数学奥林匹克小丛书

高中卷 15

Shuxue Aolinpike

XIAOCONG SHU

图论

熊斌 郑仲义 编著

华东师范大学出版社

olinpike

数学奥林匹克小丛书

高中卷 15

图论

npike Xiao Congshu ● 熊斌 郑仲义 编著

华东师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学奥林匹克小丛书．高中卷．图论/熊斌，郑仲义编著．—上海：华东师范大学出版社，2005.3
ISBN 7-5617-4107-3

I.数... II.①熊...②郑... III.数学课—高中—教学参考资料 IV.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第016374号

数学奥林匹克小丛书·高中卷

图 论

编　　著　熊　斌　郑仲义
策划组稿　倪　明
责任编辑　审校部编辑工作组
特约编辑　董纯飞
封面设计　高　山
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
　　　　　市场部　电话　021-62865537
　　　　　门市(邮购)　电话　021-62869887
　　　　　门市地址　华东师大校内先锋路口
业务电话　上海地区　021-62232873
　　　　　华东　中南地区　021-62458734
　　　　　华北　东北地区　021-62571961
　　　　　西南　西北地区　021-62232893
业务传真　021-62860410　62602316
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路3663号
　　　　　邮编　200062

印 刷 者　华东师范大学印刷厂
开　　本　787×960　16开
印　　张　7
字　　数　115千字
版　　次　2005年4月第一版
印　　次　2005年4月第一次
印　　数　16 000
书　　号　ISBN 7-5617-4107-3/G·2344
定　　价　9.00元

出 版 人　朱杰人

总序

数学竞赛像其他竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞赛. 在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中，数学竞赛的历史最悠久、国际性强，影响也最大. 我国于1956年开始举行数学竞赛，当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动，并组织出版了一系列青少年数学读物，激励了一大批青年学生立志从事科学事业. 我国于1986年起参加国际数学奥林匹克，多次获得团体总分第一，并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克，这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位，为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明，凡是开展好的地区和单位，都能大大激发学生的学习数学的兴趣，有利于培养创造性思维，提高学生的学习效率. 这项竞赛活动，将健康的竞争机制引进数学教学过程中，有利于选拔人才. 由数学竞赛选拔的优胜者，既有踏实广泛的数学基础，又有刻苦钻研、科学的学习方法，其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者. 在美国，数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J.W.Milnor)、芒福德(D.B.Mumford)、奎伦(D.Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者；在波兰，著名数论专家辛哲尔(A.Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者；在匈牙利，著名数学家费叶尔(L.Fejér)、里斯(M.Riesz)、舍贵(G.Szegö)、哈尔(A.Haar)、拉多(T.Radó)等都曾是数学竞赛获奖者. 匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家，产生了同它的人口不成比例的许多大数学家！

在开展数学竞赛的活动同时，各学校能加强联系，彼此交流数学教学经验，从这种意义上来说，数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”，成为培养优秀人才的有力措施.

不过，应当注意在数学竞赛活动中，注意普及与提高相结合，而且要以普及为主，使竞赛具有广泛的群众基础，否则难以持久.

当然，现在有些人过于关注数学竞赛的成绩，组织和参与都具有很强的功利目的，过分扩大数学竞赛的作用，这些都是不正确的，违背了开展数学竞赛活动的本意. 这些缺点有其深层次的社会原因，需要逐步加以克服，不必因为有某些缺点，就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版. 这套书，规模大、专题细. 据我所知，这样的丛书还不多见. 这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述，而且对竞赛题作了精到的分析解答，不少出自作者自己的研究所得，是一套很好的数学竞赛专题教程，也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员，不少是国家集训队的教练和国家队的领队. 他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献，为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动. 华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上，策划组织了这套丛书，花了不少心血. 我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作，并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元，著名数学家，中国科学院院士，曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

目录

1 图的定义

图论是以图作为研究对象的一个数学分支. 这里说的图,是指由一些点及连接这些点对的一些线段构成的图形,用来直观地表示具有某种二元关系的集合.

近年来,图论研究发展迅速,在诸多领域里获得了广泛的应用.

我们经常遇到这样一些现象或问题:

在一群人中,有的两人之间互相认识,有的互不相识;

一次足球锦标赛有若干个队参加,其中有的两队之间比赛过,有的没有比赛过;

有若干个大城市,有的两个城市之间有航线相通,有的没有航线相通;

平面上的一个点集,其中任意两点之间有的距离为 1,有的距离不为 1.

