廖晓钟 高 哲 著

分数阶系统鲁棒性分析与鲁棒控制

科学出版社

分数阶系统鲁棒性分析与鲁棒控制

廖晓钟　高　哲　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书介绍了分数阶系统系数含有不确定性或者存在外部扰动情况下，分数阶系统鲁棒性分析方法和几类分数阶鲁棒控制器的设计方法，介绍了区间时滞分数阶系统的鲁棒稳定性分析方法. 内容主要有：分数阶控制系统的基础知识，区间分数阶系统的鲁棒稳定性分析，区间分数阶系统的分数阶控制器可镇定性，考虑稳定裕度时滞分数阶系统的分数阶 PI^{λ}/PD^{μ} 控制器鲁棒可镇定域，不确定分数阶系统的滑模控制，非线性分数阶系统的自抗扰控制，分数阶 PI^{λ} 控制器用于永磁同步电机矢量控制系统的鲁棒性.

本书可供研究所和高等院校从事控制理论研究和电机控制研究的人员参考，也可以供高等院校研究生参考.

图书在版编目(CIP)数据

分数阶系统鲁棒性分析与鲁棒控制/廖晓钟，高哲著. —北京：科学出版社，2016

ISBN 978-7-03-048868-8

Ⅰ. ①分… Ⅱ. ①廖… ②高… Ⅲ. ①鲁棒控制-研究 Ⅳ. ①TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 136625 号

责任编辑：姚庆爽 / 责任校对：蒋 萍

责任印制：张 倩 / 封面设计：迷底书装

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

文 林 印 务 有 限 公 司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 6 月第 一 版 开本：720×1000 1/16

2016 年 6 月第一次印刷 印张：13 1/2

字数：266 000

定价：80.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

作者从 2008 年开始着手研究分数阶理论及其在控制系统中的应用.

由于分数阶微积分运算具有记忆性,分数阶系统可以更加准确地描述复杂系统的动态行为,为实际物理系统提供了一种更加准确的模型描述方法.状态空间模型描述的分数阶系统的稳定区域不再是复平面的左半平面,传递函数模型描述的分数阶系统的特征函数含有幂函数项,这些都给系统稳定性分析与系统综合带来了困难.实际的工业现场大多含有各种形式的噪声干扰,同时由于建模误差的影响,包括分数阶系统在内,系统含有一定的不确定性和未知动态,本书研究了分数阶系统系数含有不确定性或者存在外部扰动的情况下,分数阶系统的鲁棒性分析方法以及分数阶系统的鲁棒控制器设计方法.考虑到一些工业过程中存在时滞环节,本书研究了区间时滞分数阶系统的鲁棒稳定性.在此基础上,研究了控制器的可镇定性判定准则与可镇定域的计算方法.此外,设计了两种状态空间描述的分数阶系统鲁棒控制策略,即分数阶积分滑模控制和分数阶自抗扰控制,以克服外部扰动和补偿系统自身的不确定动态.本书理论与实际应用相结合,将分数阶系统及其分数阶鲁棒控制算法用于电机控制系统中,进行了理论分析和实验研究.本书内容涵盖了作者在分数阶系统鲁棒分析和鲁棒控制方面的一些创新研究成果.

全书共 8 章,主要内容安排如下:第 1 章为绪论;第 2 章介绍分数阶系统的基础知识;第 3 章介绍区间分数阶系统鲁棒稳定性分析;第 4 章介绍区间分数阶系统的分数阶控制器可镇定性;第 5 章介绍考虑稳定裕度时滞分数阶系统的分数阶 PI^{λ}/PD^{μ}控制器鲁棒可镇定域;第 6 章介绍不确定分数阶系统的滑模控制器设计;第 7 章介绍非线性分数阶系统自抗扰控制;第 8 章介绍基于分数阶 $PI^{\lambda}D^{\mu}$控制器的电机控制系统.

本书得到了北京市自然科学基金项目(4152046)和国家自然科学基金项目(61304094)的资助.

在本书的撰写过程中,研究室的冬雷副教授,博士研究生王亚楠,硕士研究生王圣、凌露露、朱文骏、解锟、杨嘉伟、武东等参与了相关的研究工作,王亚楠、王圣、凌露露对本书所涉及内容重新进行了反复实验,并参与了文字和插图的整理工作.在此,对他们表示衷心感谢.

由于作者水平有限,书中难免存在不妥之处,敬请广大读者批评指正.

作　者
2015 年 12 月

本书常用符号

常用数学符号

$\arg(x)$	复数 x 的相角
$\mathrm{argmax}\{x \mid f(x)\}$	使函数 $f(x)$ 达到最大值对应的 x 值
$\cos(\cdot)$	余弦函数
$\csc(\cdot)$	余割函数
$\det(\cdot)$	行列式
D^{α}，${}^{C}D^{\alpha}$	α 阶 Caputo 导数
${}^{R}D^{\alpha}$	α 阶 R-L 导数
$\mathrm{erfc}(x)$	误差函数
$\exp(\cdot)$	以 e 为底的指数函数
$\mathrm{Im}(x)$	复数 x 的虚部
j	虚数单位
$\lg(\cdot)$	以 10 为底的对数函数
$\max\{A\}$	集合 A 中元素的最大值
$\min\{A\}$	集合 A 中元素的最小值
$\max\{f(\cdot)\}$	函数 $f(\cdot)$的最大值
$\min\{f(\cdot)\}$	函数 $f(\cdot)$的最小值
$\mathrm{Re}(x)$	复数 x 的实部
$\mathrm{sgn}(\cdot)$	符号函数
$\mathrm{sat}(\cdot)$	饱和函数
$\sin(\cdot)$	正弦函数
$\mathrm{Sym}\{\boldsymbol{X}\}$	矩阵 $\boldsymbol{X}$ 和矩阵 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$ 的和
$\mathrm{tr}(\cdot)$	矩阵的迹
x^{*}	复数 x 的共轭
$\lvert x \rvert$	复数 x 的模
$\mathbb{N}$	自然数集
$\mathbb{R}$	实数集
$\mathbb{R}^{+}$	正实数集
$\mathbb{Z}$	整数集

