应用型本科高校系列教材

经济数学——微积分

主　编　邹彪

副主编　菜芳　冯金华　李强　况山

西安电子科技大学出版社

http://www.xduph.com

应用型本科高校系列教材

经济数学——微积分

主　编　邹　彪

副主编　莱　芳　冯金华　李　强　况　山

参　编　张旭清　舒　康　肖　凯

　　　　夏先锋　沈洪兵

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书是根据应用型本科院校对数学课程的教学要求而编写的.

本书内容共分八章和五个附录，主要包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分和微分方程初步等内容. 本书中配有习题及部分参考答案，方便学生练习. 在教学过程中可根据要求对内容进行适当调整.

本书结构严谨，逻辑性强，讲述清晰，符合应用型本科院校学生的认知特点. 本书可作为应用型本科院校及成人高等教育经济管理类各专业的教学用书，也可作为在职经济管理人员和数学爱好者的自学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

经济数学：微积分/邹彪主编．—西安：西安电子科技大学出版社，2016.9

应用型本科高校系列教材

ISBN 978-7-5606-4253-6

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ①邹… Ⅲ. ①经济数学 ②微积分 Ⅳ. ①F224.0 ②O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 205937 号

策　　划　毛红兵

责任编辑　毛红兵

出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)

电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　编　710071

网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com

经　　销　新华书店

印刷单位　陕西天意印务有限责任公司

版　　次　2016 年 9 月第 1 版　2016 年 9 月第 1 次印刷

开　　本　787 毫米×1092 毫米　1/16　印张 14.75

字　　数　341 千字

印　　数　1～5000 册

定　　价　45.00 元

ISBN 978-7-5606-4253-6/F

XDUP 4545001-1

＊＊＊如有印装问题可调换＊＊＊

序

2015年5月教育部、国家发展改革委、财政部“关于引导部分地方普通本科高校向应用型转变的指导意见”指出：当前，我国已经建成了世界上最大规模的高等教育体系，为现代化建设作出了巨大贡献. 但随着经济发展进入新常态，人才供给与需求关系深刻变化，面对经济结构深刻调整、产业升级加快步伐、社会文化建设不断推进，特别是创新驱动发展战略的实施，高等教育结构性矛盾更加突出，同质化倾向严重，毕业生就业难和就业质量低的问题仍未有效缓解，生产服务一线紧缺的应用型、复合型、创新型人才培养机制尚未完全建立，人才培养结构和质量尚不适应经济结构调整和产业升级的要求.

因此，完善以提高实践能力为引领的人才培养流程，率先应用“卓越计划”的改革成果，建立产教融合、协同育人的人才培养模式，实现专业链与产业链、课程内容与职业标准、教学过程与生产过程对接. 建立与产业发展、技术进步相适应的课程体系，与出版社、出版集团合作研发课程教材，建设一批应用型示范课程和教材，已经成了目前发展转型过程中本科高校教育教学改革的当务之急.

长期以来，本科高校虽然区分为学术研究型、教学型、应用型又或者一本、二本、三本等类别，但是在教学安排、教材内容上都遵循统一模式，并无自己的特点，特别是独立学院“寄生”在母体学校内部，其人才培养模式、课程设置、教材选用，甚至教育教学方式都是母体学校的“翻版”，完全没有自己的独立性，导致独立学院的学生几乎千篇一律地承袭着二本或一本的衣钵. 不难想象，当教师们拿着同样的教案面对着一本或二本或三本不同层次的学生，在这种情况下又怎么能够培养出不同类型的人才呢？高等学校的同质性问题又该如何破解？

本科高校尤其是地方高校和独立学院创办之初的目的是要扩大高等教育办学资源，运用自己新型运行机制，开设社会急需热门专业，培养应用型人才，为扩大高等教育规模，提高高等教育毛入学率添彩增辉，而今，这个目标依然不能动摇. 特别是，适应我国新形势下本科院校转型之需要，更应该办出自己的特色和优势，即，既不同于学术研究型、教学型高校，又有别于高职高专类院校的人才培养定位，应用型本科高校应该走自己的特色之路，在人才培养模式、专业设置、教师队伍建设、课程改革等方面有所作为、有所不为，经过贵州省部分地方学院、独立学院院长联席会多次反复讨论研究，我们决定从教材编写着手，探索建立适应于应用型本科院校的教材体系，因此，才有了这套“应用型本科高校系列教材”.