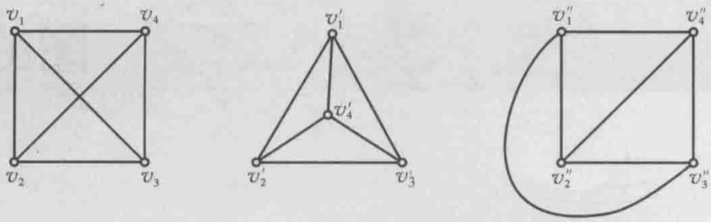
在上面这些现象或问题中都包含两方面的内容:其一是一些"对象",如人群、足球队、城市、点等等;其二是这些对象两两之间的某种特定关系,如"互相认识"、"比赛过"、"通航"、"距离为 1"等. 为了表示这些对象和他们之间的关系,我们可以用一个点表示一个对象,称这些点为顶点,如果两个对象之间有所讨论的关系,就在相应的两点之间连上一条线,称这些线为边,这样就构成了一个图形.

这个用来表示某类对象及他们间特定关系的,由若干个顶点与连接某些顶点的边的图形,我们直观地称之为图*.

例如图 1-1 中给出了 3 个图 G_1、G_2、G_3,其中顶点由小圆圈表示.

---

* 图的一般数学定义为:一个图 G 是一个三元组 (V, E, φ),其中 V 和 E 是两个不相交的集合,V 非空,φ 是 E 到 V 的元素对集合中的一个映射. V、E、φ 分别称为图 G 的顶点集、边集和关联函数.



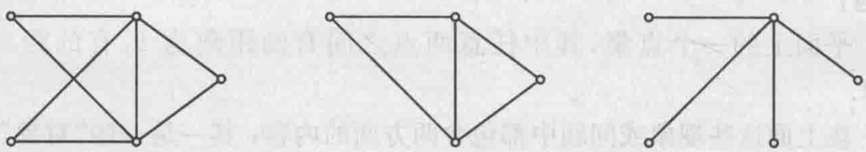
G_1 G_2 G_3

图 1-1

我们注意到，在直观地叙述图的定义中，并没有规定这些顶点的位置以及边的曲直长短也没有规定这些顶点、边都要在同一平面中. 然而要求作为连接两点的边不要通过第三点，也不要与自己相交. 在图论中，如果两个图 G 与 G' 的顶点之间可以建立起一一对应，并且 G 中连接顶点 v_i 与 v_j 之间的边数 k $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ 与连接 G' 中相应的顶点 v'_i 与 v'_j 的边数相同时，便称图 G 与 G' 是同构的，认为 G 与 G' 是相同的图.

例如，图 1-1 中的三个图 G_1、G_2、G_3 是同构的.

如果对图 $G=(V,\ E)$ 与 $G'=(V',\ E')$ 有 $V'\subseteq V$, $E'\subseteq E$，即图 G' 的顶点都是图 G 的顶点，图 G' 的边也都是图 G 的边，则称 G' 是 G 的子图. 例如图 1-2 中的 G_1、G_2 都是 G 的子图.



G G_1 G_2

图 1-2

若在一个图 G 中的两个顶点 v_i 与 v_j 之间有边 e 相连，则称点 v_i 与 v_j 是相邻的，否则就称点 v_i 与 v_j 是不相邻的. 如果顶点 v 是边 e 的一个端点，称点 v 与边 e 是关联的. 在图 1-3 中，顶点 v_1 与 v_2 是相邻的，而顶点 v_2 与顶点 v_5 是不相邻的. 顶点 v_3 与边 e_4 是关联的.

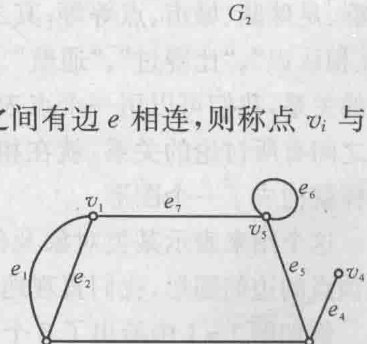


图 1-3

有些顶点本身也有边相连，这样的边称为环. 如图 1-3 所示的边 e_6 是环.

连结两个顶点的边有时可能不止一条，若两个顶点之间有 $k(k\geqslant 2)$ 条边

相连，则称这些边为平行边. 例如，图 1－3 中的边 e_1、e_2 是平行边.

