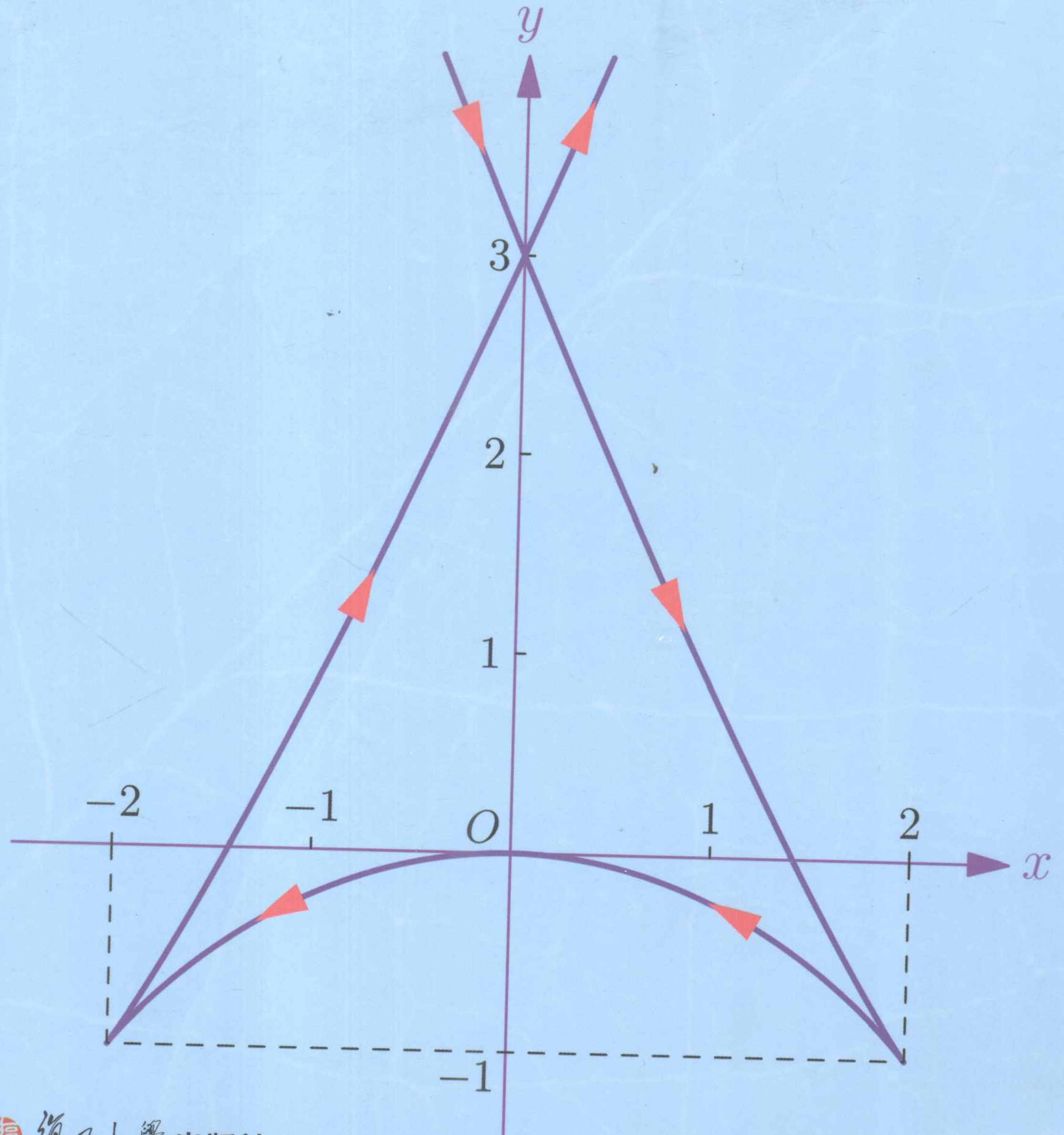
微积分讲稿

——一元微积分

Lectures on Calculus — One Dimensional Calculus

谢锡麟 编著



復旦大學出版社

微积分讲稿

——一元微积分

Lectures on Calculus —— One Dimensional Calculus

谢锡麟 编著

復旦大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分讲稿——一元微积分/谢锡麟编著.—上海:复旦大学出版社,2015.12
ISBN 978-7-309-12033-2

