

# 微積分速成

劉庭柱 梁崇基 羅福均 合譯  
林聰達 薛剛敏

現代青年叢書 8  
水牛出版社印行

現代青年叢書

8

微積分速成

劉庭柱譯著

水牛出版社

# 微積分速成

現代青年叢書 8

---

|      |                               |
|------|-------------------------------|
| 譯者：  | 劉庭柱                           |
| 發行人： | 彭誠晃                           |
| 出版者： | 水牛圖書出版事業有限公司                  |
| 地址：  | 台北市金山南路一段 135 號 2 樓           |
| 電話：  | 3 4 1 0 2 7 5 • 3 2 1 5 6 4 4 |
|      | 郵政劃撥 0013932-1 號              |
| 出版：  | 中華民國 74 年 1 月 30 日            |

---

**登記證** 局版台業字第 0628 號

◀版權所有・不許翻印▶

## 原 序

我想在你沒讀本書之前，總該先告訴你，我為什麼要寫這本書，是這樣子的，「微積分速成」一書是想使你在最短的時間裡和最省力的情形下學會微分學和積分學的基本演算方法，而這本書是可以使你在沒有人指導情況下自己看得懂的。

由於學習微積分的最佳途徑莫過於從演題中着手，所以本書提供很多題目供你練習。在每個進度題目做完了進度之後，你會找到正確的答案做為參考，至於你是不是有一個進度接着一個進度往下唸，那就要看你的題目解得怎麼樣了；答對了，就往下看，要不若錯了，就會告訴你錯的原因何在；或者要你再做另一題試試看。你可照着書上的指示去讀

我由衷的希望本書能適用於各方面的人們。但是主要的著書動機，原是希望能使大一的學生在解物理題目時能夠很純熟的運用微積分，而用不着待和物理一齊修習的微積分唸到相當程度後才能解題，那豈不就太不划算了嗎！然而，我們很容易地就會看出，本書的應用範圍相當的廣泛，舉凡大學裡一些經濟系、商學系、藥劑系以及其他必須運用一點基本微積分演算方法的社會科學科系，在學同學與已經畢業的學生，都可適用。這些人有的一直就沒唸過微積分，有的很需要複習，複習這方面的觀念和方法，他們會發現這本書很有用的。當然還有那些想進大學的優秀中學生，也會在深讀本書後了解微積分究竟是怎麼一會事。

本書與坊間一般的教科書不同，我們不強調嚴格的定理，而着重於微積分的應用和技巧。藉着這種方法讓你認識微積分。剛開始學微積分的同學發現本書不但可以自修，也能用做課堂上講授。最後我更願那些對微積分有興趣而看本書的人，發現這書讀後對他們很有幫助

基於上述用書者的不同背景，在開始時，我還為大家溫習了一下一部份微積分中所要用的「代數」與「三角」。如果你自認為這些高中時代的東西還很熟，那你就以很快的掠過。但若是你已經很久沒接觸數學了，或者是數學不太行，最好還是費點功夫用心研讀一番。本書的適應性是它的最大優點，你儘可以只花時間在你所想讀的部份上，決不致影響大局的。我希望這樣大為有助於你節省時間。並且就從這點來說，你也會明白這本書是相當可取的。

美國麻省劍橋哈佛大學

克甫尼爾 (Daniel Kleppner)

雷 蒙 塞 (Norman F. Ramsay)

西元一九六七年

誌

## 譯 序

數學為科學之母，而微積分則為數學之基礎。

這本微積分適用範圍極廣，包括五專學生、大一新生、高工學生、修習新數學的高中學生，具有高中程度而對數學有興趣的一般人士，欲參加普考的人士，和欲參加檢定為國民中學的數學教師，均可作為應考或應用的一種參考書，其他的適用範圍，原著者已在原序中提出，茲不贅言。