如果一个图没有环，并且没有平行边，这样的图称为简单图. 图 1－1 中的 G_1、G_2、G_3 都是简单图，而图 1－3 所示的就不是一个简单图. 在简单图中，连结顶点 v_i 与 v_j 之间的边可用 (v_i, v_j) 表示. 当然，(v_i, v_j) 与 (v_j, v_i) 表示的是同一条边.

如果一个简单图中，每两个顶点之间都有一条边，这样的图称为完全图. 通常将有 n 个顶点的完全图记为 K_n. 图 1－4 中是完全图 K_3、K_4、K_5. 完全图 K_n 的边的数目是 $C_n^2=\frac{1}{2}n(n-1)$.

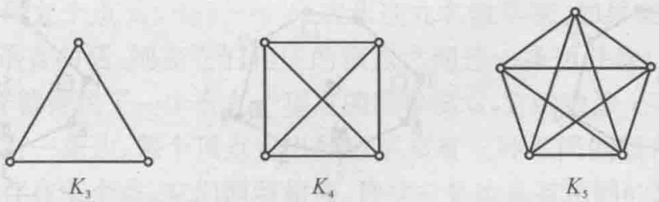


图 1－4

在图 $G=(V, E)$ 中，若顶点个数 $|V|$（$|V|$ 也称为 G 的阶）和边数 $|E|$ 都是有限的，则称图 G 是有限图. 如果 $|V|$ 或 $|E|$ 是无限的，则称 G 为无限图.

本篇中，除非特别说明，我们所说的图都是指有限简单图.

利用上述的这些基本概念可以帮助我们思考并解决一些问题.

例 1 某大型聚会有 605 个人参加. 已知他们每个人都至少和其中的另一个人握过手. 证明：必有一个人至少和其中的两个人握过手.

证明 将 605 个人用 605 个点 $v_1, v_2, \cdots, v_{605}$ 表示，如果其中两个人握过手，就在相应的顶点之间连一条边.

本例要证明：必有一个人至少和其中的两个人握过手. 倘若不然，则每个人至多和其中一个人握过手，再从题设的每个人至少和其中一个人握过手，于是便有，每个人恰与其他一个人握过手. 这样就得出，图 G 恰由若干个两点间连一条边的图形构成（图 1－5）.

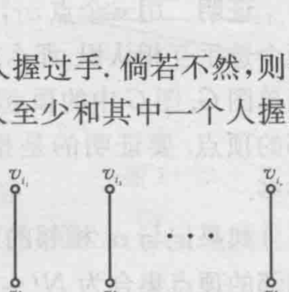


图 1－5

设图 G 有 r 条边，则 G 便有 $2r$（偶数）个顶点，这与 G 的顶点数为 605（奇数）矛盾.

本例得以证明.

例 2 能否让马跳动几次，将图 1－6 所示的阵势变为如图 1－7 所示的阵势？（“马”按照国际象棋规则跳动）

白马		白马
黑马		黑马

图 1-6

白马		黑马
黑马		白马

图 1-7

1	4	7
2	5	8
3	6	9

图 1-8

如图 1-8 所示，将九个方格编号. 再把每个方格对应为平面上一点. 若马能从一个方格跳往另一个方格，则在相应两点之间连一条边，如图 1-9.

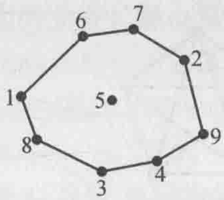


图 1-9

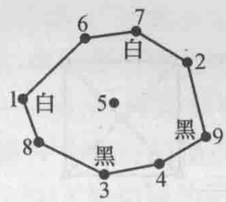


图 1-10

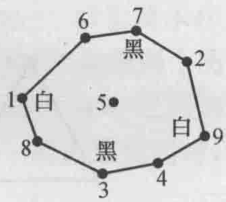


图 1-11

于是由图 1-6 所示的开始的阵势以及图 1-7 所示的要求变成的阵势分别变成了图 1-10、图 1-11 中的两个图形.

显然，马在一个圆上的前后跟随顺序是无法从两白两黑紧贴转化为黑白相间的，所以不能按要求改变阵势.

例 3 有 n 名选手 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 参加数学竞赛，其中有些选手是互相认识的，而且任何两个不相识的选手都恰好有两个共同的熟人. 若已知选手 A_1 与 A_2 互相认识，但他俩没有共同的熟人，证明他俩的熟人一样多.

