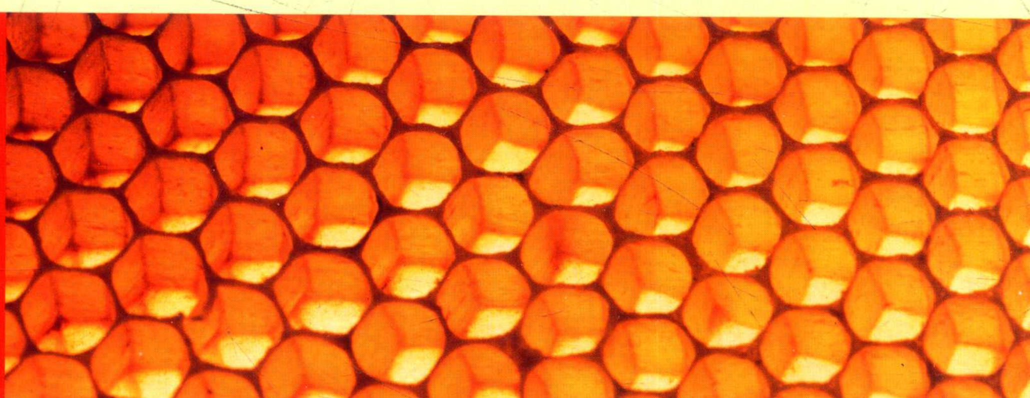
旷雨阳　刘维江／编著

数学分析精要解读

SHUXUE FENXI
JINGYAO JIEDU



中国科学技术大学出版社

旷雨阳　刘维江 / 编著

数学分析精要解读

SHUXUE FENXI
JINGYAO JIEDU

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书是为适应高等学校数学学科教学改革的需要，结合作者多年来教学实践的经验和体会编写而成的，其中不乏创新性的见解，同时也参考了大量的文献，尽力形成自己的独特的风格.

全书分为13章，内容涉及极限、函数的连续性、微分中值定理、积分学、凸函数及其应用、不等式与函数的零点问题、级数、多元函数微分学、隐函数微分法及函数相关性、含参变量积分与广义积分、重积分、曲线积分、曲面积分. 内容的编排顺序基本上和通用的数学分析教材相吻合. 在素材选取的深度、难度和宽泛度上，比一般的数学分析的基础教材有明显的提升. 对较基础性的知识点只是简要地加以介绍，而将重点放在解题思想的挖掘与提炼上. 选题具有很强的典型性、灵活性、启发性、趣味性和综合性，对培养学生的能力极为有益，可供数学系各专业师生及有关读者参考. 每章配备的习题难度梯度明显，旨在拓宽基础、启发思维、熟练方法，培养学生分析问题和解决问题的能力，作为教材的补充和延伸.

本书可作为数学分析课程的辅助教材，对正在学习数学分析的读者、学过数学分析或高等数学准备学习后继课程的读者以及准备报考研究生的读者都会有所帮助. 另外，还可供高校教师使用和参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析精要解读/旷雨阳，刘维江编著. —合肥：中国科学技术大学出版社，2016.11

ISBN 978-7-312-04041-2

Ⅰ. 数… Ⅱ. ① 旷… ② 刘… Ⅲ. 数学分析 Ⅳ. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 251625 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路96号，230026
http://press.ustc.edu.cn
印刷 合肥市宏基印刷有限公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 710 mm×1000 mm 1/16
印张 21.5
字数 422千
版次 2016年11月第1版
印次 2016年11月第1次印刷
定价 49.00元

前　言

“数学分析”是高等数学的一门重要基础课，也是数学本科专业的基础课程，是进一步学习各有关后续课程的阶梯，所以“数学分析”在数学专业课程的学习中起着至关重要的作用.这门课程经过近 3 个世纪的发展和完善，已经形成了一套严密的、抽象的、形式化和逻辑性很强的理论体系.学习这门课程通常会遇到较大的困难，难以学深学透、融会贯通、真正掌握这门课程的精髓.因此，有必要对其内容进行细嚼慢咽，不断强化.一方面要充分发挥教师课堂教学的主导作用，另一方面也要充分调动每位学生学习的积极性与主动性，促使他们自觉地接受持之以恒、充分而严格的数学训练，能真正地走近数学，从而加深对数学内容的理解.