當然，這是一種高深數學及工程數學的入門書籍，最主要還是給大一學生使用，作為學習普通物理的工具。目前的理、工學院均為普通物理和微積分，在大一時併修；但普通物理一開始就應用微積分解題，遂使一般學生不知如何着手，甚而影響日後對該科的興趣，或因該科費時過多，影響其他的功課；這本書可幫助大一學生在短時間內熟悉微積分的應用方法，物理難題也就可迎刃而解了。

我們為一般人士推介下列參考書（在台灣都可買得到）以供作進一步的研究

1. 基本數理解析 ( Foundation of Analysis )，劉庭柱譯。
2. 集合論導引，劉福增譯。
3. Calculus With Analytical Geometry, Edwint Purcell.
4. Calculus With Analytical Geometry, John H. Olmsted.

十分感謝水牛出版社替我們印行這本書。也謝謝曹盛賢先生的多方幫忙。

譯 者 誌

中華民國 五十六年十月

## 再 版 序

科學日益昌明，省時省力、正確無誤為時代要求。譯者有鑒於此，特將初版全部文字重新洗練，謹慎訂正，力求信實、明達、口語化而不失典雅，務使讀者經濟時間，節約精神。惟限於學識，掛一漏萬在所難免，尚祈海內先進學者不吝指示，俾為三版改正南針。

譯 者 誌

中華民國五十七年七月

## 目 錄

## 第一章 緒論

|             |    |
|-------------|----|
| 第一節 函數      | 1  |
| 第二節 圖形      | 5  |
| 第三節 一次和二次函數 | 11 |
| 第四節 三角      | 19 |
| 第五節 指數與對數   | 32 |

## 第二章 微分學

|                |     |
|----------------|-----|
| 第一節 極限         | 42  |
| 第二節 速度         | 54  |
| 第三節 導函數        | 66  |
| 第四節 函數及其導函數的圖形 | 70  |
| 第五節 導函數的求法     | 80  |
| 第六節 導函數的計算公式   | 86  |
| 第七節 三角函數的導函數   | 99  |
| 第八節 指數與對數的導函數  | 106 |
| 第九節 高次導函數      | 115 |
| 第十節 極大值與極小值    | 118 |
| 第十一節 微分        | 127 |
| 第十二節 複習暨習題     | 131 |
| 第十三節 結論        | 135 |

## 第三章 積分學

|            |     |
|------------|-----|
| 第一節 不定積分   | 137 |
| 第二節 積分     | 140 |
| 第三節 曲綫下的面積 | 152 |

## X 目 錄

|                                                    |     |
|----------------------------------------------------|-----|
| 第四節 定積分                                            | 163 |
| 第五節 積分的應用                                          | 170 |
| 第六節 多重積分                                           | 176 |
| 第七節 結論                                             | 186 |
| 第四章 總複習                                            |     |
| 第一節 緒論                                             | 189 |
| 第二節 微分學                                            | 192 |
| 第三節 積分學                                            | 197 |
| 附錄A 公式和定理推演                                        |     |
| A1. 和角公式                                           | 201 |
| A2. 極限定理                                           | 202 |
| A3. 三角函數的極限                                        | 205 |
| A4. $X^n$ 的導函數                                     | 206 |
| A5. 三角函數的導函數                                       | 208 |
| A6. 二函數乘積的導函數                                      | 209 |
| A7. 鏈鎖律                                            | 210 |
| A8. 自然數： $e$                                       | 210 |
| A9. $\ln x$ 的導函數                                   | 211 |
| A10. 兩變數皆因第三個變數而變時的微分                              | 212 |
| A11. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ 的證明 | 213 |
| A12. 兩函數的導函數相等，則此兩函數的差為一常數                         | 214 |
| 附錄B 補充題                                            |     |
| B1. 函數的另一定義                                        | 215 |
| B2. 偏導數                                            | 216 |
| B3. 隱函數                                            | 218 |
| B4. 反三角函數的導函數                                      | 221 |

|                |     |
|----------------|-----|
| B5. 微分方程式..... | 223 |
|----------------|-----|

|               |     |
|---------------|-----|
| B6. 閱讀指導..... | 225 |
|---------------|-----|