证明 用 n 个点 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 表示这 n 名选手 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，如果两个选手互相认识，那么就在相应的两个点之间连一条边，这样就得到一个简单图 G. 图 G 中的顶点满足：任意两个不相邻的顶点都恰好有两个共同相邻的顶点. 要证明的是相邻的两个顶点 v_1 与 v_2 各自引出的边的条数一样多.

如果记与 v_1 相邻的顶点集合为 $N(v_1)$，与 v_2 相邻的顶点集合为 $N(v_2)$. 若在 $N(v_1)$ 中除 v_2 外还有点 v_i，则 $v_i \notin N(v_2)$. 否则 A_1 与 A_2 有共同熟人 A_i. 于是 v_2 与 v_i 除 v_1 外还应有一个与它们共同相邻的点 v_j，则 $v_j \in N(v_2)$. 如图 1-12 所示. 对于 $N(v_1)$ 中不同于 v_2 的点 v_i、v_k，它们不可能与

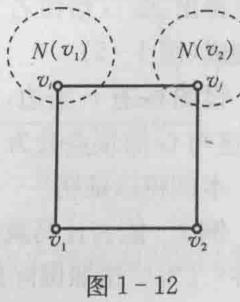


图 1-12

$N(v_2)$中除 v_1 外的一个点 v_j 都相邻(否则,两个不相邻的顶点 v_1, v_j 有三个共同相邻的顶点 v_2, v_i, v_k). 因而,对于 $N(v_1)$中不同于 v_i 的 v_k,必在$N(v_2)$中存在不同于 v_j 的相邻点 v_l. 由此可得 $N(v_1)$中的顶点个数不大于 $N(v_2)$中的顶点个数. 同样地,$N(v_2)$中的顶点个数不大于 $N(v_1)$中的顶点个数. 于是,从点 v_1 与 v_2 引出的边的条数是相等的.

例 4 九名数学家在一次国际数学会议上相遇,发现他们中的任意三个人中,至少有两个人可以用同一种语言对话. 如果每个数学家至多可说三种语言,证明至少有三名数学家可以用同一种语言对话.(1978 年美国数学奥林匹克试题)

证明 用九个点 v_1, v_2, …, v_9 表示这九名数学家,如果某两个数学家能用第 i 种语言对话,则在它们相应的顶点之间连一条边并涂以相应的第 i 种颜色,这样就得到了一个有九个顶点的简单图 G,它的边涂上了颜色,每三点之间至少有一条边,每个顶点引出的边至多有三种不同的颜色. 要证明的是:图 G 中存在三个点,它们两两相邻,且这三条边具有相同的颜色(这种三角形称为同色三角形).

如果边(v_i, v_j)、(v_i, v_k)具有相同的第 i 种颜色,则按边涂色的意义,点 v_j 与 v_k 也相邻,且边(v_j, v_k)也具有第 i 种颜色. 所以对顶点 v_1 来说,有两种情形:

(1) 点 v_1 与点 v_2, …, v_9 都相邻,根据抽屉原则知,至少有两条边,不妨设为(v_1, v_2)、(v_1, v_3),具有相同的颜色,从而$\triangle v_1v_2v_3$ 是同色三角形.

(2) 点 v_1 与点 v_2, …, v_9 中的至少一个点不相邻,不妨设点 v_1 与点 v_2 不相邻. 由于每三点之间至少有一条边,所以从 v_3, v_4, …, v_9 发出的,另一个端点是 v_1 或 v_2 的边至少有 7 条,由此可知,点 v_3, v_4, …, v_9 中至少有 4 个点与点 v_1 或 v_2 相邻,不妨设点 v_3, v_4, v_5, v_6 与点 v_1 相邻,如图 1-13 所示. 于是边(v_1, v_3)、(v_1, v_4)、(v_1, v_5)、(v_1, v_6)中必定有两条具有相同的颜色,设(v_1, v_3)、(v_1, v_4)同色,则$\triangle v_1v_3v_4$ 是同色三角形.

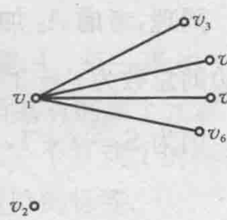


图 1-13

注:若把题中的九改成八,命题就不成立了. 图 1-14 给出的是一个反例. v_1, v_2, …, v_8 表示 8 个顶点 1, 2, …, 12 表示 12 种颜色,则图中无同色三角形.

