高等数学

（第三版）

GAO DENG SHU XUE

罗晓晖　王晓艳　主编

中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社

高 等 数 学

（第三版）

主　编：罗晓晖　王晓艳
副主编：刘泮振　侯俊林　王军民

中国财经出版传媒集团
中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 /罗晓晖，王晓艳主编．—3 版．—北京：中国财政经济出版社，2016.9
ISBN 978－7－5095－6977－1

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①罗…②王…　Ⅲ.①高等数学－教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 223102 号

责任编辑：林治滨　刘五书　　责任校对：玉凤等
封面设计：孙俪铭　　版式设计：董生平

中国财政经济出版社出版
URL：http：//www.cfeph.cn
E－mail：cfeph @ cfeph.cn

社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮政编码：100142
营销中心电话：88190406　北京财经书店电话：64033436　84041336
北京财经印刷厂印刷　各地新华书店经销
787×1092 毫米　16 开　30.75 印张　752 000 字
2016 年 9 月第 1 版　2016 年 9 月北京第 1 次印刷
定价：58.00 元
ISBN 978－7－5095－6977－1/O·0054
（图书出现印装问题，本社负责调换）
质量投诉电话：88190744
打击盗版举报热线：010－88190492、QQ：634579818

前　言

本书是根据高等学校理工科数学教学大纲所编写的，全书共十一章每节后配有基础练习题，书末有习题答案。此书可作为高等学校理工科高等数学的教材或其他有关学校和有关专业的教学参考书。

本书注重基本理论和基础知识的介绍，概念的引入力求与学生中学的知识相衔接，并适当地压缩了一些与中学知识重复的地方。每节的基础练习题有助于学生理解和消化所学内容，使学生增强对本章知识的综合应用能力，提高解题技巧，以适应高年级的考研或工作后应用的需要。

在编写的过程中广泛参阅了国内外的有关著作，力求适用理工科不同专业的需要，以开拓学生的视野。书中*号部分为学生选学内容，学生可视自己情况而定。

参加本书编写工作的是河南财经学院具有多年教学经验的数学教师。王媛（第一章）、王晓艳（第二章、第三章）、耿向平（第四章）、刘洋振（第五章）、张丽丽（第六章）、侯俊林（第七章）、罗晓晖（第八章）、高丽萍（第九章）、王军民（第十章）、李海银（第十一章）。臧振春教授统审了全书，并提出了许多宝贵的意见和建议。

本书在出版的过程中，得到了河南财经政法大学教务处及中国财政经济出版社的大力支持和帮助，在此我们表示衷心的感谢。

限于编者水平，教材中一定存在不妥之处，希望广大读者和同行专家提出批评和指正。

编　者

2016年6月15日

目　录

第一章 函数 极限 连续

高等数学的研究对象是变量．函数是变量之间的一种依赖关系，极限方法是研究变量的一种基本方法，连续是变量变化的一种常见形式．本章将介绍这些基本概念，以便为高等数学的学习打下坚实的基础．

第一节 函 数

一、常量与变量

在实际问题中，我们常遇到各种各样的量，如长度、重量、时间、距离等等．这些量一般可分为两种，一种在我们考察的过程中没有变化，即保持同一数值，这种量叫做常量；另一种在考察过程中有所变化，即可以取不同的数值，这种量叫做变量．常量一般用字母 a、b、c 等表示，变量一般用 x、y、z 等表示．

常量与变量并不是绝对的．一种量在某一过程或在某一环境中是常量，而在另一过程或在另一环境中可能就是变量．如重力加速度在某一地方为常量，但在不同地方，重力加速度有不同的值．在具体研究中，有时把变化很小或对所研究的问题影响不大的量也看成常量．

常量也可看成是变量仅取一个值时的特例．

二、映射

集合是数学中的一个基本概念，不同的集合中有不同的元素．而两个集合之间往往有某种联系．

例 1 某地所有机动车辆构成的集合 A 与其车牌号码构成的集合 B 之间有对应关系：每一辆车都有一个车牌号码，不同的车牌号码表示不同的车辆．

例 2 某班级有 50 名学生，他们构成集合 A，某次测验后各自都有自己的成绩，若定义集合 B 为一个闭区间 $[0, 100]$，那么集合 A 与 B 之间也有对应关系：每个学生都有自己的成绩．