本套教材具有以下一些特点：

一是协同性. 这套教材由地方学院、独立学院院长们牵头；各学院具有副教授职称以上的教师作为主编；企业的专业人士、专业教师共同参编；出版社、图书发行公司参与教材选题的定位，可以说，本套教材真正体现了协同创新的特点.

二是应用性. 本套教材编写突破了多年来地方学院、独立学院的教材选用几乎一直同一本或母体学校同专业教材的体系结构完全一致的现象，完全按照应用型本科高校培养人

才模式的要求进行编写，既废除了庞大复杂的概念阐述和晦涩难懂的理论推演，又深入浅出地进行了情境描述和案例剖析，使实际应用贯穿始终.

三是开放性. 以遵循充分调动学生自主学习的兴趣为契机，把生活中，社会上常见的现象、行为、规律和中国传统的文化习惯串联起来，改变了传统教材追求“高、大、全”、面面俱到，或是一副“板着脸训人”的高高在上的编写方式，而是用最真实、最符合新时代青年学生的话语方式去组织文字，以改革开放的心态面对错综复杂的社会和价值观等问题，促进学生进行开放式思考.

四是时代性. 这个时代已经是互联网 + 的大数据时代，教材编写适宜短小精悍、活泼生动，因此，这些教材充分体现了互联网 + 的精神，或提出问题、或给出结论、或描述过程，主要的目的是让学生通过教材的提示自己去探索社会规律、自然规律、生活经历、历史变迁的活动轨迹，从而，提升他们抵抗风险的能力，增强他们适应社会、驾驭机会、迎接挑战的本领.

我们深知，探索、实践、运作一套系列教材的工作是一项旷日持久的浩大工程，且不说本科学院在推进向应用型转变发展过程中日积月累的诸多欠账一时难还，单看当前教育教学面临的种种困难局面，我们都心有余悸. 探索科学的道路总不是平坦的，充满着艰辛坎坷，我们无所畏惧，我们勇往直前，我们用心灵和智慧去实现跨越，也只有这样行动起来才无愧于这个伟大的时代所赋予的历史使命. 由于时间仓促，这套系列教材会有不尽人意之处，不妥之处在所难免，还期盼同行的专家、学者批评斧正.

“众里寻他千百度，蓦然回首，那人却在，灯火阑珊处.”初衷如此，结果如此，希望如此，是为序言.

应用型本科高校系列教材委员会

2016 年 8 月

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

应用型本科高校系列教材编委会

主任委员

周　游　杨先明　谢承卫　吴天祥　肖远平

委　　员

陈其鑫　杨晓英　梁　蓓　赵家君　何　彪

夏宇波　闵　军　胡方明　马景涛　吴　斌

秘　　书

夏　曦　马璐航　吴存骄

前　言

数学是研究现实世界的数量关系和空间形式的科学，它包涵有自身特有的数学思想，是一门古老而又迅速发展的科学，也是人类社会不可或缺的有力工具．现代社会已将社会科学、自然科学与数学并列为三大科学．

“数学是思维的体操”、“数学是看不见的文化”、“能否用数学观念定量思维，是衡量民族科学文化素质的重要标志”、“数学是技术”等这些对数学的不同评价，充分说明数学对提高大学生的科学文化素质具有重要作用．高等教育的数学教材是数学教学的载体，应该具备素质教育的功能，更应该具备提高学生吸取、整理和创造知识能力的特点，特别是要成为为经济社会服务强有力的工具之一．

根据“教育部、国家发展改革委、财政部关于引导部分地方普通本科高校向应用型转变的指导意见”精神，为满足学校转型的教学需要，结合应用型本科学生对数学的需求，我们组织具有多年数学教学经验的老师编写了这本教材．