Ⅰ.微… Ⅱ.谢… Ⅲ.微积分-高等学校-教材 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 300155 号

微积分讲稿——一元微积分
谢锡麟 编著
责任编辑/范仁梅 陆俊杰

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号 邮编:200433
网址:fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com
门市零售:86-21-65642857 团体订购:86-21-65118853
外埠邮购:86-21-65109143
常熟市华顺印刷有限公司

开本 787×1092 1/16 印张 30 字数 658 千
2015 年 12 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-309-12033-2/O·582
定价:60.00 元

可作为一种世界观的数理观点

内容提要

微积分作为整个数理知识体系的基石，不仅对后续诸多数理知识体系的研习具有基础性的意义，而且微积分知识体系自身就为认识世界提供了系统的思想与方法.

本著述《微积分讲稿——一元微积分》，主要针对一元函数建立微分学与积分学，一元微分学主要涉及：数列的极限、函数的极限、函数的导数、闭区间上连续函数的性质、无限小增量公式、有限增量公式、函数局部行为研究、函数全局行为研究等；一元积分学主要涉及：Riemann积分的定义、Riemann积分的应用理论、Riemann积分的分析理论、Riemann积分的计算理论、广义积分，以及常微分方程基础等.

本讲稿按知识点划分各份讲稿 (对应于章)，每一讲稿包括：(1)理论阐述，按知识要素展开，并体现分析的图示化过程；(2)应用事例，归类相关方法使其可适用于一类问题，而非仅是例题的罗列；(3)拓广深化，致力于将相关思想与方法联系于其他知识体系，为专题性研究以及理论联系实际提供事例. 借此，本讲稿兼具理论教程、课程辅导以及拓广深化这三方面的功能. 讲稿撰写上注重体现知识体系的脉络结构、逻辑发展、思想方法；为便于阅读，在写作上注重演绎推导过程完整，应用事例丰富.

本书可作为力学、物理学、数学、航空宇航科学与技术、材料科学、计算机科学等相关专业的本科生与研究生的微积分教程，亦可作为相关科学与技术研究的参考.

前　　言

可作为一种世界观的数理观点

我国著名学者谈镐生先生认为:“按照近代观点, 物理、化学、天体物理、地球物理、生物物理可以全部归纳为物理科学. 力学是物理科学的, 数学又是所有学科的共同工具, 力学和数学原是科学发展史上的孪生子, 因此, 形象地可以认为, 物理科学是一根梁, 力学和数学是它的两根支柱.” 俄罗斯著名学者 V.I.Arnold 在其《论数学教育》中开门见山地指出:“数学是物理的一部分; 物理是自然科学, 且是实验科学; 数学是物理中 ‘做实验’ 比较 ‘便宜’ 的那部分.”

结合笔者就相关数理知识体系的持续性研习, 在教学与研究中逐渐明晰了一种可作为世界观的**数理观点**——归纳为基于坚实数理基础之上的 “融会贯通” 与 “触类旁通”, 以此实现 “学问” 向 “能力” 的进阶; 表现为按数量方式, 认知自然世界与非自然世界的一种具有统一性的世界观. 数理观点基于力学、数学、物理学等学科所属的相关知识体系, 这些知识体系不仅内在紧密相连、不可分割, 而且在认知世界的过程中需要各知识体系之间的相互协作. 现今的大学设有力学类、数学类、物理类专业借此传播相关的知识体系, 这可能源于具体组织教学时对相关知识的侧重, 然而这些知识本质上并非孤立. 数理观点可以力学、数学、物理学作为核心知识体系, 可融合化学、计算机科学、材料科学、生物学、医学, 甚至经济学、管理学、社会学等学科, 借此为认识自然与非自然世界提供系统的思想与方法.