这种对应关系在数学上我们称之为映射．

定义 1 设 X，Y 为两个集合，如果对 X 中的每一个元素 x，按照某种规则 f，集合 Y 中都有惟一确定的元素 y 与之对应，则称这种规则 f 为从 X 到 Y 的一个映射．

称与 x 对应的 y 为 x 的像，x 称为 y 的原像．由定义可知，X 中的每一个元素有且只有一个像，但 Y 中的某一个元素 y，可能有原像，也可能没有原像，在有原像时，原像也不一定惟一．

如果对 Y 中的每一个元素 y，至少有一个原像，则称这种映射为满射．如果对 X 中的任意两个不同元素 x_1、x_2，其像 y_1、y_2 也不相同，即有原像的元素 y 其原像惟一，则称这种映射为单射．如果一个映射既为满射又为单射，则称这种映射为一一对应．

例 1 中 A 与 B 的对应关系可建立 A 到 B 的一个映射，而且这个映射是一一对应的．

例 2 中 A 与 B 的对应关系也可建立 A 到 B 的一个映射，但这个映射不是满射，也不一定是单射．

映射的例子很多，特别是一般集合到数集的映射，如学生与学生证号，地理位置与邮政编码，各单位与电话号码等等．这种映射可以使一般集合数字化，从而充分利用数学工具，加上计算机的广泛使用，大大简化处理非数字信息的难度，增加处理速度．

将一般集合转化为数集来考虑后，数集之间的关系就显得更为重要．数集之间的关系实际上就是变量之间的关系，从数集到数集的映射就是函数．

三、函数的概念

我们经常会遇到彼此之间有依赖关系的变量，如圆的面积 y 与它的半径 r 之间有关系

$$y=\pi r^2$$

自由落体运动中，若开始下落的时刻为 $t=0$，则落下的距离 s 与下落的时间 t 之间有关系

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

其中 g 为重力加速度．我们把这种依赖关系称之为函数关系．

下面给出两个变量之间的函数关系的严格定义：

定义 2 设 D 是一个非空的实数集合，有两个变量 x 和 y，如果对每一个数 $x\in D$，变量 y 按照某种确定的法则 f 有惟一确定的实数值与之对应，则称 y 是 x 的函数，称法则 f 为定义在 D 上的一个函数关系，记作

$$y=f(x)\quad x\in D$$

x 叫做自变量，y 叫做因变量，数集 D 称为这个函数的定义域．

对于 D 中的某一个值 x_0，因变量相应的值记为 y_0，则 $y_0=f(x_0)$，称 y_0 为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 时的函数值，全体函数值的集合称为这个函数的值域．

由定义可以看出，函数是从定义域到值域的一个满射．

函数符号也常用 g、ϕ、F 等．如 $y=\phi(x)$，$y=F(x)$．

在实际问题中，函数的定义域是根据实际意义确定的．如圆面积 $y=\pi r^2$ 中，半径 r 为自变量，其取值范围即函数定义域为 $D=(0,+\infty)$．

在不考虑函数实际意义的情况下，定义域指的是能使数学式子有意义的一切实数值的集合．如函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 $D=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$．

在函数定义中，强调对每一个 $x\in D$，有惟一确定的 y 与之对应，若不强调这点，仅要求有确定的 y 与之对应，则可能对某一 $x_0\in D$，有两个甚至两个以上的函数值．有时也把这

种情况叫做函数．为区别起见，分别称之为单值函数和多值函数．本书中若无特别说明，函数都是指单值函数．

四、函数的表示法

1．解析法（公式法）

自变量 x 和因变量 y 之间的函数关系直接用公式表示出来，如 $y=\sin x$.

有时函数关系用两个或两个以上的数学式子分段表示，这种函数称为分段函数．

例 3 $y=|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$

这一函数称为绝对值函数．

例 4 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$

这一函数称为符号函数．对任一实数 x，显然有 $x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$.

例 5 $y=[x]$

这一函数称为取整函数，它表示不超过 x 的最大整数，如$[-3.5]=-4$.