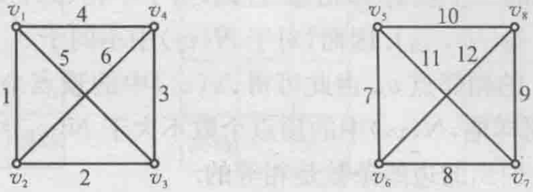


图 1－14

下面这个例子是 2000 年全国高中数学联赛加试第 3 题.

例 5 有 n 个人,已知他们中的任意两人至多通电话一次,他们中的任意 $n-2$ 个人之间通电话的总次数相等,都是 3^m 次,其中 m 是自然数. 求 n 的所有可能值.

解 显然 $n \geqslant 5$. 记 n 个人为几个点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$. 若 A_i, A_j 之间通电话,则连(A_i, A_j). 因此这 n 个点中必有边相连,不妨设为(A_1, A_2).

倘若设 A_1 与 A_3 之间无边,分别考虑 $n-2$ 个点 $A_1, A_4, A_5, \cdots, A_n$; $A_2, A_4, A_5, \cdots, A_n$;及 $A_3, A_4, A_5, \cdots, A_n$. 由题意知 A_1, A_2, A_3 分别与 $A_4, A_5, \cdots, A_n$ 之间所连边的总数相等,记为 k.

将 A_2 加入到 $A_1, A_4, A_5, \cdots, A_n$ 中,则这 $n-1$ 个点之间边的总数 $S = 3^m + k + 1$. 从这 $n-1$ 点中任意去掉一点剩下的 $n-2$ 个点所连边数都是 3^m,故每个点都与其余 $n-2$ 个点连 $k+1$ 条边. 从而

$$S = \frac{1}{2}(n-1)(k+1).$$

同理,考虑 A_3 加入 $A_1, A_4, A_5, \cdots, A_n$ 中所得的 $n-1$ 个点的情况可知边的总数为 $t = 3^m + k = \frac{1}{2}(n-1)k$.

因为 $S = t+1$, 得

$$\frac{1}{2}(n-1)(k+1) = \frac{1}{2}(n-1)k + 1,$$

即 $n = 3$, 矛盾. 所以 A_1、A_3 之间有边.

同理 A_2, A_3 之间也有边. 进而 A_1, A_2 与所有 A_i $(i = 3, 4, \cdots, n)$ 之间有边.

对于 A_i, A_j $(i \neq j)$, 因为 A_i 与 A_1 之间有边,可知 A_i 与 A_j 之间有边. 因此这 n 个点构成一个完全图. 所以

$$3^m = \frac{1}{2}(n-2)(n-3).$$

故 $n=5$.

例6 有 $n\,(n>3)$ 个人,他们之间有些人互相认识,有些人互相不认识,而且至少有一个人没有与其他人都认识. 问: 与其他人都认识的人数的最大值是多少?(美国数学竞赛试题)

解 作图 G: 用 n 个点表示这 n 个人,两顶点相邻当且仅当相应的两个人互相认识.

由于至少有一个人没有与其他人都认识,所以图 G 中至少有两点不相邻,设 v_1, v_2 之间没有边 $e=(v_1, v_2)$. 则图 G 的边数最多时的图形为 K_n-e,即从完全图 K_n 中去掉边 e 后所得的图. 从而与其他顶点都相邻的顶点个数的最大值为 $n-2$. 故与其他人都认识的人数的最大值是 $n-2$.

下面这个例子是 1988 年第 29 届国际数学奥林匹克试题.

例7 设 n 为一正整数,且 $A_1, A_2, \cdots, A_{2n+1}$ 是某个集合 B 的子集. 设

(1) 每一个 A_i 恰含有 $2n$ 个元素;

(2) 每一个 $A_i \cap A_j\,(1\leqslant i<j\leqslant 2n+1)$ 恰含有一个元素;

(3) B 的每个元素至少属于 A_i 中的两个.

问对怎样的 n,可以将 B 中元素各标上数 0 或 1,使得每个 A_i 恰含有 n 个标上了 0 的元素?