## 總複習題

|          |     |
|----------|-----|
| 複習題..... | 227 |
|----------|-----|

|            |     |
|------------|-----|
| 複習題答案..... | 233 |
|------------|-----|

## 表

|                 |     |
|-----------------|-----|
| 表 1. 導函數公式..... | 237 |
|-----------------|-----|

|                |     |
|----------------|-----|
| 表 2. 積分公式..... | 239 |
|----------------|-----|

# 第一章 緒論

---

## 第一節 函數

---

- 1 “微積分”(calculus)這個名詞聽起來好像蠻“恐怖”的，其實，微積分並不是一門很難的學科。當然，想一夜之間學通微積分是不太可能的事，可是如果用心地讀，很快就可學通它的基本觀念。

這本書能使你學得微積分的基本定理。好好讀完這本書，足以得心應手地去解決一般的微積分題目；亦可作為更深入的課程的基礎。但要訣是“動手”，如是，當不難品出微積分的妙處。

讀微積分切不可懶於回答問題和解習題。習題答案正確與否可決定學習的途徑。假如習題作對了，可以直接作另一新的課題。反過來說，如果錯了，就得仔細研究答案的解說；此外，還得多作幾個習題。看看是否已確實瞭解。不管如何，一作完一個習題，你馬上就可以查對出正確的答案

大多數的題目是選擇題，其寫法為  $[a | b | c | d]$ ，作題目時只要圈出你認為對的即可。正確的答案附在每一章的後面。有些題目是填充題，填充題的答案在習題的下一進度可以找到。

如果題目作對了，你可以依照指示跳過一個進度甚至兩個進度。

## 2 微積分速成

但如自認仍須練習，則可依作錯題目的指示進行，記住：讀得快，並不能得到什麼好處的。

接進度 2

---

- 2 這裡先把以後要講的東西提一下。第一章是對本書以後各章有用的教材的預習。第二章講微分學，第三章講積分學，第四章則是對以前三章所講的作精確的提要。另有兩個附錄，一個是一些關係式，恒等式的證明；另一個是討論一些有關的補充問題。另外還有一些附答的補充題及兩個極為有用的表。

下面幾個進度非常重要，因為我們要先從一些定義開始，所以第一節的寫法比此書其它部份要來得正式些。

首先我們要溫習函數的定義，如果你對於“函數”的定義已十分清楚而也已熟悉“自變數”(independent variable)“因變數”(dependent variable)的觀念了，那可以跳到第二節(進度 15) (其實，第一節中很可能有些你沒學過的新教材，多花點時間看一遍不是更好嗎？)

接進度 3

---

- 3 函數的定義是要用到集合(set)的觀念的。你知道什麼是「集合」嗎？如果你已經知道了，就請看進度 4 吧，要不然，好好看下去。

集合就是一些東西的組合，而這些東西并不一定都是些實體的物質，這些東西是否屬於這個集合呢？而這個集合又是怎樣呢？我們可以從構成這集合的東西來確定這個集合，這些構成的東西——都叫做集合的元素。例如 23, 7, 5, 10, 是數的集合。又如：火星，羅馬，法國則是地名的集合。

我們也可以只根據構成「集合」成立的條件來確定一個「集合」，比如說：所有的正偶數（這集合含有無窮個正偶數）太陽系中的所有行星等是。

最常用的一個集合是所謂「實數集合」。它包含着所有的正實數和負實數，例如 5，-4，0， $\frac{1}{2}$ ，-3.482， $\sqrt{2}$  等等。但是不包括那些含有  $\sqrt{-1}$  的各數。

我們平常說「忠義之士」、「甲班的學生」。其實，這「忠義之士」「甲班的學生」就是「集合」，「集合」這兩個字在數學上的用法就是這麼會事，正如我們不說「文天祥、史可法……」「梁大成、劉以立、李小明……」而說「忠義之士」「甲班的學生」是一樣的。（當然梁大成、劉以立、李小明都是甲班的學生）

接進度 4

在下面的空格裡寫出小於 10 的正奇數的集合。

答案在進度 5

小於 10 的正奇數的集合是 1, 3, 5, 7, 9.