近期, 笔者与复旦大学的几位同事以 “数理观点” 为教育教学理念, 致力于融合力学、数学与物理学相关知识体系, 以期为数理方面的人才培养提供具有一流化程度的课程体系. 一流化程度指课程的广度与深度可类比于国内外具有一流水平的教程或专著, 且学生具有一定的理论联系实际的能力.

作为高等院校的职业教师, 笔者将教学认识为两个方面 “知识体系自身的研究” 与 “知识体系传播的研究”; 并且立足于基于知识体系自身的研究以驱动知识体系传播的研究. 以下按 “知识体系研究”、“传播方法研究” 这两方面进行概述.

教学的第一方面——知识体系自身的研究

知识体系自身的研究致力于研究知识体系的内在发展动力 (核心思想及其发展), 体系架构, 应用研究, 以及此知识体系与其他知识体系之间的关系; 知识体系研究需要澄清

所有的细节, 并且需要提炼与归纳具有一般意义的思想与方法. 就此方面, 笔者获得如下认识.

知识点与知识要素 以 “知识点” 分解 “知识体系”, 知识点为具有一定独立性的知识（思想与方法）的集合. 每一知识点再由若干 “知识要素” 组成, “知识要素” 为特定的数学结构或者特定的处理思想与方法.

数学通识与相似结构 值得指出, 隶属同一知识体系甚至不同知识体系的知识点可能包含相同的知识要素, 称为 “数学通识”. 此外, 知识体系之间亦可能存在 “相似结构”, 如一元微分学、高维微分学、一般赋范线性空间上微分学具有高度相似的知识点构成, 如点列极限、映照极限、映照可微性、无限小增量公式、有限增量公式、逆映照定理与隐映照定理, 主要结论的分析思想与方法具有高度的统一性. 数学通识与相似结构可为实现 “同一知识体系之内的融会贯通”、“不同知识体系之间的触类旁通” 提供一种高成效的途径. 值得指出, 数学通识亦可服务于不同课程之间的衔接. 目前我们尝试在教学中突出 “数学通识”, 表现为由 “结构” 驱动 “结论” 的知识体系发展方式, 讲授不仅更加吸引学生也收获了较为理想的教与学的效果.

正本清源与格物致知 正本清源, 指深入研究知识体系的自身发展 “动力”——澄清各知识点之间的关系, 往往可基于共同的思想与方法而发展各个知识点. 教学中表现知识体系的发展更加符合正向思维, 注重基于已有的知识发展新的知识, 注重由结构驱动结论. 格物致知, 指注重将所有的数理知识体系密切联系于认识世界的过程. 例如, 针对微积分中对不定积分的分类, 我们就从力学、物理学等实际研究中寻找各种分类所对应的实际背景. 值得指出, 我们越来越发现, 具体事物的数学机制往往可以对应于某一类数学结构, 如某种形式的积分——由此, 同一类积分可能成为 “貌似完全无关” 的不同事物的共同数学机制. 教学中引入这样的背景, 不仅使得数理教学生动活泼, 而且可以帮助学生加深对事物深层机制的认识.

教学第二方面——知识体系传播的研究

知识体系传播的研究致力于研究实施具体教学的方式与方法, 包括研究提升教与学的效果或成效的途径. 就此方面, 笔者获得如下认识.

复杂分析过程的要义分解

对于数理方面的课程, 学生感到困难以至于 “跟不上” 的主要原因在于课堂上被一些推导或者结论 “卡住”, 往往自己还在思考, 教师已经涉及后续内容. 就此可考虑 “将复杂分析过程分解为若干要义”, “要义” 包括:

(1) 分析的总体思想与方法;

(2) 分析涉及的基础性结论;

(3) 分析涉及的特定概念与技巧.

讲授时, 首先澄清各个要义, 然后再进行整体性的分析. 对于复杂分析过程进行要义

分解, 亦表示了对复杂事物的认识过程与认识程度, 需要尽量做到“正本清源”, 揭示事物的本质.