解 首先,(3)中的"至少"实际上也可以改成"恰". 因为如果有一个元素 $a_1 \in A_1 \cap A_{2n} \cap A_{2n+1}$,那么剩下的 $2n-2$ 个子集 $A_2, A_3, \cdots, A_{2n-1}$ 每个至多含 A_1 中一个元素,从而 A_1 中至少有一个元素不属于 $A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_{2n-1} \cup A_{2n} \cup A_{2n+1}$,这与(3)矛盾.

于是作完全图 K_{2n+1},每一个顶点 v_i 表示一个子集 A_i,每一条边 $(v_i, v_j)=b_{ij}\,(1\leqslant i, j\leqslant 2n+1, i\neq j)$ 表示集 A_i 与 A_j 所共有的那个元素. 于是题目就转化为: 对怎样的 n,可以给 K_{2n+1} 的每条边贴一个 0 或 1 的标签,使得从图中任一点 v_i 出发的 $2n$ 条边中恰有 n 条边贴有 0 的标签.

因为 K_{2n+1} 有 $n(2n+1)$ 条边,如果上述贴标签的要求能够满足,则贴 0 的边共有 $\dfrac{1}{2}n(2n+1)$ 条,于是 n 必须是偶数.

反之,若 $n=2m$ 是偶数,我们把 K_{2n+1} 中的边 (v_i, v_{i-m}), (v_i, v_{i-m+1}), $\cdots$, (v_i, v_{i-1}), (v_i, v_{i+1}), $\cdots$, (v_i, v_{i+m}), $i=1, 2, \cdots, 2n+1$,全标上 0,其余的标上 1,则得本题所要求的贴标签方法(要注意的是,顶点的下标的加法是按模 $2n+1$ 进行的,即 $v_{(2n+1)+i}=v_i$).

所以,当且仅当 n 为偶数时,可以满足题目要求.

下面这道题是 1995 年 IMO 预选题.

例 8 有 $12k$ 人参加会议，每人都恰好与 $3k+6$ 人握过手，并且对其中任意两人，与这两个人都握过手的人数皆相同. 问有多少人参加会议？

解 设对任意两人，与他们都握过手的有 n 人. 考虑某个 a，与 a 握过手的全体记为 A，与 a 没有握过手的全体记为 B. 由题设 $|A|=3k+6$，$|B|=9k-7$.

再考虑 $b\in A$，与 a，b 都握过手的 n 个人都在 A 中，因此，b 与 A 中 n 个人握手，与 B 中 $3k+5-n$ 人握手.

考虑 $c\in B$，与 a，c 都握过手的 n 人都在 A 中.

于是 A 与 B 之间握手总数为

$$(3k+6)(3k+5-n)=(9k-7)n,$$

$$n=\frac{(3k+6)(3k+5)}{12k-1}.$$

从而
$$16n=\frac{(12k-1+25)(12k-1+21)}{12k-1}.$$

显然 $(3,12k-1)=1$，所以 $(12k-1)\mid 25\times 7$. 由于 $12k-1$ 除以 4 余 3，所以 $12k-1=7$，5×7，$5^2\times 7$. 经检验只有 $12k-1=5\times 7$ 产生整数解 $k=3$，$n=6$.

下面构造一个由 36 点组成的图，图中每点引出 15 条边，且对每一对点与它们相连的点均为 6 个.

自然地，我们可用 6 个完全图 K_6. 把 36 个点分成六组，同组的六人编号，排成一个 6×6 方阵

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\
6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\
5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4\\
4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3\\
3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2\\
2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1
\end{array}$$

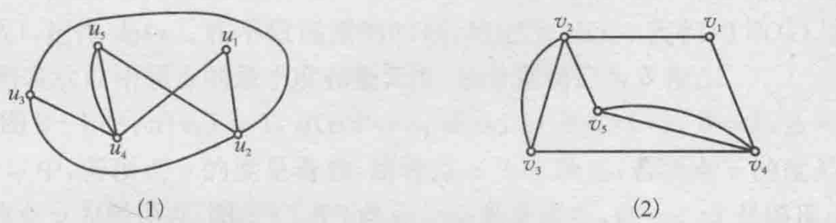
对方阵中的每个点，它与同行、同列、同编号的 15 个点相连，与其余点不相连. 易见，与任意两位代表都握过手的恰好有 6 人.

习 题 1

1 设图 $G=(V, E)$, $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_5\}$, $E=\{(v_1, v_2), (v_2, v_4), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_1, v_3)\}$. 画出 G 的图形.