“数学分析”的许多概念有一定的抽象性，许多异常深刻的重要结论所进行的理论推演较为复杂.随着高等教育的改革与发展以及基础教育师资队伍建设的需要，更多的大学数学系学生、在职中学数学教师为提高数学专业知识学习“数学分析”课程.基于上述考虑，我们在多年教学实践的基础上，编写了本书，目的在于使在学读者可以进一步巩固知识、加强训练，掌握方法、开阔思路，夯实基础、提高能力，主要阐述数学分析中的基本概念及常用方法与技巧，同时也适当介绍了一些新思想、新内容及新成果.

本书是结合作者多年的数学教学和科学研究的实践，经过长时间探讨，辛勤劳动的成果，是基于本学科思考了素质教育的内涵、通向素质教育的途径以及素质教育评价体系等问题，同时兼顾了现行教学大纲、考试大纲的要求并结合了作者的教学经验编写而成的.本书的特点一是结合教学上的重点和学生学习中的难点进行精讲，给出了多种解题思路、方法，并尽可能做了深入的剖析和比较，从解题思想的建立到思路的逐步展开做了分析介绍，许多问题给出了多种解决途径，启发读者的思路，培养读者的学习能力，使读者能触类旁通，从而轻松学习、解题和通过考试，培养了读者数学素养的现代教育思想在教学过程中的应用.二是简要概述每节中的基本概念、重要定理和公式，并对要点与难点作适当分析，选取若干个紧扣内容的典型例题和问题，我们尽可能使问题有新意，题型有特色.在方法上引进和吸收了近年来发表的研究新成果，有些则属于作者长期教学实践的总结.通过对这些典型题目的分析和求解，使读者从中得到启发，有助于提高其分析问题和解决问题的能力.

本书的编写,突出数学的思想与方法,突出数学分析的知识体系,突出知识背景、知识链、知识点的意义与作用.本书对“数学分析”学习中的重点问题、难点问题、特殊问题等,以专题形式集中对某一问题多维度、多层面讲解,使问题能讲细、讲透,让学生学习之后能解决相关问题.编著方法以教材知识结构为序,一个难点写一个专题.各专题既有联系,又可以独立成篇,内容明白易懂,并富有启发性,方法容易掌握.

本书还专门讨论了涉及不等式方面的问题.该问题是数学分析研究的重要对象,也是分析中应用非常广泛的工具之一.我们给出了许多分析中重要的不等式及其证明,在此基础上又讨论了许多不等式方面的习题,这对提高数学分析的综合水平是有帮助的.

另外,本书有部分内容选择了一定数量涉及常微分方程的题目.“常微分方程”是数学系主要的课程之一,它的一般性理论和数学分析有直接的联系.引入部分常微分方程的题目对提高分析的应用水平很有帮助,同时又可以利用常微分方程的一般理论和方法来解决数学分析中的问题.

本书介绍了作者对许多问题的独立见解.作为解题方法,它既不违背教学大纲的要求,又具有突破性、普适性和简明性.

本书的教学实践表明,报考硕士研究生者可以用不长的时间,花费较少的精力,达到事半功倍之效.

本书是报考理工类硕士研究生的广大考生应试复习的专门用书,也可以作为理工科高等院校本科生的学习参考书和数学教师的教学参考书.

中国科学技术大学出版社对本书的编写给予了很大的帮助,在此表示衷心感谢.作者在成书过程中借鉴了一些资料的内容,在此深表谢忱.

限于作者学识水平,书中如有不当之处,敬请斧正.

作　者*

2016 年 1 月于安顺学院

---

* **旷雨阳**　男,副教授,中共党员.研究方向为偏微分方程与最优控制.自 2007 年在贵州省安顺学院从事数学教学与科研一线工作.讲授“数学分析选讲”“常微分方程”“初等数论”“运筹学”“微分几何”“概率论与数理统计”“离散数学”等多门课程.曾获得安顺学院“先进个人”“优秀辅导员”称号,荣获贵州省数学建模指导教师一等奖、成功参赛奖等.在国内外公开刊物上发表文章二十多篇,其中核心期刊十多篇.论文《谈谈数学分析与泛函分析的某些递进关系》荣获安顺市第五次自然科学评选活动中的综合类优秀奖.

