数学书刊的大图书馆里，找到隐藏在枯燥乏味的技术论文深层的、为数更多的宝贝。

数论之所以具有难以抗拒的魅力，其中很重要的一个原因是它的问题浅显易懂，但特别迷人。另外，它又并不需要过多的预备知识。只要掌握一般高中程度的数学基础知识，初学者即可登堂入室，理解它的许多重要内容。正像读过几部侦探小说的人会情不自禁地觉得自己已有了足够的本领，可以帮助警方侦破谋杀案一样，数论领域里的初学者身上很快就会长出伊卡鲁斯之翼^①，在原根与二次剩余中自由翱翔。

数学家卡尔·弗里德列希·高斯(Karl Friedrich Gauss)曾经说过：“高等算术中一些最美丽的定理具有这样的特性：它们极易从经验事实中归纳出来，但其证明却隐藏得极深，只有高人一等的研究者才能把它们挖掘出来。正是出于此种原因，赋予高等算术以神奇魅力，使之成为第一流数学家们最喜爱的科学。至于它远远凌驾于数学其他各分支之上的无限丰富性，那就更不必提了。”

作者经常遇到的两难处境是：究竟要不要讲一讲本书各个章节所涉及的理论知识，还是干脆将它删除？如果理论讲得太多，这本书就再无趣味可言。反之，理论说明往往同结果一样有滋味——有时甚至更好。基于这样一种考虑，本书还是收入了相当数量的理论性内容。读者可根据自己的爱好，或读或略。

一般地说，书中后面几章的内容要比前几章深奥一些，所以建议读者还是按照各章的先后顺序进行阅读。为了增加阅读兴趣，问题是星罗棋布地分散在各章之中的。如在问题之后未见答案，则它在第26章中总可

^① 伊卡鲁斯是希腊神话中的人物，他能用蜡造的翼高翔空中。后来，他在飞到太阳附近时，蜡制的翼受热融化，堕海而死。——译者注

以找到. 第 25 章专门列出了一百个问题, 它们的解答与解法提示也包含在最后一章之中.

梅桑数, 清一色的 $111\cdots 1$, 以及费马数(这些题材分别在第 3 章、第 11 章与第 17 章中阐述)的因子在近几年中又新发现了不少. 由于时间紧迫, 本书来不及将它们收入进去. 读者可参看《计算数学》杂志, 第 17 卷(1963 年)第 447、458 页.

阿尔伯特·H. 贝勒

1963 年写于纽约

献给
克利丝

数学是科学的女王，而算术则是数学的女王。

—— 卡尔·弗里特列希·高斯

以此短文作为前言的这本数学课本……与世上任何一本算术书都不一样. 书中没有很大的数目, 很大的数目……将对人们的想象能力施加不利影响, 有害于社交活动, 而又脱离实际. 它像是中了邪的恶魔, 不断发出有毒气体, 腐蚀与败坏了粉红色的大脑的正常运转.

这本书里头有着许许多多 7 与 3……7 与 3 很吸引人, 7 使我们称心如意……天上有七姐妹星团^①, 还有七座山, 七位苏德兰姐妹……[嫁给七兄弟的七位新娘].

——唐·马奎斯

“一本算术德育书的序言”

① 七姐妹星团即昴宿星团. ——译者注

CONTENTS | 目 录

- 第 1 章 宫廷亮相 /1
- 第 2 章 除数好散心 /7
- 第 3 章 完美无缺 /12
- 第 4 章 亲如手足 /30
- 第 5 章 大师的发明 /35
- 第 6 章 开门咒 /44
- 第 7 章 难解饥渴 /56
- 第 8 章 数字与 9 的魔术 /63
- 第 9 章 记数法乱弹琴 /77
- 第 10 章 循环到无穷 /83
- 第 11 章 $11111\cdots 111$ /95
- 第 12 章 欧拉函数 /101
- 第 13 章 古怪的对数——回复原始 /108
- 第 14 章 不朽的三角形 /121
- 第 15 章 平方奇观 /155
- 第 16 章 法莱数列 /192
- 第 17 章 等分圆周 /198

第 18 章	球戏	/211
第 19 章	黄金定理	/229
第 20 章	争攀高峰	/241
第 21 章	分解	/263
第 22 章	佩尔方程	/283
第 23 章	形态学	/306
第 24 章	石城虎踞	/314
第 25 章	马上比武	/336
第 26 章	女王的讲解:问题的解答与提示	/348
索引		/397

第1章 宫廷亮相

趣题爱好者将会发现数论是大量赏心悦目而且无穷无尽的趣题之源. 这一领域被人捧为“数学之女王”(而数学本身则是“科学的女王”), 其中熠熠发光地闪耀着世上第一流数学家们奉献出来的智慧珍宝. 探索一些具有特殊性质的奇异数字有着一种不可抗拒的魔力, 一经投入其中, 人们即会对其魔法顶礼膜拜并最终理解何以有如此多的人愿意在此研究上投入大量时间. 在追求数论中的一些令人困惑的课题时, 再也没有比“生命短暂, 艺术长存”这句拉丁格言更加确切了.

为解决以下问题, 你是不是打算有所作为?

1. 求出数 16000001 的一切除数. †^①
2. 直角三角形的某一边之长为 48. 试写出十对正整数, 其中每一对是该直角三角形中另外两边之长. †
3. 小于 5929 且与之互素(又叫做互质)的正整数一共有多少? †
4. 试求出一个最小的, 完全由数字 3 与 7 构成的正整数, 此数以及其数字和均能被 3 与 7 整除. †

① 本书中标有†记号的问题, 其解法可参阅第 26 章.