如此处理, 具有如下益处:

(1) 可以有效降低学生对于复杂分析过程整体性与局部性理解上的困难, 提高听课的流畅性, 保持学习兴趣;

(2) 有些要义为基础性结论, 就此再做澄清可起到“温故而知新”的效用.

对于复杂事物, 往往第一遍难以理解, 但第二、第三遍就能迅速提升理解的程度. 课程讲授也需要恰如其分地回顾已有的内容, 不仅能“承上启下”, 而且需要时再做回顾可以有效地帮助学生提高认识程度, 提高学生听课的流畅性.

值得指出, 微积分等数理知识体系的基本思想与方法, 往往蕴含于分析过程, 而非具体的结论; 不同的分析过程往往也会导致不尽相同的结果. 就此, 数理课程需要细致剖析相关复杂分析, 基于要义分解提升学生的理解程度.

教学上应该注重向学生传授基本的思想与方法, 培养其具有理论联系实际的能力; 而不能停留于“依葫芦画瓢”式的做题, 主要为了应付考试. 学习一门知识体系, 如不能利用其思想与方法以认识世界、应用于生产与实践, 那还有什么意义?

图示化研究

我们对于图形有着与生俱来的亲和性与认同感. 由此, 非常值得进行知识体系的图示化研究, 可以包括:

(1) 概念的图示化. 如高维微积分中, 点列极限、映照极限以及向量值映照可微性的图示化.

(2) 分析过程的图示化. 将复杂分析过程进行要义分解, 而对于要义的澄清可充分基于图示化澄清或揭示相关处理的“实质”; 当然对于一般的分析过程也可以充分利用图示表现“到底是怎么回事”. 看书时往往会迷惑于某句话、某一结构或者某种作法, 对此往往可以在教学中通过图示澄清缘由, 由此可有效地提升学生对基本思想与方法的学习效率, 也让其感受到认真听讲的意义.

(3) 知识体系架构的图示化. 指基于框图表示知识体系的知识点及其知识要素, 就此可清晰呈现整个知识体系的脉络, 包括数学通识. 学生进行阶段性或者期末总结时可以利用知识体系架构既进行“查漏补缺”, 亦建立总体性的认识.

值得指出, 数理课程教学可基于板书充分地进行概念与分析过程的图示化阐述, 不仅可以使得课程讲授生动、清晰而避免乏味的照本宣科, 而且可以深入地揭示事物的本质.

课程体系网站

笔者已基本建立如下两条知识体系/课程体系路径, 对应有课程体系网站:

(1) 微积分的一流化进程: http://jpkc.fudan.edu.cn/s/354/. 至今设计如下知识体系: 一元微分学、一元积分学; 高维微分学、高维积分学、级数; 流形上微分学、流形上积

分学; 赋范线性空间上微分学; 测度论、可测函数、积分理论; 度量空间、内积空间、Sobolev 空间、Fourier 分析; 渐近分析. ——上述知识体系, 基本涵盖力学、数学、物理学专业主干数学类课程所涉及的知识.

(2) 现代连续介质力学理论及实践: http://jpkc.fudan.edu.cn/s/353/. 至今设计如下知识体系: 张量代数、体积上张量场场论、曲面上张量场场论; 体积形态连续介质有限变形理论、曲面形态连续介质有限变形理论; 连续介质物性理论; 涡量动力学、旋涡动力学; 力学几何化—有限自由度系统、力学几何化—无限自由度系统. ——上述知识体系, 主要涵盖力学类专业主干专业课程所涉及的知识; 对于物理学专业, 可以连续介质为载体, 考虑其上复杂作用形式而开展相关专业课程教学; 对于数学专业, 连续介质力学可作为相关研究的背景内容.

我们对于上述知识体系自身及其研究的传播, 基本上都发布于上述两个课程体系网站 (基于复旦大学精品课程网站平台), 内容全面公开且全球都可以访问. 现网站主要包括体系研究、教学视频、体系讲稿、教学研究、科学研究、学术交流等信息. 力学、数学、物理学专业的具体课程可以在上述知识体系集合中抽取相关知识体系作为主要讲授内容或者作为自学内容. 现有教学视频都是随堂录像, 按知识点分片段进行剪辑并命名; 视频质量较好, 可清晰看清板书、听清声音. 学生使用效果较好, 完全可以承载传播的作用.