刘维江　男,副教授,中共党员.在安顺学院任教三十多年.曾任贵州省安顺师专校工会副主席、安顺学院数学与计算机科学系党总支副书记、系主任.讲授“数学分析”“实变函数”“复变函数”“概率论与数理统计”“离散数学”等多门课程.多次被评为“优秀党员”“优秀教师”“先进班主任”“贵州省教育工会先进工作者”等.在国内外公开刊物上发表文章三十多篇.论文《函数方程解法及其应用》获贵州省安顺市首届自然科学论文评选一等奖.

目　　录

第 1 章　极　　限

极限理论贯穿于数学分析之中，它是从有限认识到无限认识、从近似认识到精确认识的一种数学方法，是数学分析有别于初等数学的根本标志.

极限理论的两个基本问题是：(1) 极限存在性的论证；(2) 极限值的计算. 它们各有侧重，但彼此密切相关，若求出某极限的值，则其存在性被证实；反之，若某极限被证明存在，则其值也可求出.

通常极限分数列极限和函数极限，它们有平行的理论、类似的方法，彼此间有深刻的内在联系.

本章主要介绍极限理论的两个基本问题：(1) 论证极限存在性；(2) 求极限的方法与技巧.

1.1　极限问题论证

1.1.1　用定义证明极限的存在性

要点　(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$（有限数），即 $\forall \varepsilon>0, \exists N, \forall n>N$，有 $|a_n - a|<\varepsilon$. 关键在于由 ε 找出 N.

方法　由 $|a_n - a|$ 出发，经化简、整理，必要时适当放大得 $\varphi(n)$，再由 $\varphi(n)<\varepsilon$ 解出 $n>G(\varepsilon)=N$，即 $|a_n - a|\leqslant\varphi(n)<\varepsilon \Rightarrow n>G(\varepsilon)=N$.

注　放大的原则是：① $\varphi(n)$ 比较简单，以便从“$\varphi(n)<\varepsilon$”中解出 n；② $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n)=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$（有限），即 $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x: 0<|x-a|<\delta$，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 关键在于由 ε 找出 δ，方法与数列极限类似：

$$|f(x)-A|\leqslant\varphi(|x-x_0|)<\varepsilon \Rightarrow |x-x_0|<G(\varepsilon)=\delta.$$

例 1.1 用极限定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+n}{n^3+2}=1$.

证明 当 $n\geqslant 3$ 时，$\forall\varepsilon>0$，$\left|\dfrac{n^3+n}{n^3+2}-1\right|=\dfrac{|n-2|}{n^3+2}=\dfrac{n-2}{n^3+2}<\dfrac{1}{n}<\varepsilon\Rightarrow n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，故取 $N=\max\left\{3,\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$，于是$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，$\forall n>N$，有$\left|\dfrac{n^3+n}{n^3+2}-1\right|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+n}{n^3+2}=1$.

注 在使用"放大法"求 N 时，为便于化简放大，有时需预先假定 $n\geqslant n_0$（自然数），最后取 $N=\max\{n_0,N(\varepsilon)\}$. 在本例中，为去掉$\dfrac{|n-2|}{n^3+2}$的绝对值，预先假定 $n\geqslant 3$，最后取 $N=\max\left\{3,\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$.

例 1.2 求证$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^b}{a^n}=0$（$a>1$，$b$ 是实数）.

证明 $\forall\varepsilon>0$，要找 N，使$\forall n>N$，有$\left|\dfrac{n^b}{a^n}\right|<\varepsilon$，不妨使 $b\geqslant 0$，令 $a=1+p$，$p>0$. 当 $n>[b]+2$ 时，有

$$
\begin{aligned}
\frac{n^b}{a^n}&\leqslant\frac{n^{[b]+1}}{(1+p)^n}=\frac{n^{[b]+1}}{1+np+\dfrac{n(n-1)}{2!}p^2+\cdots+p^n}\\
&\leqslant\frac{n^{[b]+1}}{\dfrac{n(n-1)\cdots(n-[b]-1)}{([b]+2)!}p^{[b]+2}}\\
&\leqslant\frac{([b]+2)!}{p^{[b]+2}}\cdot\frac{n^{[b]+1}}{(n-[b]-1)^{[b]+1}}\cdot\frac{1}{n}.
\end{aligned}
$$