例 6 $y=\begin{cases} 1 & x\text{ 为有理数} \\ 0 & x\text{ 为无理数} \end{cases}$

这一函数称为狄利克雷函数．

应该注意的是，分段函数虽然是由两个或两个以上的式子来表示，但决不能看成是多个函数，也不能看成是几个函数联立而成的，它满足函数的定义，只不过对定义域的不同区间有不同的表达式而已．

例 7 $y=f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x} & 0\leqslant x<1 \\ 1-x & x\geqslant 1 \end{cases}$，求 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f(1)$，$f(2)$.

解 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\sqrt{2}\qquad f(1)=1-1=0\qquad f(2)=1-2=-1$

还有一个特殊的函数，称为最值函数．

例 8 $y=\min\limits_{x\in D}\{x\}$

它表示取所有 x 中的最小者，即 x 的最小值．

$y=\max\limits_{x\in D}\{x\}$

它表示取所有 x 中的最大者，即 x 的最大值．

2．列表法

将一系列自变量的值与对应的函数值列成表格．如某商店在一年内各月的销售额（单位：万元）如下：

月份（t）	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
销售额（y）	825	740	521	495	625	531	435	462	508	675	585	760

它表示销售额 y 随着月份 t 的变化而改变的函数关系，可以看出，春节前后（12 月、1 月和 2 月）及 5 月和 10 月为旺季，其他月份为淡季．

3．图示法

把自变量 x 和函数 y 分别作为坐标平面上点的横坐标和纵坐标，这些平面上的点(x,y)所描出的平面曲线（有的函数描出一些散点）就表示了 y 与 x 的函数关系．如某气象站利用自动记录仪测出该地一昼夜气温的变化情况，如图 1－1．此图表示气温 T 随时间 t 变化的函数关系：

$$T=f(t)$$

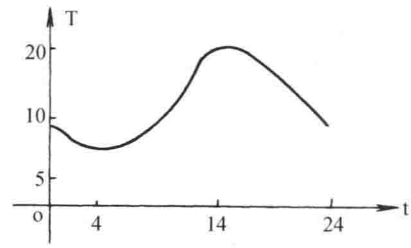

图 1－1

为了更直观地描述函数关系，通常对由解析法表示的函数，用图示法画出其图形，如本节例 3、例 4、例 5 的图形分别为图 1－2、图 1－3、图 1－4．例 7 的图形为图 1－5．

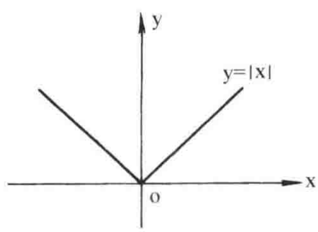

图 1－2

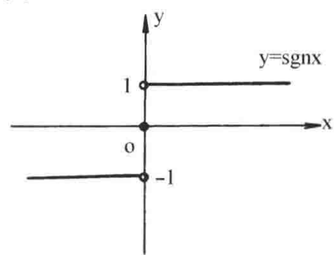

图 1－3

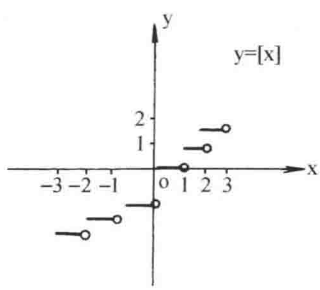

图 1－4

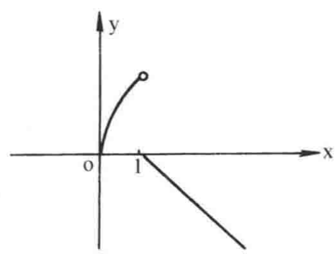

图 1－5

五、函数的几何特性

1．单调性

设函数 $y=f(x)$在集合 D 上有定义，对任意的 x_1、$x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时，若都有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$在 D 上单调增加；而若都有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$在 D 上单调减少．单调增加或单调减少统称为函数的单调性．在定义域集合 D 上具有单调性的函数，称为单调函数．如 $y=x^3$ 在定义域$(-\infty,+\infty)$内单调增加（如图 1－6），$y=1-x$ 在定义域$(-\infty,+\infty)$内单调减少（如图 1－7），所以这两个函数都是单调函数．