接進度 6

- 6 現在我們要講到函數了，在沒給函數下正式定義以前，先從這個釋例看起。氣象臺有一份每小時記錄一次的溫度記錄表；在那上面溫度和一天中的每一小時都有關聯。像這種兩種不同的事物或量聯合，在數學上稱之為“函數”（function）

我們對函數的正式定義是這樣下的，（如果你學過的函數定義與下面的定義不同的話，可參考附錄 B 1.）

#### 4 微積分速成

如果集合  $A$  中的每一元素，皆可與集合  $B$  中的某一元素相聯結，這種聯結就叫作  $A$  到  $B$  的函數，集合  $A$  叫函數的定義域 (domain)。

接進度 7

---

7 我們常用某些符號 (比方  $x$ ) 表示集合  $A$  中的任一元素。這符號叫作“自變數” (independent variable) 如  $y$  表集合  $B$  中的元素，而與  $x$  有函數的關係， $y$  就叫作“因變數” (dependent variable) 我們先去定  $x$  的值，再用函數的關係去找因  $x$  而定的  $y$  值， $y$  因  $x$  值的改變而改變。

接進度 8

---

8 這裡從進度 6 溫度時間的記錄看看是否已瞭解函數的定義。在溫度和時間的聯結中，溫度是時間的\_\_\_\_\_。如令溫度為  $t$ ，時間為  $h$ ，則\_\_\_\_\_是自變數，\_\_\_\_\_是因變數。

答案在進度 9

---

函數；      $h$     ，      $t$     ，

如答對了，恭喜，請看進度 11

如否，請看進度 10

---

10 由進度 6 的定義得知，函數是由一天的時間與溫度的聯合 (溫度是時間的函數) 在一天中，每小時只有一個溫度的讀數。一天內時間的集合可以看作定義裡的集合  $A$ ，集合  $A$  中的元素  $h$  是自變數。 $t$  (溫度) 是因變數。可以這樣想：我們任意找一個  $h$ ，利用函數的關係可以找到與之對應的  $t$  (在  $h$  時的溫度) 當  $h$  改變， $t$  也

改變了。

如已瞭解，進入進度 11，如否。

把進度 3 到 10 好好看看

- 11 現在，讓我們看看如何去說明一個函數。一個方法是把二集合相對應元素一一列出。另一方法是找出自變數，因變數的關係，由此關係去說明函數。例如一個函數的自變數是  $t$ ，因變數是  $S$ ，則他們的關係式：

$$S = 2t^2 + 6t$$

表示一個函數。照進度 8 來說， $t$  改變， $S$  就隨着改變。令  $t = 1$  時， $S = 8$ ， $t = 2$  時， $S = 20 \dots\dots$

嚴格地說，如果我們不把自變數定於一個數域中（自變數的數域叫變域），並不能嚴密的去表明一個函數。

若非特殊的限制，自變數可為一切實數，而與其對應的因變數也是實數。如上例， $t$  可為任意實數，但數學上却經常對變數加以嚴格的範圍限制。如一函數以  $y = \sqrt{x}$  表示，則  $x$  的範圍只限於不小於 0 的實數。

數學理論上只討論純數字（pure number）如 5.1， $\sqrt{7} \dots$ ，在應用上，變數（自變和因變）常有單位，如 5.1 秒， $\sqrt{7}$  里  $\dots$ ，但在運算上，則不必考慮單位。