当 $n>2([b]+2)$ 时，有$\dfrac{n}{n-[b]-1}\leqslant\dfrac{n}{n/2}=2$，从而$\dfrac{n^b}{a^n}\leqslant\dfrac{([b]+2)!}{p^{[b]+2}}\cdot 2^{[b]+1}\cdot\dfrac{1}{n}=M\cdot\dfrac{1}{n}$，其中 $M=\dfrac{([b]+2)!}{p^{[b]+2}}\cdot 2^{[b]+1}$. 故只要$\dfrac{M}{n}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{M}{\varepsilon}$，就有$\left|\dfrac{n^b}{a^n}\right|<\varepsilon$成立，因此，取 $N=\max\left\{\dfrac{M}{\varepsilon},2([b]+2)\right\}$，$\forall n>N$，有$\left|\dfrac{n^b}{a^n}\right|<\varepsilon$.

例 1.3 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

分析 为证$\forall\varepsilon>0$，$\exists N^*$，$\forall n>N^*$，有$\left|\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|<\varepsilon$，取充分大的 $m\in\mathbf{N}$，$\forall n>m$，有

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|$$

$$\leqslant \frac{|a_1 + a_2 + a_m - ma|}{n} + \frac{|a_{m+1} - a| + \cdots + |a_n - a|}{n},$$

可证上述不等式右端每一项都可以任意小.

证明 由$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,即$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N_0 \in \mathbf{N}$, $\forall\, n > N_0$,有$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$,对固定的 N_0,有 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_0} - N_0 a}{n} = 0$,则 $\exists\, N_1 \in \mathbf{N}$, $\forall\, n > N_1$,有 $\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_0} - N_0 a}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$,于是$\forall\, \varepsilon > 0$,取 $N^* = \max\{N_0, N_1\}$, $\forall\, n > N^*$,有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a\right| \\
&\leqslant \frac{|a_1 + a_2 + a_{N_0} - N_0 a|}{n} + \frac{|a_{N_0+1} - a| + \cdots + |a_n - a|}{n} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n - N_0}{n}\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$.

注 (1) 为证变数(如$\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i - a)\right|$)任意小,将其适当放大成有限多项(本项将其分成两项),然后证其中每一项都能任意小,这里用到了“分段论证法”,这是用“ε-N”定义证明一些极限问题的常用方法.原则是:抓住特点,各个击破,常用于处理“连加式”或“连乘式”.

(2) 本例结论为:若$\{a_n\}$有极限 a,则其前 n 项算术平均值的数列$\left\{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right\}$也有极限$a$.

(3) 由本例可得出一些极限:当$\alpha > 0$时,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k+1}\right)^\alpha = 1, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[k]{k} = 1.$$

(4) 可证$\alpha = +\infty$的情况:事实上,由已知,可得$\forall\, M > 0$, $\exists\, N_1$, $\forall\, n > N_1$,有$a_n > 2M$,且

$$\begin{aligned}
\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1} + a_{N_1+1} + \cdots + a_n}{n} \\
&\geqslant \frac{n - N_1}{n}\cdot 2M - \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1}}{n}.
\end{aligned}$$

对固定的 N_1, $\exists\, N_2$, $\forall\, n > N_2$ 时,$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_N}{n} < \frac{M}{3}$,取 $n > 3N_1$,有$\frac{n - N_1}{n}\cdot$

$2M>\frac{4}{3}M$，从而当 $n>N=\max\{3N_1,N_2\}$ 时，有

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\frac{n-N_1}{n}\cdot 2M-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}}{n}>\frac{4}{3}M-\frac{M}{3}=M,$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=+\infty$.

类似可证 $\alpha=-\infty$ 的情况.

例 1.4 证明 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4-1}{x-1}=4$.