微积分知识体系

按笔者调研, 国外具有一流水平的微积分教学表现为如下特征:

(1) 将微分学由有限维 Euclid 空间延拓至一般赋范线性空间;

(2) 将积分学由 Riemann 积分延拓至 Jordan 测度、Lebesgue 测度意义下的积分;

(3) 将微积分研究对象由可单个参数化的几何形态延拓至需多个参数化的几何形态, 亦即建立微分流形上的微积分.

需指出, 国内现行微积分课程设置一般为一年或一年半制 (对应于非数学以及数学专业); 非数学专业的微积分教学止于有限维 Euclid 空间上微积分, 并不能充分满足现代工程科学的要求. 由此, 我们通过设计系列课程 (包括选修课) 以完成上述知识体系的讲述. 随着我们对自然及非自然世界认识的深入, 按上述特征提升我们的微积分知识体系具有深远意义. 我们现已建设形成的 “微积分一流化进程” 知识体系, 主要包括: 一年制必修课程《数学分析》、选修课程《经典力学数学名著选讲》(有关微积分的深化)、选修课程《流形上的微积分》、选修课程《应用实变函数与泛函分析基础》, 希望通过上述递进性课程体系以为有兴趣的学生提供具有一流水平的微积分知识体系.

本著述《微积分讲稿——一元微积分》, 主要针对一元函数建立微分学与积分学. 一元微分学知识体系主要包括的知识点, 可归纳为: 数列的极限、函数的极限、函数的导数、闭区间上连续函数的性质、无限小增量公式、有限增量公式、函数局部行为研究、函数全局行为研究等. 一元积分学知识体系主要包括的知识点, 可归纳为: Riemann 积分的定

义、Riemann 积分的分析理论、Riemann 积分的应用理论、Riemann 积分的计算理论、广义积分, 以及常微分方程基础等. 著述《微积分讲稿——高维微积分》作为《微积分讲稿——一元微积分》的后续文本, 计划于 2016 年出版, 将主要面对向量值映照建立微分学与积分学.

微积分作为整个数理知识体系的基石, 就知识体系的建立具有举足轻重的作用. 讲稿将充分体现数理观点. 内容上, 按知识点划分各份讲稿, 每一讲稿包括:

(1) 理论阐述, 按知识要素展开, 并体现分析的图示化过程;

(2) 应用事例, 归类相关方法使其可适用于一类问题, 而非仅是例题的罗列;

(3) 拓广深化, 致力于将相关思想与方法联系于其他知识体系, 为专题性研究以及理论联系实际提供事例. 特别地, 《高维微积分讲稿》将包括向量值映照的微积分、一般赋范线性空间上微分学、Euclid 空间中流形上的微积分、测度论, 借此深入地联系理论力学、动力系统、数理方程等课程.

基于对 (1) 和 (2) 部分的学习, 就可以达到较好的程度, 然后再研习 (3) 以获得较理想的程度.

笔者近年的学习、研究与教学, 包括本书的撰写, 得到上海市教委 2011 年上海高校本科重点教学改革项目“现代连续介质力学理论及实践课程体系”, 上海市教委 2011 年重点课程立项项目“数学分析”(一年制, 面对力学等技术科学专业), 复旦大学 2013、2014、2015 年暑期集中教学项目 (FIST) 之“现代张量分析及其在连续介质中应用”, 上海市教委 2014 年上海高校本科重点教学改革项目“力学—数学—物理学相关知识体系之间互为借鉴与融合的教学研究与实践”, 上海市教委 2015 年重点课程立项项目“现代张量分析及其在连续介质力学中的应用”; 以及国家自然科学基金面上项目 (11472082、11172069、10872051) 等资助. 上述所有教学项目与科研项目, 分别体现由知识体系研究驱动教学研究与实践、由知识体系研究驱动科学与技术研究. 在此谨表感谢.