本书内容共分八章和五个附录，主要包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分和微分方程初步等内容．本书内容结构严谨，逻辑性强，讲述清晰，便于老师教学和学生自学，符合应用型本科院校学生的认知特点．本书注重将理论知识、数学方法与经济中的应用相结合，注重实用性，使学生在学习过程中不会觉得数学那么单调乏味、高深难懂．

参加本书编写的老师有邹彪、莱芳、冯金华、李强、况山、张旭清、舒康、肖凯、夏先锋、沈洪兵等．本书在编写过程中得到贵州八所独立学院的领导、出版社的编辑及其他相关老师的支持与帮助，我们深表感谢；同时还参阅了前辈们出版的相关书籍，在此谨致谢意．

由于作者水平有限和时间仓促，不免存在不足之处，诚请读者提出宝贵意见，以便我们再版时修改．

编　者

2016 年 7 月

目　录

第一章 函　数

函数是现实中量与量的关系在数学中的反映，是数学中最重要的概念之一．本章将回顾、总结高中函数的基础知识，并对经济学中的常用函数作简单介绍．

第一节 集　合

一、集合的概念

集合简称集，是数学的一个基本概念，指具有某种特定性质的事物或对象的总体，通常用大写的拉丁字母 A，B，C，…表示；组成集合的每一个事物或对象称为集合的**元素**，通常用小写拉丁字母 a，b，c，…表示．

一个集合一旦确定，任何一个事物或者是集合中的元素，或者不是，只有这两种情况．如果 a 是集合 A 的元素，称 a 属于 A，记为 $a\in A$；否则就称 a 不属于 A，记为 $a\notin A$．

不含有任何元素的集合称为空集，记为$\varnothing$，由有限个元素构成的集合称为**有限集**，由无限多个元素构成的集合称为**无限集**．

集合一般有两种表示方法：列举法和描述法．其中列举法是将集合中的元素一一列出，例如自然数集 N 可表示为 $N=\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$；描述法是通过描述集合中元素所具有的性质来表示集合，一般表示为 $M=\{x|x$ 具有的性质$\}$．例如整数集合 $\mathbf{Z}=\{x|x\in\mathbf{N}$ 或 $-x\in\mathbf{N}\}$．

为方便起见，通常用 $\mathbf{Q}$ 表示有理数集，$\mathbf{R}$ 表示实数集，$\mathbf{C}$ 表示复数集．有时在集合的右上角添加“+”、“−”等上标来表示集合的特定子集，如 $\mathbf{R}^+$ 表示正实数集，$\mathbf{R}^-$ 表示负实数集等．

一个集合通常可有多种表示方法，只要所有的元素相同，就是同一个集合．例如方程 $x^2-2x-3=0$ 的解集可表示为$\{x|x^2-2x-3=0\}$，也可用列举法表示为$\{3, -1\}$．

二、集合的关系与运算

设有集合 A，B，若对每一个 $x\in A$ 必有 $x\in B$，则称 A 是 B 的**子集**，或称 B 包含 A，记为 $A\subset B$．若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$ 则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$．

若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的真子集．

集合有三种基本运算：交、并、差．

设 A、B 是两个集合，**A 与 B 的交集**是 A 与 B 中共有的元素所组成的集合，记为 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$．

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

A 与 B 的并集是 A 与 B 中所有的元素放在一起所组成的集合，记为 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\,|\,x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

A 与 B 的差集是由属于 A 但不属于 B 的元素所组成的集合，记为 $A\backslash B$，即

$$A\backslash B=\{x\,|\,x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

集合的运算满足下面的运算律：

(1) **交换律**　$A\cap B=B\cap A$，$A\cup B=B\cup A$；

(2) **结合律**　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(3) **分配律**　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

三、区间与邻域

设有实数 a 和 b，取 $a<b$，数集 $\{x\,|\,a<x<b\}$ 称为**开区间**，记为 (a,b)，即 $(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}$. 数集 $\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**，记为 $[a,b]$，即 $[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$.