证明 $\forall\varepsilon>0$，$\left|\frac{x^4-1}{x-1}-4\right|=|(x-1)(x^2+2x+3)|$. 设 $|x-1|<2$，有 $|x|<3$，$|x^2+2x+3|\leqslant|x|^2+2|x|+3\leqslant18$，所以 $\left|\frac{x^4-1}{x-1}-4\right|\leqslant18|x-1|<\varepsilon$，即 $|x-1|<\frac{\varepsilon}{18}$，取 $\delta=\min\left\{2,\frac{\varepsilon}{18}\right\}$，于是 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x:0<|x-1|<\delta$，有 $\left|\frac{x^4-1}{x-1}-4\right|<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4-1}{x-1}=4$.

注 (1) 这里又一次用到适当放大法，要将“$x\to1$”在放大过程中，保留 $|x-1|$，否则不能取定 δ.

(2) 用同样的方法可证 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^n-1}{x-1}=n$.

1.1.2 用柯西(Cauchy)准则判断极限

数列 $\{a_n\}$ 的柯西收敛准则（$\{a_n\}$ 本身的结构特征）：对下标充分大的任意两项，能否都任意接近，即其差的绝对值能否任意小来判断 $\{a_n\}$ 是否收敛；函数极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 的柯西收敛准则（$f(x)$ 在 $\mathring{U}(a)$ 的取值特征）：对充分接近 a 的任意两自变量，其对应的函数值之差的绝对值能否都任意小来判断 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 是否存在. 两者的含义本质上是相同的.

用柯西准则常可以判断数列或函数在理论上是否有极限，这在很多理论问题上往往很有用，有时从存在性也可具体地求出该极限值.

要点 (1) 数列 $\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n,m>N$，有 $|a_n-a_m|<\varepsilon\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>N,\forall p\in\mathbf{N}$，有 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$；

(2) 数列 $\{a_n\}$ 发散 $\Leftrightarrow\exists\varepsilon_0>0,\forall n\in\mathbf{N},\exists n_0,m_0>N$，有 $|a_{n_0}-a_{m_0}|\geqslant\varepsilon_0\Leftrightarrow\exists\varepsilon_0>0,\forall n\in\mathbf{N},\exists n_0>n,\exists p\in\mathbf{N}$，有 $|a_{n_0+p}-a_{n_0}|\geqslant\varepsilon_0$；

(3) 函数极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x',x''\in\mathring{U}(a,\delta)$，有

$|f(x')-f(x'')|\leqslant\varepsilon$；

(4) 函数极限$\lim\limits_{x\to a}f(x)$不存在$\Leftrightarrow\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x',x''\in\mathring{U}(a,\delta)$，有$|f(x')-f(x'')|\geqslant\varepsilon$.

注 (1) 运用数列极限的柯西准则判别数列收敛性，在绝对值不等式中涉及两个下标(m 和 n 或 n 和 p)，所要确定的正整数 N 只与 ε 有关，而与 m 或 p 无关，因此，在化简、整理和适当放大$|a_n-a_m|$或$|a_n-a_{n+p}|$时，应设法去掉 m 或 p，使所得的式子只含 n.

(2) 运用函数极限的柯西准则判断$\lim\limits_{x\to a}f(x)$的收敛性，在绝对值不等式中涉及自变量的两个值(x'和x'')，所要确定的 $\delta(>0)$只与 ε 有关，而与 x''无关，因此在化简、整理和适当放大$|f(x')-f(x'')|$时，应设法去掉 x''，使所得式子只含$|x'-a|$.

(3) 对 $x\to a^+,x\to a^-,x\to+\infty,x\to-\infty$等有类似的结论.

例 1.5 对任意的 a，证明数列 $a_n=1+a+\dfrac{a^2}{2!}+\cdots+\dfrac{a^n}{n!}$有极限.

证明 当 $n+2\geqslant 2|a|$时，$\forall n,m\in\mathbf{N}$，有

$$\begin{aligned}|a_n-a_{n+m}|&=\left|\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots+\frac{a^{n+m}}{(n+m)!}\right|\\&\leqslant\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}\left[1+\frac{|a|}{n+2}+\frac{|a|^2}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{|a|^{m-1}}{(n+2)^{m-1}}\right]\\&\leqslant\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{|a|}{n+2}}\leqslant\frac{2|a|^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2|a|^{n+1}}{(n+1)!}=0$，即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，$\forall n>N$，有 $\dfrac{2|a|^{n+1}}{(n+1)!}<\varepsilon$，所以$|a_n-a_{n+m}|<\varepsilon$. 由柯西准则可知，该数列存在极限(或收敛).

