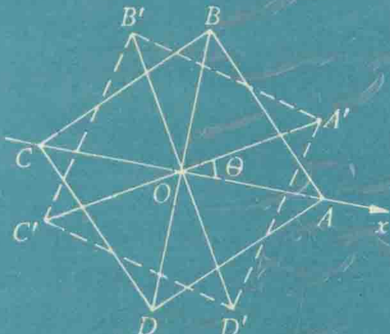
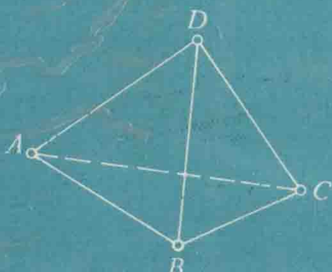
数学能力培养

现代数学与中学数学选讲

谢汉光 主编





浙 江 大 学 出 版 社

数学能力培养——

现代数学与中学数学选讲

谢汉光 主编

浙江大学出版社

内 容 简 介

本书着眼于提高中学数学教师现代数学的素养，以高观点指导中学数学的教学。为此精选了集合论，关系和函数，等价关系与序关系；自然数与数集的构造；数理逻辑与中学数学；群与中学代数；公理法与初等几何；变换群与中学几何；布尔代数初步；数学模型简介等十个专题。

本书是浙江省成人高等师范数学专业继续教育协编教材之一。可供中学数学教师继续教育培训班使用，也可作为中学数学教师进修用书以及高等师范学院（校）数学专业教学用书或参考书。

数 学 能 力 培 养

—现代数学与中学数学选讲—

谢汉光 主编

责任编辑 应伯根 贾吉柱

*

浙江大学出版社出版发行

杭州五常印刷厂印刷

*

开本：787×1092 32开 印张：7 字数：146千字

1990年12月第1版 1990年12月第1次印刷

印数：0001——2000

ISBN7—308—00640—9

O.086 定价：4.20元

前　言

大学后继续教育是教育学院长期的、主要的培训任务。许多省（市）教育学院已经试办或正在筹办各种层次的继续教育培训班。与学历培训不同，较高层次的继续教育培训班中开设的一些新的课程缺乏教材。浙江省成人高等师范数学学科协作会议认为：为了适应开展继续教育的需要，必需组织力量编写继续教育教材。根据会议的商定，我们编写了《现代数学与中学数学选讲》作为继续教育的试用教材。

本书着眼于提高中学数学教师现代数学的素养，以高观点指导中学数学的教学。为此精选了联系中学数学的十个专题。

本书由浙江教育学院数理系谢汉光副教授主编，各讲编写人员如下：

第一讲至第四讲	谢汉光（浙江教育学院）
第五讲	金炎兴副教授（台州教师进修学院）
第六讲	王岳庭讲师（杭州教育学院）
第七讲、第八讲	曹瑞熊副教授（丽水师专函授部）
第九讲	沈传龙副教授（杭州教育学院）
第十讲	谢汉光（浙江教育学院）

在分工编写的基础上，最后由谢汉光副教授统稿、定稿。

本书在编写中力求深入浅出，简明扼要，联系中学实际。由于水平所限，时间仓促，错误与不足之处难免，敬请

读者指正。

本书得到了各协作编写单位领导的关心与热情的支持，我们在此表示衷心感谢！

编者　　1990年8月

目　录

第一讲　集合论

集合论是一门现代数学。作为数学的语言和基础几乎涉及到一切数学分支，因而在数学中占据极其重要的位置。集合论也是中学数学的基础，它的初等部分已成为中学数学的重要组成部分。

我们知道，康托是集合论的奠基人。本讲着重介绍朴素集合论，有关的历史材料，集合论发展中的问题及公理集合论。

§1　朴素集合论

集合论是现代数学的基础，它的观点和方法是由具体到抽象的有力工具。因而，它早已渗透到了数学的各个分支，渗透到整个中学数学。

集合论的起源，要追朔到*G.Cantor*（1845—1918）的工作，英国著名数学家、哲学家罗素把康托的工作称颂为“可能是这一时代所能夸耀的最巨大的工作。”康托于1873年12月7日给戴特金的信中最早提出集合论的思想，人们把这一天定为集合论诞生的日子。

康托是在研究函数表达为三角级数的唯一性的判别问题时提出集合论的。1874年，康托在《数学杂志》上发表了关于集合论的第一篇论文：“论所有实代数数的集合的一个性质”，提出了集合的概念，规定了集合的运算，提出了所有实代数数的集合是可数的，所有实数的集合是不可数的等论断。1878年，康托又发表了集合论的第二篇论文，进一步发