类似地，$[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$，称为**半开半闭区间**.

以上区间都称为**有限区间**，区间长度为 $b-a$. 此外还有**无限区间**，引进记号 $+\infty$（读作**正无穷大**）和 $-\infty$（读作**负无穷大**）. 例如 $[a,+\infty)=\{x\,|\,a\leqslant x\}$，$(-\infty,b]=\{x\,|\,x\leqslant b\}$.

全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 可记作 $(-\infty,+\infty)$，它是无限区间.

设 $a\in\mathbf{R}$，$\delta>0$. 满足绝对值不等式 $|x-a|<\delta$ 的全体实数 x 的集合称为**点 a 的 δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$，或简写为 $U(a)$，即有 $U(a,\delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$.

点 a 的去心 δ 邻域可定义为 $\mathring{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$，或简写为 $\mathring{U}(a)$.

$U(a)$ 和 $\mathring{U}(a)$ 的区别仅在于 $\mathring{U}(a)$ 不包含点 a.

知识要点

(1) 集合的概念：**集合**简称集，指具有某种特定性质的事物或对象的总体，通常用大写的拉丁字母 A，B，C，…表示；组成集合的每一个事物或对象称为集合的**元素**，通常用小写拉丁字母 a，b，c，…表示.

(2) 集合的三种基本运算：交、并、差.

A 与 B 的交集记为 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x\,|\,x\in A \text{ 且 } x\in B\}$；

A 与 B 的并集记为 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x\,|\,x\in A \text{ 或 } x\in B\}$；

A 与 B 的差集记为 $A\backslash B$，即 $A\backslash B=\{x\,|\,x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$.

(3) 区间和邻域.

(4) 本节重点是集合的概念，集合的运算，能够用区间表示集合，理解集合和邻域的概念，掌握集合的运算.

习题 1－1

1. 用区间表示下面的数集：

(1) $\{x \mid x^2 > 3\}$;　　　　　(2) $\{x \mid 0 < |x-3| \leqslant 2\}$.

2. 用集合的描述法表示下列集合：

(1) 大于 5 的所有实数的集合；

(2) 圆 $x^2+y^2=25$ 内部(不包含圆周)所有点的集合；

(3) 抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y=0$ 交点的集合.

3. 用列举法表示下列集合：

(1) 方程 $x^2-7x+12=0$ 的根的集合；

(2) 集合 $\{x \in \mathbf{Z} \mid |x-1| \leqslant 3\}$.

4. 写出 $A=\{0, 1, 2\}$ 的所有子集.

5. 如果集合 A 有 n 个元素，问 A 有多少个子集？有多少个真子集？有多少个非空真子集？

6. 设集合 $A=\{x \mid 2<x<6\}$，$B=\{x>4\}$，求 $A \cup B$，$A \cap B$，$A \backslash B$.

7. 用区间表示下列不等式的所有 x 的集合：

(1) $|x-2| \leqslant 1$;　　　　　(2) $|x+1| > 2$.

第二节　函数及其基本性质

一、函数的概念

在中学我们已经知道，函数是现实中量与量之间依存关系在数学中的反映. 如果两个量之间存在着确定性的关系，即某个量的值可以确定另一个量的值，我们就可以研究两者之间的函数关系.

定义 1.2.1　设 D 和 M 是两个实数集，如果对于每个数 $x \in D$，按照一定的对应法则 f 总有唯一确定的一个数 $y \in M$ 和它对应，则称 f 是定义在数集 D 上的函数，记作 f: $D \to M$ 或 f: $x \to y$ 或 $y=f(x)$，其中 x 称为自变量，y 称为因变量，数集 D 称为函数 f 的定义域，记为 D_f，即 $D_f=D$.

当自变量 $x=x_0 \in D$ 时，$f(x)=f(x_0)$，称 $f(x_0)$ 为函数在 x_0 点处的函数值. 函数值全体组成的数集 $M=\{y \mid y=f(x), x \in D\}$ 称为函数 $f(x)$ 的值域，可用 $f(D)$ 表示.