国内力学界前辈北京大学教授武际可先生, 曾就教学发表有两句话“上课要把该说的几句话说清楚”, “教学不能媚俗”. 笔者一直以这两句话矫正自己的教学研究与实践, 课堂讲授 (对应网上视频) 真正能吸引学生的始终是那些对事物的本质进行清清楚楚、深入浅出、言简意赅的剖析与表述, 也只有不断地加深对知识体系自身的研习与理解才能设计合适的路径与方式以对事物的本质（特别是深层机制）进行明明白白、简简单单的阐述. 值得指出, 对于貌似“晦涩难懂”、“高不可攀”的复杂分析过程与深层机制, 如果认识足够深刻, 似乎就能够明明白白、简简单单地将其阐述清晰. 另一方面, 就传播数理知识体系而言, 必须基于对细节的剖析与澄清, 才能领悟与掌握相关思想与方法——真正的思想蕴含于分析过程 (一般“不上台面”, 隶属“无名英雄”), 而非具体的结论 (常表现为定理、性质等).

国内力学界前辈上海大学教授戴世强先生的博客中有一篇博文《新一代应用数学和力学工作者的楷模——追念郭仲衡院士》(2011 年 10 月 14 日), 其中提到: 郭仲衡先生在

一份自述中写道: “在吸收老师们的知识雨露的同时, 我更不忘揣摩他们的治学态度和高尚品德.……我执教北大, 在教学生的同时, 我从来没有忘记帮助他们养成严谨的治学作风和与人为善的处世态度, 以师长们对我的态度来培养青出于蓝而胜于蓝的学生是对我的师长的最好的报答.” 笔者十分赞同郭仲衡先生对教书育人的高尚理念. 笔者确立以研习、继承、发展、传播相关数理知识体系作为自己学术活动的主要内容.

本书撰写过程中, 复旦大学力学与工程科学系博士研究生张大鹏、傅渊、陈瑜、史倩等做了大量 LaTeX 文本的输入工作等; 张大鹏利用 Asymptote 绘制了本书的全部插图. 本书在出版过程中得到复旦大学出版社范仁梅编辑的大力支持与帮助. 在此谨表诚挚感谢.

笔者自 2005 年留校工作至今, 有幸一直致力于微积分方面的教学研究与实践. 本讲稿反映了笔者至今就微积分自身及其传播研究的认识与体会, 限于非常有限的学识, 本讲稿必然会有阐述上不当甚至错误之处等, 敬请读者直言不讳、不吝赐教, 甚为感谢.

谢锡麟　谨识
2015 年 11 月
复旦大学　力学与工程科学系
Email: xiexilin@fudan.edu.cn
课程体系网站—微积分的一流化进程: http://jpkc.fudan.edu.cn/s/354/
课程体系网站—现代连续介质力学理论及实践: http://jpkc.fudan.edu.cn/s/353/
科学网博客: http://blog.sciencenet.cn/u/manifoldflow

符　号　表

$\forall$	任意
$\exists$	存在
$\exists!$	唯一存在
$=:$	表示右边的表达式是左边的对象的表达形式, 符号 $:=$ 同理
$\triangleq$	表示右边的表达式是左边对象的定义
$\square$	用在证明的结尾表示证明的结束
$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{\xi}$	向量
$\mathbb{R}$	实数系/实数轴
$\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$	正实数集合/实数轴右半轴, 负实数集合/实数轴左半轴
$\overline{\mathbb{R}}$	扩充的实数系
$\mathbb{C}$	复数集
$\mathbb{R}^m$	m 维 Euclid 空间
(a,b)	不含端点 a 与 b 的开区间
$[a,b]$	含有端点 a 与 b 的闭区间
$]a,b[$	不特别指定是否含有端点 a 或 b 的区间
$B_\lambda(x_0)$	以 $x_0 \in \mathbb{R}$ 为中心, 以 $\lambda \in \mathbb{R}^+$ 为半径的邻域 $(x_0-\lambda, x_0+\lambda)$
$\overset{\circ}{B}_\lambda(x_0)$	以 $x_0 \in \mathbb{R}$ 为中心, 以 $\lambda \in \mathbb{R}^+$ 为半径的去心邻域 $(x_0-\lambda, x_0)\bigcup(x_0, x_0+\lambda)$
$B_\lambda^+(x_0)$	$(x_0, x_0+\lambda)$
$B_\lambda^-(x_0)$	$(x_0-\lambda, x_0)$
$B_\lambda(+\infty)$	$(\lambda, +\infty)$
$B_\lambda(-\infty)$	$(-\infty, -\lambda)$
$B_\lambda(\infty)$	$(-\infty, -\lambda)\bigcup(\lambda, +\infty)$
$\sup E$	集合 $E \subset \mathbb{R}$ 的上确界