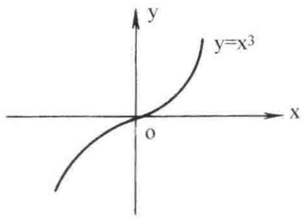

图 1－6

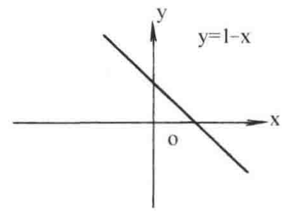

图 1－7

函数的单调性意味着随着自变量的增加，函数值增大或减小，从图形上看，曲线 $y=f(x)$ 是上升的或下降的．

有时函数在定义域的不同区间具有不同的单调性．如 $y=x^2$（如图 1－8），在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内不具有单调性，即 $y=x^2$ 不是单调函数．但在 $(0,+\infty)$ 内单调增加，在 $(-\infty,0)$ 内单调减少．我们把 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 叫做 $y=x^2$ 的两个单调区间．

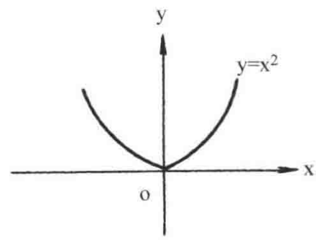

图 1－8

2．有界性

设函数 $y=f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果存在实数 k_1，对任意的 $x\in D$，都有 $f(x)\leqslant k_1$，则称 $f(x)$ 在 D 上有上界，并称 k_1 为 $f(x)$ 在 D 上的一个上界；如果存在实数 k_2，对任意的 $x\in D$，都有 $f(x)\geqslant k_2$，则称 $f(x)$ 在 D 上有下界，并称 k_2 为 $f(x)$ 在 D 上的一个下界．如果存在正数 M，对任意 $x\in D$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界，如果这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 D 上无界．在定义域集合 D 上有界的函数称为有界函数．如 $y=\sin x$ 对于 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $|\sin x|\leqslant 1$，故 $y=\sin x$ 是有界函数．

显然有界函数一定有上界又有下界，而有上界又有下界的函数一定是有界的．上界和下界只要存在就有无穷多个．

有的函数只有下界而无上界，有的函数只有上界而无下界，这样的函数是无界函数，如 $y=e^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界，但它有下界 0；$y=1-x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界，但它有上界 1.

有的函数在定义域内无界（即本身是无界函数），但可以在定义域内的某个区间上有界，如 $y=\dfrac{1}{x}$ 在定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内无界，但在 $(1,+\infty)$ 内有界，在 $(-\infty,-1)$ 内也有界，这样的有界区间可以有无穷多个．

函数的有界性意味着函数值在某一范围之内，从图形上看，函数 $y=f(x)$ 在 D 内的图形夹在两条直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间（如图 1－9）．

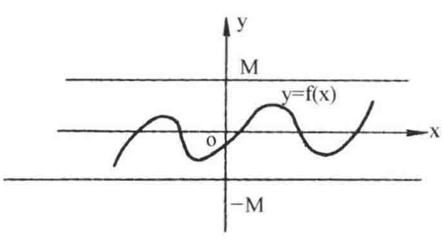

图 1－9

3．奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 在关于原点对称的集合 D 上有定义，如果对任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为 D 上的奇函数；如果对任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为 D 上的偶函数．在定义域集合 D 上的奇（偶）函数称为奇（偶）函数．如 $y=x^3$ 是奇函数，$y=x^2$ 是偶函数．

从图形上看，奇函数 $y=f(x)$ 的曲线关于坐标原点对称，偶函数 $y=f(x)$ 的曲线关于 y 轴对称．

例 9 判断下列函数的奇偶性．

(1) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ (2) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ (3) $y=\dfrac{\sin x}{x}+x$

解 (1) 因为 $D=(-\infty,+\infty)$，且 $f(-x)=\dfrac{e^{-x}+e^x}{2}=f(x)$ 所以 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 是偶函数．

(2) 因为 $D=(-\infty,+\infty)$，且

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})$$

$$=\ln\frac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}}=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$$

所以 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇函数．

(3) 因为 $f(-x)=\dfrac{\sin(-x)}{-x}+(-x)=\dfrac{\sin x}{x}-x\neq f(x)$，而且 $f(-x)\neq -f(x)$，所以 $y=\dfrac{\sin x}{x}+x$ 是非奇非偶函数．

若函数 $f(x)$ 的定义域是关于原点对称的集合，则 $f(x)+f(-x)$ 一定是偶函数，而 $f(x)-f(-x)$ 一定是奇函数．由于 $f(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$，可得出结论：$f(x)$ 可表示为偶函数与奇函数之和的形式．

4. 周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 T，使对任意的 $x\in D$（同时要求 $x+T\in D$），都有 $f(x)=f(x+T)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，称满足上式的最小正数 T 为 $f(x)$ 的周期．如 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 皆为周期函数，周期为 2π，$y=\tan x$ 也是周期函数，周期为 π.