由函数的定义可知，当对应法则和定义域确定时，函数就可完全确定，因此称定义域和对应法则是**函数的两要素**. 对于两个函数来说，只有当它们的定义域和对应法则都相同时，它们才是相同的. 例如，函数 $f(x)=\dfrac{4x^2-1}{2x-1}$ 和函数 $g(x)=2x+1$，当 $x \neq \dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 和 $g(x)$ 有相同的函数值；但 $f(x)$ 的定义域是 $\left(-\infty+\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$，而 $g(x)$ 的定义域却是 $(-\infty, \infty)$，因而它们是不同的函数. 又例如，函数 $f(x)=1$ 与函数 $g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$，虽然它们的表达形式不同，却是相同的函数.

有一种特殊的函数，就是无论自变量如何变化，其函数值始终取同一个常数，这类函数称为**常量函数**：

$$y=C, \ x \in D.$$

表示函数的主要方法有三种：列表法、图形法、解析法.

列表法又称**数值法**，是将两个变量之间的对应关系通过数值对应的形式一一列出.

图形法是通过图形来描述函数.

解析法又称**公式法**，是用数学公式表达函数关系的一种方法，这是数学中用得最多的一种表示函数的方法，它通过公式将变量联系起来，对应关系明确，在数学推导中非常有用.

有些函数在其定义域的不同部分用不同的公式表达，这类函数通常称为**分段函数**.例如：

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}.$$

就是分段函数，这个函数也称为**符号函数**(见图 1.2.1). 又如绝对值函数 $y=|x|$ 可用分段函数的形式表示为

$$y=\begin{cases}x, & x>0\\ 0, & x=0\\ -x, & x<0\end{cases}.$$

如利用符号函数也可用解析式 $y=x\operatorname{sgn}x$ 表示. 取整函数也属于分段函数，设 x 为任意实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作$[x]$. 函数 $y=[x]$就是取整函数，它的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $\mathbf{Z}$(见图 1.2.2).

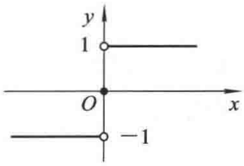

图 1.2.1　符号函数

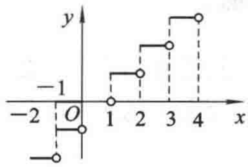

图 1.2.2　取整函数

有些函数难以用以上三种方法表示，只能用语言描述，如定义在 $\mathbf{R}$ 上的狄利克雷(Dirichlet)函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数}\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}\end{cases}.$$

还有一个特殊的函数，就是取最值函数. 设函数 $f(x)$和 $g(x)$在 D 上有定义，令 $y=\max\limits_{x\in D}\{f(x), g(x)\}$，$y=\min\limits_{x\in D}\{f(x), g(x)\}$分别为取最大值和取最小值函数.

二、函数的基本性质

函数的有界性、单调性、奇偶性、周期性是我们需要研究的几种性质.

1. 函数的有界性

定义 1.2.2　设 $f(x)$是定义在 D 上的函数，若存在一个正数 M，使得对每一个 $x\in D$ 有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$是 D 上的**有界函数**；若对任何一个正数 M(无论 M 多大)，都存在 $x_0\in D$ 使得 $|f(x_0)|>M$，则称 $f(x)$是 D 上的**无界函数**.

函数的有界性与函数自变量的取值范围有关，有的函数可能在定义域的某一部分有

界，但在另一部分无界，例如 $y=\tan x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 的取值范围是 $[-1, 1]$，但在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内是无界的．因此在研究函数的有界性时，通常需要指出函数自变量的取值范围．

2．函数的单调性

定义 1.2.3 设 $f(x)$ 是定义在 D 上的函数，若对任何的 x_1，$x_2 \in D$，当 $x_1 < x_2$ 时，总有：

(1) $f(x_1) \leqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 是 D 上的增函数，特别地，当 $f(x_1) < f(x_2)$ 时，称 $f(x)$ 是 D 上的**严格增函数**；

(2) $f(x_1) \geqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 是 D 上的减函数，特别地，当 $f(x_1) > f(x_2)$ 时，称 $f(x)$ 是 D 上的**严格减函数**．