展了一一对应的思想。从1874年起康托在德国的《数学年鉴》、《数学杂志》上发表了一系列文章，创立了朴素集合论。

一　集合的概念与运算

在数学里和日常生活中，我们会经常遇到集合这个概念。例如，直线上的点集，自然数的集合，某一教室里学生的集合等等。康托首先提出了集合的概念：所谓集合是把我们的直观或思维中确定相互间有明确区别的那些对象（它们叫集合的元素）作为一个整体来考虑。这也就是中学数学集合概念中所强调的集合元素的确定性、互异性与不重复性。

通常我们用大写的英文字母A，B，X，Y…表示集合，用小写字母a，b，x，y，…表示元素，元素a属于集合A记为$a\in A$，否则，记为$a\overline{\in}A$。例如，$2\in Q$（有理数集），$\sqrt{2}\overline{\in}Q$。

表示集合常用两种方法：

1　列举法

一个集合是由属于它的元素所唯一地确定的，因此把它的元素一一列举出来，这样就给出了这个集合。

例如，$A=\{1,\ 2,\ 3\}$

2　描述法

设$p(x)$是一个性质，具有性质$p(x)$的那些x的全体构成一个集合A，于是

$A=\{x: p(x)\}$

例如，$A=\{x: x\in N\wedge x<10\}$

定义1.1　不含有任何元素的集合称为空集，记为ϕ。

定义1.2　设A和B是两个集合，B为A的子集当且仅当B

的每个元素都是A的元素。

B为A的子集表示为 $B\subseteq A$。换言之，$B\subseteq A$ 当且当 $\forall x$：“$x\in B$”$\Rightarrow$“$x\in A$”。

定理1.1 两个集合A和B相等当且仅当A是B的子集同时B是A的子集。

集合A和B相等记为 $A=B$。换言之，$A=B$ 当且仅当 $A\subseteq B\wedge B\subseteq A$。

定义1.3 设A、B是两个集合，称集

$$A\cup B=\{x: x\in A\vee x\in B\}$$

为A与B的并集

例1 若$A=\{x: x\in N\wedge x<5\}$，
$B=\{x: x\in N\wedge 5\leqslant x\leqslant 10\}$

那么 $A\cup B=\{x: x\in N\wedge x\leqslant 10\}$

类似地，可以定义任意多个集合A_1，…，A_n… 的并集

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A = A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$$
$$=\{x: \exists i\in N,\ x\in A_i\}$$

定义1.4 设A、B是两个集合，称集合

$$A\cap B=\{x: x\in A\wedge x\in B\}$$

为A与B的交集。

例2 若 $A=\{x: x\in N\wedge x\leqslant 10\}$，$B=\{x:$
$^2=4\wedge x\in N\}$ 那么

$$A\cap B=\{2\}$$

同样，可以定义任意多个集合A_1，…，A_n，…的交集

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A\ \cap\cdots$$
$$=\{x: \forall i\in N,\ x\in A_i\}$$

定义1.5 设A、B是两个集合，称集合

$$A\setminus B=\{x: x\in A\wedge x\overline{\in} B\}$$

为A与B的差集。

例3 若$A=\{x: x^2=1\wedge x\in N\}$，$B=\{x: x\in N\wedge x\leq 2\}$那么

$$A/B=\phi,\ B\setminus A=\{2\}$$

特别，当$B\subseteq A$时，把差集$A\setminus B$叫做B关于A的补集（余集）。当我们考虑的一切集都是某个固定集合I的子集时，把补某$I\setminus B$简记为$\overline{B}$。