例 1.6 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在.

证明 (方法 1)取 $\varepsilon_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\forall N$，取 $n'=2N\pi+\dfrac{1}{2}\pi,m'=2N\pi+\dfrac{3}{2}\pi$，则

$$2N\pi+\frac{\pi}{4}<n'<2N\pi+\frac{3}{4}\pi,\quad 2N\pi+\pi<m'<2N\pi+2\pi,$$

因此 $\sin n'>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin m'<0$，故$|\sin n'-\sin m'|>\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\varepsilon_0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在.

(方法 2)反证法，若$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=a\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n+2)=a$，则

$$\lim_{n\to\infty}2\sin 1\cos(n+1)=\lim_{n\to\infty}[\sin(n+2)-\sin n]=a-a=0,$$

可得

$\lim\limits_{n\to\infty}\cos(n+1)=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\cos n=0$，　$\lim\limits_{n\to\infty}\sin 2n=\lim\limits_{n\to\infty}2\sin n\cos n=0$，从而 $a=\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=0$，但 $1=\lim\limits_{n\to\infty}(\cos^2 n+\sin^2 n)=0$，矛盾！故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在.

（方法 3）取 $\varepsilon_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，若 $A\in[0,1]$，对 $\forall N$，取 $n=2N\pi+\dfrac{3}{2}\pi>N$，则有 $2N\pi+\dfrac{5}{4}\pi<n<2N\pi+\dfrac{7}{4}\pi$，可得 $\sin n<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow|\sin n-A|>\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\varepsilon_0$，知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\neq A$. 同理，若 $A\in[-1,0]$，也有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\neq A$. 故对 $\forall A\in[-1,1]$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\neq A$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在.

例 1.7（压缩映像原理）　若 $\exists r\in(0,1)$ 及 $\exists N_0\in\mathbf{N}$，$\forall n>N_0$，有 $|a_{n+1}-a_n|\leqslant r|a_n-a_{n-1}|$，则数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证明　当 $n>N_0$ 时，有

$$|a_{n+1}-a_n|\leqslant r|a_n-a_{n-1}|\leqslant r^2|a_{n-1}-a_{n-2}|\leqslant\cdots\leqslant r^{n-N_0}|a_{N_0+1}-a_{N_0}|,$$

则

$$\begin{aligned}|a_{n+p}-a_n|&\leqslant|a_{n+p}-a_{n+p-1}|+|a_{n+p-1}-a_{n+p-2}|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|\\&\leqslant(r^{n+p-N_0}+r^{n+p-N_0-1}+\cdots+r^{n-N_0})|a_{N_0+1}-a_{N_0}|\\&=\frac{1-r^p}{1-r}\cdot r^{n-N_0}|a_{N_0+1}-a_{N_0}|\\&\leqslant\frac{1}{1-r}\cdot r^{n-N_0}|a_{N_0+1}-a_{N_0}|<\varepsilon.\end{aligned}$$

不妨设 $a_{N_0+1}\neq a_{N_0}$，$\forall\varepsilon>0$，取 $N=N_0+\left[\dfrac{1}{\ln r}\ln\dfrac{(1-r)\varepsilon}{|a_{N_0+1}-a_{N_0}|}\right]+1$，则 $\forall n>N$，$\forall p\in\mathbf{N}$，都有 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$，故 $\{a_n\}$ 收敛.

注　本题是判断 $\{a_n\}$ 收敛的一个充分条件，对解决某些由递推公式给出的数列的极限问题有时十分有效.

1.1.3　数列的单调有界原理

要点　(1) 证 $\{a_n\}$ 的单调性，通常考察 $a_{n+1}-a_n$ 的符号，若 $a_n>0$，则可考察 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 是否恒大于或等于 1（或小于或等于 1），若可得到一个一元可导函数的递推公式 $a_{n+1}=f(a_n)$，则可由 $f'(x)$ 的符号来确定其单调性.

(2) 证 $\{a_n\}$ 的有界性，一般可利用数学归纳法或已知不等式推证.

(3) 有的数列是先证有界性，再利用有界性证单调性，有的则相反.

(4) 利用某些原理证明了 $\{a_n\}$ 收敛，则可利用其递推公式求出其极限.