增函数和减函数统称为单调函数，严格增函数和严格减函数统称为**严格单调函数**．

从图像上来看，函数的递增是当自变量自左向右变化时，函数的图像上升；递减就是当自变量自左向右变化时，函数的图像下降．

3．函数的奇偶性

定义 1.2.4 设 D 为对称于原点的数集，$f(x)$ 为定义在 D 上的函数，若对任意的 $x \in D$ 有：

(1) $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为 D 上的**奇函数**；

(2) $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为 D 上的**偶函数**．

特殊地，若 $f(x)$ 为常数函数，则它不是奇函数，但是偶函数．

从图像上来看，奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称(见图 1.2.3)．

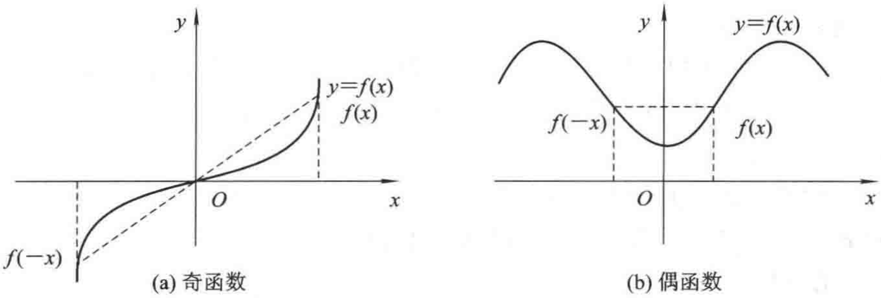

图 1.2.3 奇函数与偶函数的函数图像

4．函数的周期性

定义 1.2.5 设 $f(x)$ 是定义在 D 上的函数，若存在一个不为零的数 l，使得对每一个 $x \in D$ 有 $x+l \in D$，且 $f(x+l) = f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，l 称为 $f(x)$ 的**周期**．显然，若 l 为 $f(x)$ 的周期，则 nl(n 为正整数)也为 $f(x)$ 的周期．若在周期函数 $f(x)$ 的所有周期中，存在一个最小周期，则称此最小周期为 $f(x)$ 的**基本周期**，或简称周期．

周期函数的图像特点是呈现周期性变化，在每一个周期长度的区间上函数的图像相同．当自变量的取值增加一个周期后，函数值将重复出现(见图 1.2.4)．

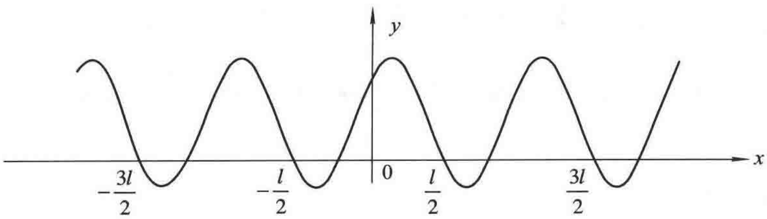

图 1.2.4　周期函数的图像

三角函数是常见的周期函数．常数函数以任意数为周期，但不存在基本周期．

例 1.2.1　设函数 $y=f(x)$是以 k 为周期的函数，试证函数 $y=f(ax)(a>0)$是以$\frac{k}{a}$为周期的函数．

证　要证 $y=f(ax)(a>0)$是以$\frac{k}{a}$为周期的周期函数，即证

$$f(ax)=f\left(a\left(x+\frac{k}{a}\right)\right)=f(ax+k).$$

因为 $y=f(x)$是以 k 为周期的函数，所以有 $f(ax)=f(ax+k)$，从而可得函数 $y=f(ax)$是以$\frac{k}{a}$为周期的函数．

知识要点

(1) 函数的定义：设 D 和 M 是两个实数集，如果对于每个数 $x\in D$，按照一定的对应法则 f 总有唯一确定的一个数 $y\in M$ 和它对应，则称 f 是定义在数集 D 上的函数，记作 f：$D\to M$ 或 f：$x\to y$ 或 $y=f(x)$，其中数集 D 称为函数 f 的定义域，记为 D_f，即 $D_f=D$.