二 集合的基数

1 集合的对等

定义1.6 设有集合A、B，如果存在一个从A到B的一一映射，则说A与B可一一对应。当A与B可一一对应时，就说它们是对等的，记为$A\sim B$。

例4 若$A=\{a_1, a_2, \cdots, a, \cdots\}$那么$A$与$N$对等，即$A\sim N$。

事实上，存在一个A到N的一一映射f

$$f: a_n\to n \qquad (n=1, 2, 3\cdots)$$

例5 若$A=(0,1)$，R为实数集，那么R与A对等，即$R\sim A$

事实上，存在一个R到A的一一映射f

$$f:\quad y=\frac{1}{\pi}arctgx+\frac{1}{2} \qquad x\in R,\ y\in A$$

例6 若A为(a, b)区间，B为$(c、d)$区间，那么与B对等，即$A\sim B$。

事实上，存在一个A到B的一一映射f

$$f_2\quad y=\frac{d-c}{b-a}(x-a)+c \qquad x\in A,\ y\in B$$

显然，对等关系"$\sim$"具有以下基本性质：

1° $A\sim A$ （自反性）

2° 若$A\sim B$，则$B\sim A$ （对称性）

3° 若$A\sim B$，$B\sim C$，则$A\sim C$ （传递性）

设n为某一自然数，记M_n为不超过n的自然数组成的集合

$$M_n=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$$

一个集合A，当A为空集或与某个M_n对等，那么称A为有限集。当$A\sim M_n$时，称n为A的计数，也就是A中元素的个数。我们还规定空集的计数为零。

我们称不是有限集的集合为无限集。

2 可列集

定义1.7 凡与自然数集N对等的集合称为可列集。

由可列集的定义知道，可列集是这样的集合，我们可以把它的一切元素编号，使之成为无穷序列的形式，因此可列集的一般形式为

$$A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots a\ ,\ \cdots\}$$

定理1.1 可列集的任何子集，若不是有限集必是可列集。

证 设A为可列集，于是

$$A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots\}$$

A的非空子集若为B，B中的元素显然是序列

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

的一个子序列

$$a_{n_1},\ a_{n_2},\ \cdots,\ a_{n_k},\ \cdots$$

指标n_1，n_2，…，n_k，…之中，如有最大的数，那么B为有限集，不然则B为一无限集，作一一对应

$$f: a_{n_k} \to K$$

于是$B \sim N$，B为可列集。

定理1.2 任何有限个或可列个可列集的并集仍是可列集。

证 设A，A_2，…为可列集。

$$\begin{array}{l}
A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, \cdots\} \\
A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \cdots, \cdots\} \\
A_3 = \{a_{31}, a_{32}, \cdots, \cdots, \cdots\} \\
A_4 = \{a_{41}, \cdots, \cdots, \cdots, \cdots\} \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots
\end{array}$$

现在把A_1，A_2，A_3，A_4…中所有元素“按对角线”（上图所示）进行编号，得到序列

$$a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, \cdots, a_{n1}, a_{n-1\,2}, \cdots, a_{1n}\cdots$$

其中若有元素重复出现，在这一序列中把这些重复的元素去掉后所得仍是可列的，因此$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$中所有的元素与一切自然数之间可建立一一对应。这表明$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A$是可列集。

例7 正有理数集Q_+是可列集。

事实上，任一正有理数r可表示为$r = \dfrac{p}{q}$，p、q为既约正整数，作一一对应

$$f: \frac{p}{q} \to 2^p 3^q$$

显然，象$f(\frac{p}{q})=2^p3^q$的全体M是N的子集。由定理1知M是可列集，即$M\sim N$。由于存在Q_+到M上的一一对应f，所以$Q_+\sim M$，由对等关系的传递性知$Q_+\sim N$，因此Q_+为可列集。

同样可知，负有理数集Q_-是可列集。

由定理1.2可知，有理数集$Q=Q_+\cup\{0\}\cup Q_-$是可列集。

设有整系数整式方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0\qquad(a_0\neq 0)$$

它的实数根叫代数数，可以证明代数数的全体是可列集。

定理1.3 实数区间$0<x\leqslant 1$是不可列集。

证 用反证法证之。设$(0,\ 1]$是可列集，那么

$$(0,\ 1]=\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots\}$$

将$(0,\ 1]$中的数用十进位无限小数表示，对于有限位小数改用9循环表示，如0.5表示为0.4999…，1表示为0.9999…于是对于任一$x\in(0,\ 1]$，x只有一种十进位小数表示。

设

$$x_1=0.a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ \cdots a_{1i}\cdots,$$
$$x_2=0.a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ \cdots a_{2i}\cdots,$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_i=0.a_{i1}\ a_{i2}\ a_{i3}\ \cdots a_{ii}\cdots,$$
$$\cdots\cdots$$

令 $c=0.c_1\ c_2\ c_3\cdots c_i\cdots$，其中

$$c_i=\begin{cases}2 & a_{ii}=1\\ 1 & a_{ii}\neq 1\end{cases}\qquad i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ j,\ \cdots$$

显然，$c\in(0,1]$，但c不在序列

$$x_1,\ x_2,\ ,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$$

之中，因为对于每个i，，$c_i\neq a_{ii}$，所以$c\neq x_i$。这和序列$\{x_i\}$是区间$(0,1]$中全部的实数的假设相矛盾。因此，$(0,1]$是不可列集。