2 设图 $G=(V, E)$ 是简单图, $|V|=n$, $|E|=e$, 则 $e\leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$.

3 说明下面两个图是同构的.



(第 3 题图)

4 有 n 个药箱,每两个药箱里有一种相同的药,每种药恰好在两个药箱里出现,问有多少种药?

5 一次会议有 n 名教授 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 参加,证明可以将这 n 个人分为两组,使得每一个人 A_i 在另一组中认识的人数 d_i 不少于他在同一组中认识的人数 $d'_i(i=1, 2, \cdots, n)$.

6 18 个队进行比赛,每一轮中每个队与另一个队比赛一场,并且在其他轮比赛中这两个已赛过的队彼此不再比赛,现在比赛已进行完 8 轮. 证明一定有三个队在前 8 轮比赛中,彼此之间尚未比赛过.

7 某次会议有 n 名代表出席,已知任意的四名代表中都有一个人与其余的三个人握过手,证明任意的四名代表中必有一个人与其余的 $n-1$ 名代表都握过手.

8 有三所中学,每所有学生 n 名. 每名学生都认识其他两所中学的 $n+1$ 名学生. 证明:从每所中学可以选出一名学生,使选出来的 3 名学生互相认识.

9 一个很大的棋盘上有 $2n$ 个红色的方格,对任何两个红色方格可从其中一个出发,每步横或竖走到相邻的红色方格而到另一个方格中. 证明:所有的红色方格可以分为 n 个长方形.

10 某参观团有 2 000 个人，其中任意 4 个人中一定有某一个人认识其他三人. 问：认识该参观团所有成员的人数最少是多少？

11 在一个车厢里，任何 m ($m \geqslant 3$) 个旅客都有唯一的公共朋友(当甲是乙的朋友时，乙也是甲的朋友. 任何人不作为他自己的朋友). 问：在这个车厢里，有多少人？

12 平面上给定五点 A、B、C、D、E，其中任三点不共线，试证：任意用线段连接某些点(这些线段称为边)，若所得图形中不出现以这五点中任三点为顶点的三角形，则此图不可能有 7 条或更多的边.

2 顶点的度

图 G 中与顶点 v 关联的边数(约定环计两次)称为图 G 中顶点 v 的度(或次数),记作 $d_G(v)$. 在不致混淆的时候,简记为 $d(v)$. 我们用 $\delta(G)$ 与 $\Delta(G)$ 分别表示 G 中顶点的最小度和最大度. 也分别简记为 δ 和 Δ.

在图 2-1 中, $d(v_1)=1$, $d(v_2)=3$, $d(v_3)=d(v_4)=2$, $\delta=1$, $\Delta=3$.

图 G 中,若顶点 v 的度是奇数,则称点 v 为奇顶点;若顶点 v 的度是偶数,则称点 v 为偶顶点. 图 2-1 中,点 v_1, v_2 是奇顶点,点 v_3, v_4 是偶顶点.

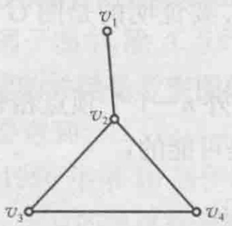


图 2-1

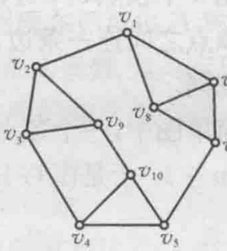


图 2-2

在图 $G=(V, E)$ 中, 如果对所有 $v\in V$, 均有 $d(v)=k$, 则称图 G 是 k 正则的. 完全图 K_n 是$(n-1)$正则图. 图 2-2 中是一个 3 正则图.

关于图 G 中所有顶点的度之和与边数之间有如下结论.

定理一 设 G 是 n 阶图,则 G 中 n 个顶点的度之和等于边数的两倍.

记 G 中 n 个顶点为 v_1, v_2, …, v_n,边数为 e,则

$$d(v_1)+d(v_2)+\cdots+d(v_n)=2e.$$

证明 所有顶点的度的和 $d(v_1)+d(v_2)+\cdots+d(v_n)$ 表示以顶点 v_1, v_2, …, v_n 中某个顶点为一个端点的边的总数. 由于一条边有两个端点,因此图 G 的每条边在和 $d(v_1)+d(v_2)+\cdots+d(v_n)$ 中被计入两次. 所以所有顶点的度的和为边数的两倍.