$\inf E$	集合 $E \subset \mathbb{R}$ 的下确界
$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$	数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的极限
$\lim\limits_{x\to x_0\in\overline{\mathbb{R}}} f(x)$	当 $x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ 时, $f(x)$ 的极限
$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$, $f'(x)$, $\dot{f}(x)$	$f(x)$ 在 x 点的一阶导数
$\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x)$, $f''(x)$, $\ddot{f}(x)$	$f(x)$ 在 x 点的二阶导数
$f'_-(x)$, $f'_+(x)$	$f(x)$ 在 x 点左导数与右导数
$a \to b$	利用有限增量公式时, 以 a 点的信息估计 b 点的值
$b \to a$	利用有限增量公式时, 以 b 点的信息估计 a 点的值
$\int f(x)\mathrm{d}x$	$f(x)$ 的不定积分
$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分
$\mathscr{C}[a,b]$	闭区间 $[a,b]$ 上连续函数的全体/集合
$\mathscr{R}[a,b]$	闭区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积函数的全体/集合

目录

前　　言 i

符 号 表 i

第一章 数列极限及其基本性质 **1**

§ 1.1 知　识　点 1

§ 1.2 知 识 要 素 1

§ 1.2.1 数列极限的定义 1

§ 1.2.2 数列极限的分析性质 4

§ 1.2.3 数列极限的运算性质 5

§ 1.3 应 用 事 例 8

§ 1.3.1 基 础 性 分 析 8

§ 1.3.2 化成无穷小量进行分析 8

§ 1.3.3 证明无穷小量的充分性方法 9

§ 1.3.4 Stolz 定 理 9

§ 1.4 建 立 方 式 10

第二章 数列极限的分析 **12**

§ 2.1 知　识　点 12

§ 2.2 知 识 要 素 12

§ 2.2.1 确界定义及其基本性质 12

§ 2.2.2 单调有界数列必收敛 13

§ 2.2.3 闭区间套定理 14

§ 2.2.4 有界点列必有收敛子列 15

§ 2.2.5 数列极限的 Cauchy 收敛原理 15

§ 2.3 应 用 事 例 16

§ 2.3.1 单调有界数列必收敛 16

§ 2.3.2 数列极限的 Cauchy 收敛原理 20

§ 2.3.3 子列相关结论 22

§ 2.4 拓 广 深 化 23
§ 2.4.1 压缩映照定理及其应用 23
§ 2.4.2 数列的上下极限 27
§ 2.5 建 立 方 式 29

第三章 函数的极限 **31**
§ 3.1 知 识 点 31
§ 3.2 知 识 要 素 31
§ 3.2.1 函数极限的定义 31
§ 3.2.2 函数极限的分析性质 35
§ 3.2.3 函数极限的运算性质 38
§ 3.3 应 用 事 例 42
§ 3.4 建 立 方 式 43

第四章 函数的连续性 **44**
§ 4.1 知 识 点 44
§ 4.2 知 识 要 素 44
§ 4.2.1 连续性的极限定义 44
§ 4.2.2 单调性相关的函数极限 46
§ 4.2.3 基本初等函数的连续性 51
§ 4.2.4 基本初等函数的反函数 52
§ 4.3 拓 广 深 化 53
§ 4.3.1 函数极限的振幅刻画 53
§ 4.3.2 函 数 的 确 界 55
§ 4.4 建 立 方 式 58