从图形上看，周期函数 $y=f(x)$ 的曲线上的点在横坐标相距为 T 的两点的纵坐标相等，所以在区间 $[x,x+T]$ 上的图形与在区间 $[x+kT,x+(k+1)T]$（k 为整数）上的图形是相同的．如图 1－10.

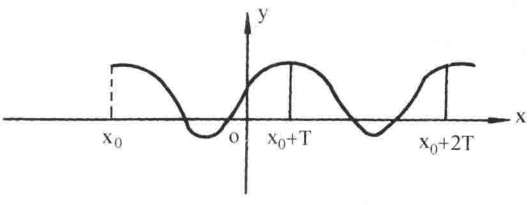

图 1－10

例 10 $y=x-[x]$ 是周期函数吗？画出它的图形．

解 因为对任意正整数 n，有 $f(n+x)=(n+x)-[n+x]=n+x-(n+[x])=x-[x]=f(x)$，所以 $y=x-[x]$ 是周期 $T=1$ 的周期函数，图形如图 1－11.

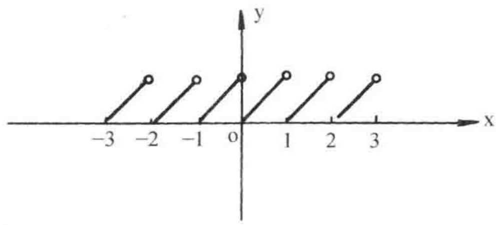

图 1－11

例 11　$y=A\sin(Bx+C)$的周期是$\frac{2\pi}{|B|}$　$(B\neq0)$．

六、反函数　复合函数　隐函数

1. 反函数

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，值域为 W，如果对 W 中的每一个数 y，在 D 中都有惟一确定的 x 与之对应，且满足 $y=f(x)$，则 x 与 y 之间有一个函数关系，记作 $x=f^{-1}(y)$，称之为函数 $y=f(x)$的反函数．显然 $y=f(x)$与 $x=f^{-1}(y)$互为反函数．

函数 $x=f^{-1}(y)$的定义域为 $y=f(x)$的值域 W，$x=f^{-1}(y)$的值域为$y=f(x)$的定义域 D.

因为习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，所以我们把函数$x=f^{-1}(y)$中的 x 改为 y，y 改为 x，得到函数 $y=f^{-1}(x)$，则称 $y=f^{-1}(x)$与$y=f(x)$互为反函数．如 $y=2x$ 的反函数为 $x=\frac{y}{2}$，改写后成为 $y=\frac{x}{2}$，称$y=2x$ 与$y=\frac{x}{2}$互为反函数．

从图形上看，$y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$关于直线 $y=x$ 对称，如图 1－12.

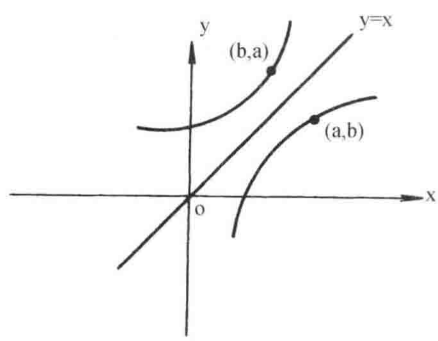

图 1－12

由于本章定义的函数是单值函数，所以一个函数有反函数的充分必要条件是 x 与 y 有一一对应的关系．

单调函数 $y=f(x)$中，x 与 y 是一一对应的，因此单调函数一定有反函数，且单调性一致．

有些函数本身无反函数，如 $y=x^2$，但在$(0,+\infty)$内，$x=\sqrt{y}$，即 $y=\sqrt{x}$可认为是 $y=x^2$ 在$(0,+\infty)$内的反函数，同样，$y=-\sqrt{x}$可认为是 $y=x^2$ 在$(-\infty,0)$内的反函数．