3 无限集

我们知道，无限集有两类：一类是可列集，例如自然数集，整数集，有理数集，代数数集等等都是可列集；另一类是不可列集，例如，区间$(0,1]$，$[a,b]$，$(-\infty,+\infty)$等等都是不可列集。无限集有哪些主要性质呢？“无限”的思想在古代数学的发展过程曾引起人们的困惑。芝诺关于运动的四个有名的悖论较长时间引起人们的争论。其中有一个所谓龟兔赛跑问题，譬如说兔子一分钟跑1000米，乌龟一分钟跑100米，乌龟在兔子之前1000米。芝诺的论点是，兔子永远赶不上乌龟。因为当兔子前进了1000米时，乌龟还在它前面100米，而在兔子走完这100米时，乌龟仍在它前面10米处。如此继续，直至无穷。在这个龟兔赛跑的悖论中，乌龟和兔子都占据了无限个位置，另外这些位置之间又可以建立一一对应的关系。当时使人迷惑不解的是：若兔子赶上乌龟，乌龟到过的地方只是兔子到过的地方的一部分，而另一方面又要等于兔子位置的个数（因为两者一一对应）。康托在1882年给出了一一对应的思想后，揭示了“无限”的本质，一事物的整体可以“等于”它的一部分，因而就能否定这一悖论所作的论证，真正解决了这种与无限有关的问题。

定理1.4 任一无限集合A均包含一个可列子集。

证 由于集合A非空，可任取$a_1\in A$。而$A-\{a_1\}$仍然不是空集，又可取$a_2\in A-\{a_1\}$。如此继续下去，当取好a_1，

$_2, \cdots a_n$后，再从非空集合

$$A-\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

中取a_{n+1}，……，我们得到一个由A中元素所构成的集合 B

$$B=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$$

显然，B是A的可列子集。

定理1.5 无限集必与它的一个真子集对等。

证 由上面的定理知道，无限集A必含有可列子集$B=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$。作集合

$$\{a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\}\cup\widehat{A}=A_1$$

其中$\widehat{A}=A-B$。A_1为A的真子集，因为$a_1\in A$，但$a_1\overline{\in}A_1$。A与A_1可以建立一一对应，对应关系f如下：

$$f: \begin{cases} a_i\to a_{i+1} & i=1, 2, \cdots \\ x\to x & x\in\widehat{A} \end{cases}$$

因此，A_1为A的真子集并且与A对等。

例8 自然数集N与其真子集（偶数集）是对等的。

事实上，我们可以建立自然数集N与偶数集的一一对应关系f

$$f: n\to 2n \qquad n\in N$$

例9 实数集与其真子集无理数集是对等的。

事实上，设R与B分别表示实数集与无理数集。由定理1.4，在无理数集B中取出的可列真子集设为P，那么Q（有理数集）$\cup P$是可列集。于是

$$Q\cup P\sim P。$$

记$B-P=B_1$，那么$R=(Q\cup P)\cup B_1$，$B=P\cup B_1$，由于

$$Q\cup P\sim P;\ B_1\sim B_1$$

所以，$R\sim B$。

不是代数数的实数称为超越数。用例 9 的方法可以证实

超越数的全体与实数集对等。这个事实不仅告诉了我们超越数是存在的，而且远比代数数要多。在历史上，康托创立集合论以前有不少数学家努力去证明超越数的存在。例如，柳费尔（*Liouville*）曾用较长的篇幅去证明e是超越数。而用现在抽象集合论的方法不仅肯定了超越数的存在，而且断定它们的全体与实数集对等。

4 集合的基数

事物的多或少的概念，是通过比较形成的。如果两个集合都是有限集，我们可用两种方法来比较哪一个集合的元素多，哪一个集合的元素少。一个办法是分别就两个集合的元素个数进行计数，另一个办法就是在这两个集合元素间建立对应关系，用一一对应来反映数目的多少。如果两个集合是无限集，计数的办法就不再适用，这时可用一一对应来建立集合的基数的概念。

定义1.8 我们将相互对等的集归于同一类，不对等的集属于不同的类。对这样的每类集给予一个记号，称这个记号是这一类集合中每个集的基数。集A的基数记为$\overline{\overline{A}}$。

因此，任何相互对等的集具有相同的基数，不对等的两集其基数是不同的。

若A为有限集，规定A的计数（即其所含元素的个数）为A的基数。通常记可列集的基数为$\aleph_0$。（读作“阿列夫零”）。于是，整数集，有理数集，代数数集等集的基数都是$\aleph_0$。

定义1.9 称0与1之间实数全体所成之集的基数为连续点集的基数，记之为C。

因此，无理数集，超越数集，实数集等集的基数都是C。

关于基数大小的比较，我们有如下的定义，