第五章 函数极限的意义 **59**
§ 5.1 知 识 点 59
§ 5.2 知 识 要 素 59
§ 5.2.1 函数的局部多项式逼近 59
§ 5.2.2 Landau 符号的意义 60
§ 5.2.3 基本初等函数的低阶多项式逼近 63
§ 5.3 应 用 事 例 64
§ 5.3.1 $x \to 0$ 的 情 形 64
§ 5.3.2 $x \to x_0 \neq 0$ 的 情 形 65
§ 5.4 建 立 方 式 69

第六章　函数的导数　70

§6.1 知　识　点 70

§6.2 知 识 要 素 70

§6.2.1 函数导数的极限定义 70

§6.2.2 函数导数的运算性质 71

§6.2.3 复合函数的导数 72

§6.2.4 基本初等函数的导数 74

§6.2.5 高 阶 导 数 76

§6.3 应 用 事 例 76

§6.3.1 导数相关分析性质 76

§6.3.2 基于充分性方法 77

§6.3.3 分段函数的导数 85

§6.3.4 高 阶 导 数 90

§6.4 建 立 方 式 95

第七章　闭区间上连续函数的性质　96

§7.1 知　识　点 96

§7.2 知 识 要 素 96

§7.2.1 闭区间上连续函数基本性质（内部无可导性） 96

§7.2.2 闭区间上连续函数基本性质（内部有可导性） 99

§7.2.3 中 值 定 理 102

§7.2.4 反函数与其导数的存在性 106

§7.2.5 函数在区间上的一致连续性 108

§7.3 应 用 事 例 114

§7.3.1 函数在区间上的一致连续性 114

§7.4 拓 广 深 化 116

§7.4.1 插 值 公 式 116

§7.4.2 差 分 公 式 118

§7.5 建 立 方 式 120

第八章　无限小增量公式与有限增量公式　122

§8.1 知　识　点 122

§8.2 知 识 要 素 122

§8.2.1 获得无限小增量公式 122

§8.2.2 获得有限增量公式 124

§8.3 应 用 事 例 127

§8.3.1 有关极值的充分与必要性结论 127

§ 8.3.2 Lagrange 余项中因子的极限 128
§ 8.3.3 基本初等函数 Taylor 展开的误差估计与 Taylor 级数 131
§ 8.3.4 近似公式及其误差估计 132
§ 8.4 建 立 方 式 133

第九章 函数局部行为的研究（复杂函数的极限） 135
§ 9.1 知 识 点 135
§ 9.2 知 识 要 素 135
§ 9.2.1 获得复杂函数局部多项式逼近的基本方法 135
§ 9.2.2 Bernoulli-L'Hospital 法则 138
§ 9.3 应 用 事 例 143
§ 9.3.1 基本初等函数的多项式逼近 143
§ 9.3.2 一般函数的多项式逼近 145
§ 9.3.3 复杂函数的极限（基于多项式逼近） 148
§ 9.3.4 复杂函数的极限（基于 Bernoulli-L'Hospital 法则） 159
§ 9.3.5 利用函数极限研究点列极限 160
§ 9.4 拓 广 深 化 161
§ 9.4.1 力学中的微元分析 161
§ 9.5 建 立 方 式 163

第十章 函数局部行为的研究（平面曲线的相关研究） 164
§ 10.1 知 识 点 164
§ 10.2 知 识 要 素 164
§ 10.2.1 平面曲线的刻画形式 164
§ 10.2.2 平面曲线的基本几何性质 168
§ 10.2.3 渐屈线和渐伸线 176
§ 10.3 应 用 事 例 178
§ 10.4 拓 广 深 化 179
§ 10.4.1 自然基下的平面运动方程 179
§ 10.4.2 极坐标系下的平面运动方程 183
§ 10.4.3 向量的绝对变化率与相对变换率 185
§ 10.5 建 立 方 式 188

第十一章 函数全局行为的研究（函数定性作图） 189
§ 11.1 知 识 点 189
§ 11.2 知 识 要 素 189
§ 11.2.1 渐 近 线 189
§ 11.2.2 单 调 性 191