2. 复合函数

设函数 $y=f(u)$的定义域为 D_1，值域为 W_1，函数 $u=\phi(x)$的定义域为 D_2，值域为 W_2，$W_2\cap D_1\neq\Phi$，（如图 1－13）$D\subset D_2$，若对任一$x\in D$，通过函数 $u=\phi(x)$，所对应的 $u\in W_2\cap D_1\subset D_1$，必有一个确定的 y 通过 $y=f(u)$而确定，则 x 与 y 之间有一个函数关系，称之为由 $y=f(u)$和$u=\phi(x)$复合而成的复合函数，记作

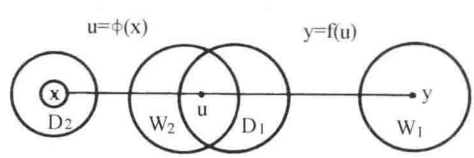

图 1－13

$$y = f[\phi(x)]$$

称 u 为中间变量.

显然复合函数 $y = f[\phi(x)]$的定义域 $D \subset D_2$，值域 $W \subset W_1$.

如 $y = \ln(1+x)$是由 $y = \ln u$，$u = 1 + x$ 复合而成的，定义域 $D = (-1, +\infty)$，值域 $W = (-\infty, +\infty)$.

不是任意两个函数都能构成复合函数.

复合函数也可以由两个以上的函数构成，如 $y = \sqrt{\cos\frac{x}{2}}$ 由 $y = \sqrt{u}$，$u = \cos v$，$v = \frac{x}{2}$ 三个函数复合而成，其中 u，v 都是中间变量.

3. 隐函数

函数通常由式子 $y = f(x)$ 表示，这样的函数也称为显函数，有时函数关系由一个方程来表示，如 $x + y^3 - 1 = 0$，实际上它可以表示为 $y = \sqrt[3]{1-x}$. 当函数关系用方程表示时，我们称它为隐函数.

并不是所有的隐函数都能改写成显函数的形式，如 $\frac{y}{x} = \ln y$.

习题 1 -1

1. 下列各题中，$f(x)$与 $g(x)$是否相同？为什么？

(1) $f(x) = \frac{x^2}{x}$，$g(x) = x$ (2) $f(x) = e^{-\frac{1}{2}\ln x}$，$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

(3) $f(x) = \sec^2 x - \tan^2 x$，$g(x) = 1$ (4) $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$，$g(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$

(5) $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$，$g(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

2. 计算下列各题：

(1) $f(x) = \frac{|x-2|}{x+1}$，求 $f(0)$，$f\left(\frac{1}{x}\right)$ (2) $f(x) = x^2 + 1$，求 $f(x^2)$，$[f(x)]^2$

(3) $f(x) = \begin{cases} \tan x & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}$ 求 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

3. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y = x^3 + \sin x$ (2) $y = e^{|\sin x|}$

(3) $y = xe^x$ (4) $y = \ln\frac{1-x}{1+x}$

4. 证明：若 $f(x)$在 $(-1, 1)$ 内有定义，则

(1) 当 $f(x)$是奇函数并在 $(0, 1)$ 内单调增加时，它在 $(-1, 0)$ 内也单调增加.

(2) 当 $f(x)$是偶函数并在$(0,1)$内单调增加时，它在 $(-1, 0)$ 内是单调减少的.

5. 下列函数哪些是周期函数？若是，指出其周期.

(1) $y=\cos(x-2)$　　(2) $y=1+\sin\pi x$

(3) $y=x\tan x$　　(4) $y=\sin^2 x$

6. 求下列函数的反函数.

(1) $y=\sqrt{1-x^2}\quad(-1\leqslant x\leqslant 0)$　　(2) $y=\frac{x-1}{x+1}$

(3) $y=\frac{2^x}{2^x+1}$　　(4) $y=1+\ln(x+2)$

7. 设 $f(x)=\frac{x}{1-x}$，求 $f[f(x)]$ 及其定义域.

第二节　初 等 函 数

一、基本初等函数

以下六类函数称为基本初等函数.