接進度 12

- 12 我們常用字母  $f$  表示一個函數，如自變數是  $x$ ，因變數用  $f(x)$  表示。讀作“ $x$  的函數”或以英文讀成“ $f$  of  $x$ ”， $f(x)$  中的括弧（）只是指出自變數的一個符號。雖然  $5(2+3)$  表示 5 乘上 5， $f(x)$  可不是表示  $f$  乘上  $x$ ，這一點是應該注意的。當自變數  $x = 8$ ，

## 6 微積分速成

時，因變數可寫成  $f(x)$ ，並不是說因變數為  $3f$ ，而是說： $f(x)$  為  $x=3$  時因變數的值。

接進度 13

13 數學上， $x$  常表自變數， $f$  表因變數與自變數的函數關係。 $y=f(x)$  表因變數。當然了，也可以用其他的符號表示，如：

$$z=H(r)$$

讀作：“ $z$  是  $r$  的函數”或“ $z$  等於  $H$  of  $r$ ”。

在進度 11 中的式子：

$$S=2t^2+6t$$

$$\text{即 } f(t)=2t^2+6t, S=f(t)$$

又依進度 12：

$$t=1 \quad S=f(1)=8$$

$$t=2 \quad S=f(2)=20$$

從上面我們已知函數的抽象定義了，現在讓我們討論一些“圖形”來進一步的瞭解函數吧！

接第 2 節進度 14

## 第二節 圖型

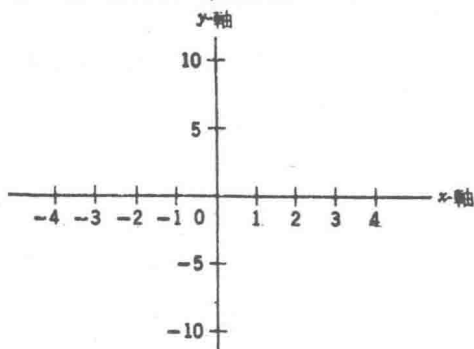
14 進度 15~18 是為不會作函數圖形的人而寫的，如你已熟悉函數的圖形，可跳到進度 19。

否則，接進度 15

15 解釋  $y=f(x)$  這個函數的最好方法是利用圖形，先複習一下座

標軸。首先，我們得找出一對互相垂直的線；一條是水平線，一條是鉛直線。水平線叫作橫軸 (horizontal axis) 或  $x$  軸 ( $x$ -axis)。鉛直線稱之為縱軸 (vertical axis) 或  $y$  軸 ( $y$ -axis)。

$x$ ， $y$  軸均可無限向兩端任意延長。 $x$ ， $y$  軸的交點稱為原點 (origin)， $x$ ， $y$  軸合稱為座標軸 (coordinate axis)。



其次，選擇一適當的長度，定為一個單位長度，自原點起分別在  $x$  軸， $y$  軸上寫出數軸。就  $x$  軸上說，原點右邊為正，左邊為負， $y$  軸則是原點上方為正，下方為負。但  $y$  軸上的單位長度不必一定和  $x$  軸上的單位長度相同。其實， $x$ ， $y$  的因次 (註) 經常不同，諸如  $y$  的因次為距離， $x$  的因次為時間。接進度 16

詳註：因次是單位的一種區分。p. s. s. c. 物理上寫因次為 LMT, L

表長度，M 表質量，T 表時間。大部分的單位都可以 LMT

表示。如達因 (dyne) 可化為  $\text{cm} \cdot \text{g} / \text{sec}^2$  即為  $\text{L}^1 \text{M}^1 \text{T}^{-2}$

- 16 設  $a$  表自變數  $x$  的值， $b$  表  $y=f(x)$  的對應值。則  $b=f(a)$ 。在  $x$  軸上定一點，使其與原點的距離等於  $a$ ，下圖中以 A 表之。同法在  $y$  軸上找出  $b$  的長度，寫出 D。