例 1.8 设 $a_1=4, a_n=\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{a_{n-1}}{2}, n=2,3,\cdots$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

解

$$a_{n+1}-a_n=\frac{a_n^2+2-2a_n^2}{2a_n}=\frac{2-a_n^2}{2a_n}. \quad ①$$

现证 $2-a_n^2\leqslant 0$，即证 $a_n\geqslant\sqrt{2}, n=1,2,\cdots$. 事实上

$$\frac{a_n}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{a_{n-1}}{2}\right)\geqslant\sqrt{\frac{1}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

故 $\{a_n\}$ 单调有下界 $\sqrt{2}$，必存在极限，设为 a，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a\ (>0)$.

对式①两边取极限，得 $a-a=\frac{2-a^2}{2a}$，解得 $a=\sqrt{2}$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\sqrt{2}$.

例 1.9 设 $a_1>0, a_{n+1}=\frac{c(1+a_n)}{c+a_n}$，$c>1$ 且为常数，求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

解 (方法 1)可证：(1) 若 $a_1=\sqrt{c}$，则 $a_n=\sqrt{c}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\sqrt{c}$；(2) 若 $a_1>\sqrt{c}$，则 $\{a_n\}$ 单调递减有下界 $\sqrt{c}\Rightarrow\{a_n\}$ 收敛；(3) 若 $0<a_1<\sqrt{c}$，则 $\{a_n\}$ 单调递增有上界 $\sqrt{c}\Rightarrow\{a_n\}$ 收敛. 由 $a_{n+1}=\frac{c(1+a_n)}{c+a_n}$，令 $n\to\infty$，记 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，得 $a=\frac{c(1+a)}{c+a}$，解得 $a=\pm\sqrt{c}$，因 $a_1>0$，取 $a=\sqrt{c}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\sqrt{c}$.

(方法 2)由题设，用数学归纳法易得 $a_n>0, n\in\mathbf{N}$，

$$\begin{aligned}|a_{n+1}-a_n|&=\left|\frac{c(1+a_n)}{c+a_n}-\frac{c(1+a_{n-1})}{c+a_{n-1}}\right|=\frac{c(c-1)|a_n-a_{n-1}|}{(c+a_n)(c+a_{n-1})}\\&<\frac{c(c-1)|a_n-a_{n-1}|}{c^2}=\left(1-\frac{1}{c}\right)|a_n-a_{n-1}|,\end{aligned}$$

即 $|a_{n+1}-a_n|<r|a_n-a_{n-1}|, n=2,3,\cdots$，其中 $0<r=1-\frac{1}{c}<1$，故由压缩映像原理知 $\{a_n\}$ 收敛，以下同方法 1.

注 可用拉格朗日中值定理推导出不等式 $|a_{n+1}-a_n|<r|a_n-a_{n-1}|$，取 $f(x)=\frac{c(1+x)}{c+x}$，则 $f'(x)=\frac{c(c-1)}{(c+x)^2}$. 当 $c>1, x>1$ 时，有 $0<f'(x)<\frac{c(c-1)}{c^2}=1-\frac{1}{c}<1$，$a_{n+1}-a_n=f(a_n)-f(a_{n-1})=f'(\xi_n)(a_n-a_{n-1})$，其中 ξ_n 在 a_n 与 a_{n-1} 之间，又 $a_n>0$，$a_{n-1}>0$，则 $\xi_n>0$，$0<f'(\xi_n)<1-\frac{1}{c}$，从而 $|a_{n+1}-a_n|\leqslant\left(1-\frac{1}{c}\right)|a_n-a_{n-1}|$.

例 1.10 证明下列极限存在：$\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt{n\sin\frac{1}{n}+\sqrt{n\sin\frac{1}{n}+\cdots+\sqrt{n\sin\frac{1}{n}}}}}_{n\text{ 层根号}}$.