(2) 函数的基本性质．

① 若存在一个正数 M，使得对每一个 $x\in D$ 有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$是 D 上的有界函数；若对任何一个正数 M(无论 M 多大)，都存在 $x_0\in D$ 使得 $|f(x_0)|>M$，则称 $f(x)$是 D 上的无界函数．

② 设 $f(x)$是定义在 D 上的函数，若对任何的 x_1，$x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时，总有：

(i) $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$是 D 上的增函数，特别地，当 $f(x_1)<f(x_2)$时，称 $f(x)$是 D 上的**严格增函数**；

(ii) $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$是 D 上的减函数，特别地，当 $f(x_1)>f(x_2)$时，称 $f(x)$是 D 上的**严格减函数**.

③ 设 D 为对称于原点的数集，$f(x)$为定义在 D 上的函数，若对任意的 $x\in D$，有：

(i) $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为 D 上的奇函数；

(ii) $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为 D 上的偶函数．

④ 设 $f(x)$是定义在 D 上的函数，若存在一个不为零的数 l，使得对每一个 $x\in D$ 有 $x+l\in D$，且 $f(x+l)=f(x)$恒成立，则称 $f(x)$为周期函数，l 称为 $f(x)$的周期．

(3) 本节的重点是函数的概念和函数的性质．需要理解函数的概念，掌握函数的表示方法，理解函数的性质，掌握函数的有界性、单调性、奇偶性、周期性的判定方法，并能够

利用函数的特性对函数做进一步的深入研究.

习题 1－2

1. 下列各题中，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同，为什么？

(1) $f(x)=\ln x^2$， $g(x)=2\ln x$； (2) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$， $g(x)=x-1$；

(3) $f(x)=x$， $g(x)=\sqrt{x^2}$； (4) $f(x)=x$， $g(x)=e^{\ln x}$.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$； (2) $y=\sqrt{3-x}+\tan\dfrac{1}{x}$；

(3) $y=\dfrac{1}{\ln(1-x)}$； (4) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$.

3. 计算分段函数 $y=\begin{cases}1-x^2, & x\geqslant 1\\ \dfrac{1}{2}e^x, & x<1\end{cases}$ 的函数值 $f(-1)$，$f(0)$，$f(\pi)$.

4. 判断下列函数在其定义域上的奇偶性：

(1) $y=x+\sin x$； (2) $y=x^2a^{-x^2}\ (a>0)$；

(3) $y=\tan(\sin x)$； (4) $y=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$.

5. 判断下列函数的单调性：

(1) $y=(x-2)^2+1$； (2) $y=\dfrac{1}{2}x+\mathrm{lb}x$.

6. 下列函数哪些是周期函数？对周期函数指出其周期.

(1) $y=\sin^2 x$； (2) $y=\cos\dfrac{1}{x}$.

7. 证明函数 $f(x)=x+\ln x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

8. 证明函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 是 $(0,1)$ 上的无界函数.

第三节　反函数与复合函数

一、反函数

函数自变量与因变量之间的关系往往是相对的. 通常我们研究的是 y 随 x 的变化，但有时也需要研究 x 随 y 的变化情况. 为此，我们引入反函数的概念.

定义 1.3.1　设 $f(x)$ 是定义在 D 上的函数，若值域 $f(D)$ 中的每一个值 y 在 D 中都有唯一的一个 x 与之对应，并使得 $f(x)=y$，则按此对应法则就定义了一个在数集 $f(D)$ 上的函数，这个函数称为 $f(x)$ 的**反函数**，记为 $f^{-1}: f(D)\mapsto D$ 或 $f^{-1}: y\mapsto x$ 或 $x=f^{-1}(y)$.

习惯上，通常 x 表示自变量，y 表示因变量，因此，将反函数中两个变量的位置互换，就得到了我们常用的反函数的表示方法 $y=f^{-1}(x)$，$x\in f(D)$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com