1. 常量函数 $y=c$

定义域为$(-\infty,+\infty)$

2. 幂函数 $y=x^{\alpha}\quad(\alpha\neq 0)$

定义域随 α 而定，但在$(0,+\infty)$内总有定义，且图形必经过$(1,1)$点.

常见的如 $y=x^2$，$y=x^3$，$y=\frac{1}{x}$（如图 1－14）.

3. 指数函数 $y=a^x$（$a>0$，$a\neq 1$）

定义域为$(-\infty,+\infty)$，对任意 x，$a^x>0$，图形必经过$(0,1)$点.

$y=a^x$ 与 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 的图形关于 y 轴对称．如图 1－15.

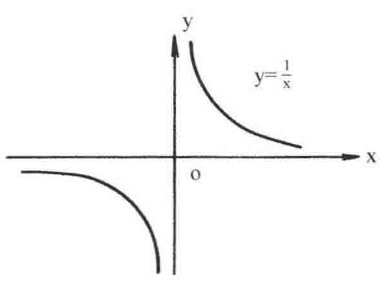

图 1－14

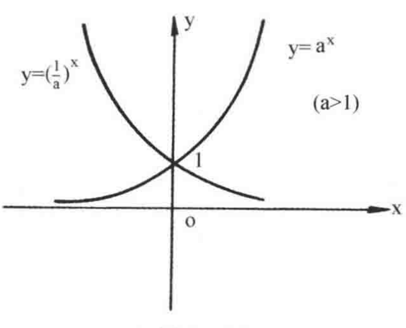

图 1－15

常见的如 $y=e^x$，其中 e 是无理数，$e\approx 2.71828$.

4. 对数函数 $y=\log_a x\quad(a>0,\ a\neq 1)$

对数函数是指数函数的反函数，其定义域为$(0,+\infty)$，图形必经过（1，0）点，如

图1－16.

当 $a=10$ 时，记为 $y=\lg x$，称为常用对数；

当 $a=e$ 时，记为 $y=\ln x$，称为自然对数.

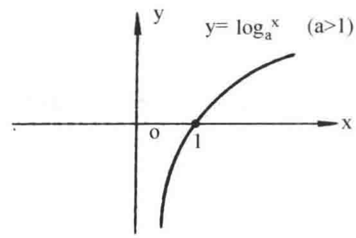

图 1－16

5. 三角函数

$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$ 共六个三角函数，分别称为正弦、余弦、正切、余切、正割、余割函数，它们的情况在初等数学中已有详尽的叙述，这里不再重复.

6. 反三角函数

反三角函数是三角函数的反函数，常用的有四个反三角函数.

（1）反正弦函数　正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$. 由于 x 与 y 不是一一对应的，若规定 $y=\mathrm{Arcsin}x$ 是 $y=\sin x$ 的反函数，则 $y=\mathrm{Arcsin}x$ 是多值函数. 因此我们选取一段，称为 $y=\mathrm{Arcsin}x$ 的单值支（或主值），记为 $y=\arcsin x$，这里 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$. 因此 $y=\arcsin x$ 的定义域为 $[-1,1]$，值域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. 如图 1－17.

常用的值如 $\arcsin 0=0$，$\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$，$\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$.

（2）反余弦函数　类似地建立反余弦函数 $y=\arccos x$，其定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[0,\pi]$，如图 1－18.

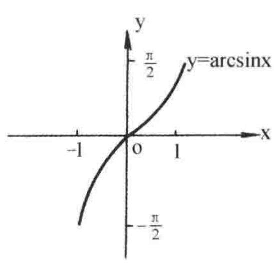

图 1－17

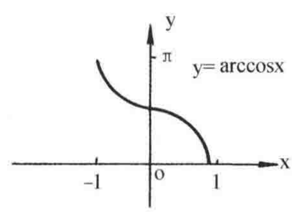

图 1－18

常用的值如 $\arccos 0=\frac{\pi}{2}$，$\arccos 1=0$，$\arccos(-1)=\pi$.

（3）反正切函数　$y=\arctan x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，如图 1－19.

常用的值如 $\arctan 1=\frac{\pi}{4}$，$\arctan 0=0$.

（4）反余切函数　$y=\mathrm{arccot}x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,\pi)$，如图 1－20.