证明 令 $a_n=\underbrace{\sqrt{n\sin\frac{1}{n}+\sqrt{n\sin\frac{1}{n}+\cdots+\sqrt{n\sin\frac{1}{n}}}}}_{n\text{ 层根号}}$，现证$\{a_n\}$递增且有上界，取 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x},x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. 因为 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}\cos x(x-\tan x)<0,x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $f(x)$ 在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内单调递减，$f\left(\dfrac{1}{n}\right)>f\left(\dfrac{1}{n-1}\right)$，即$\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}>\dfrac{\sin\frac{1}{n-1}}{\frac{1}{n-1}}$，也就是 $n\sin\dfrac{1}{n}>(n-1)\sin\dfrac{1}{n-1}>0$，于是

$$
\begin{aligned}
a_n&>\underbrace{\sqrt{n\sin\frac{1}{n}+\sqrt{n\sin\frac{1}{n}+\cdots+\sqrt{n\sin\frac{1}{n}}}}}_{n-1\text{ 层根号}}\\
&>\underbrace{\sqrt{(n-1)\sin\frac{1}{n-1}+\sqrt{(n-1)\sin\frac{1}{n-1}+\cdots+\sqrt{(n-1)\sin\frac{1}{n-1}}}}}_{n-1\text{层根号}}\\
&=a_{n-1},
\end{aligned}
$$

即 $a_n>a_{n-1},n=2,3,\cdots$，所以$\{a_n\}$递增. 又 $\sin\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{n}\Rightarrow n\sin\dfrac{1}{n}<1$，所以 $a_n<\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}<2$，故$\{a_n\}$有上界，于是$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

注 证$\{a_n\}$的单调性时，较难建立 a_n 与 a_{n-1} 间的递推关系式，转而考虑 a_n 的表达式，其“基本元素”是 $n\sin\dfrac{1}{n}=\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$，从而引入辅助函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

1.1.4 海涅(Heine)定理及相关命题

要点 (1) 海涅定理：设 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 内有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\{x_n\}\subset\mathring{U}(x_0,\delta_0)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，都有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A\Leftrightarrow\forall\{x_n\}\subset\mathring{U}(x_0,\delta_0)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，$\{f(x_n)\}$都收敛.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在只需满足下列条件之一：

① $\exists\{x_n\}\subset\mathring{U}(x_0,\delta_0)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$不存在；

② $\exists\{x_n'\},\{x_n''\}\subset\mathring{U}(x_0,\delta_0)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n'=x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n''=x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n')=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n'')=B$，但$A\neq B$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\Leftrightarrow\forall\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$，都有$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=A\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=A\Leftrightarrow\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=A$.

注 (1) 海涅定理亦称归纳(结)原则，它揭示了数列(离散变量)极限与函数(连续变量)极限间深刻的内在联系，在一定条件下两者可相互转化，对处理极限问题有很重要的作用：

① 可利用数列极限性质导出函数极限的相应性质，可较方便地否定函数极限的存在；

② 通过把数列的问题转化成函数问题，利用函数的连续性、可微性和可积性等较方便地导出数列的有关结论.

(2) 关于数列$\{x_n\}$上、下极限可用“ε-N”、子列的极限和确界的极限进行描述，设$\{x_n\}$为有界数列.

① 用“ε-N”描述：$\overline{A}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>N$，恒有$x_n<\overline{A}+\varepsilon$且对$\forall\varepsilon>0,\forall N,\exists n>N$，使$x_n>\overline{A}-\varepsilon$；

$\underline{A}=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>N$，恒有$x_n>\underline{A}-\varepsilon$且$\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>N$，使$x_n<\underline{A}+\varepsilon$.

② 用子列的极限描述：$\overline{A}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\Leftrightarrow\exists\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$，使$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\overline{A}$，且对$\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$，当$\{x_{n_k}\}$收敛时，都有$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}\leqslant\overline{A}$；

$\underline{A}=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\Leftrightarrow\exists\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$，使$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\underline{A}$，且对$\forall\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$，当$\{x_{n_k}\}$收敛时，都有$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}\geqslant\underline{A}$.

③ 用确界的极限描述：$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\geqslant n}x_k=\inf\limits_{n}\sup\limits_{k\geqslant n}x_k$；$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{k\geqslant n}x_k=\sup\limits_{n}\inf\limits_{k\geqslant n}x_k$.

当$\{x_n\}$无上界时，则$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=+\infty$；当$\{x_n\}$无下界时，则$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=-\infty$.

例 1.11 证明$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$不存在.

证明 n充分大时，$n\pi$与$n\pi+\frac{\pi}{2}$都充分大，而