$\mathbb{R}_{\geqslant 0}$	非负实数集
$\mathbb{R}^-$	负实数集
$\mathbb{Z}^+$	正整数集
∂	偏微分运算
$\Gamma(\cdot)$	伽马函数
$\# A$	集合 A 中元素的个数
$\bigcup$	集合并
$\in$	属于
$\notin$	不属于
$\sum$	求和运算
$\otimes$	Kronecker 积
$\oplus$	集合的直和
$\cdot$	向量的内积
$\Vert\cdot\Vert$	范数
$\Vert\cdot\Vert_1$	1-范数
$\Vert\cdot\Vert_2$	2-范数
$\Vert\cdot\Vert_\infty$	∞-范数

常用参数和物理量符号

$C(s)$	控制器传递函数
$D(s)$	传递函数分母
$F(s)$	特征函数
$\bar{F}(s)$	标称函数
$F_\Delta(s)$	扰动函数
$G(s)$	控制系统开环传递函数
$H(s)$	闭环系统传递函数
i_A, i_B, i_C	定子 A,B,C 三相电流
i_d, i_q	在两相同步旋转坐标系中电流的 d,q 轴分量
J	转动惯量
k_p	PID 控制器的比例系数
k_i	PID 控制器的积分系数
k_d	PID 控制器的微分系数
L_s	计及定子相邻两相的互感作用后定子每相的总自感(即同步电感)

L_{AA}, L_{BB}, L_{CC}	定子 A, B, C 相绕组的自感
L_d, L_q	d, q 轴定子等效绕组电感
M_{XY}	定子 X, Y 相绕组间的互感 $(X=A,B,C; Y=A,B,C)$
$N(s)$	传递函数分子
$P(s)$	被控对象的传递函数
p	时间的微分算子 $\left(p=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$
p_n	电机极对数
R_s	定子每相绕组电阻
s	滑模面
T_e	电磁转矩
T_L	负载转矩
$\boldsymbol{u}_s$	定子电压空间矢量
u_A, u_B, u_C	定子 A, B, C 三相绕组的电压
u_d, u_q	在两相同步旋转坐标系中电压的 d, q 轴分量
U_{DC}	直流母线电压
u_{AN}, u_{BN}, u_{CN}	定子 A, B, C 三相相电压
u_{AB}, u_{BC}, u_{CA}	定子 A, B, C 三相线电压
$\mathbf{V}_j$	空间矢量
V_A, V_B, V_C	在三相静止坐标系中空间矢量的 A, B, C 轴分量
V_α, V_β	在两相静止坐标系中空间矢量的 α, β 轴分量
V_d, V_q	在两相同步旋转坐标系中空间矢量的 d, q 轴分量
γ	切换线
θ	转子位置角
σ	稳定裕度
ψ_A, ψ_B, ψ_C	定子 A, B, C 三相绕组的磁链
ψ_d, ψ_q	在两相同步旋转坐标系中磁链的 d, q 轴分量
ψ_f	转子永磁体产生的磁链
ω_r	转子旋转角速度(以电角度计)
ω	频率

常用缩写符号

ADRC	active disturbance rejection control	自抗扰控制
BIBO	boundary input boundary output	有界输入有界输出

CFE	continued fractional expansion	连分式展开
CRB	complex root boundary	复根边界
ESO	extended state observer	扩张状态观测器
FOC	fractional order calculus	分数阶微积分
FO-ESO	fractional-order extended state observer	分数阶扩张状态观测器
FO-PD	fractional-order proportion differentiation	分数阶比例、微分
FO-PID	fractional-order proportion integration differentiation	分数阶比例、积分、微分
G-L 定义	Grünwald-Letnikov 定义	G-L 定义
IAE	integral absolute error	绝对误差积分
IO-PD	integer-order proportion differentiation	整数阶比例、微分
IO-PID	integer-order proportion integration differentiation	整数阶比例、积分、微分
IPM	intelligent power module	智能功率模块
IRB	infinite root boundary	无限根边界
ISE	integral of squared error	平方误差积分
ITAE	integral of time and absolute error	时间与绝对误差乘积积分
LMI	linear matrix inequality	线性矩阵不等式
PID	proportion integration differentiation	比例、积分、微分
PMSM	permanent magnet synchronous motor	永磁同步电机
PWM	pulse width modulation	脉宽调制
R-L 定义	Riemann-Liouville 定义	R-L 定义
RRB	real root boundary	实根边界
SOM	symmetrical optimum method	对称最优方法
SPWM	sinusoidal pulse width modulation	正弦脉宽调制
SVPWM	space vector pulse width modulation	空间矢量脉宽调制
TD	tracking differentiator	跟踪微分器
Z-N 方法	Ziegler-Nichols 方法	Z-N 方法

目　录

第1章 绪　　论

1.1 分数阶微积分简介

1.1.1 分数阶微积分的概念及发展历史

分数阶微积分(fractional-order calculus,FOC)是一门既古老又新颖的学科.说其古老,是因为它几乎与传统的整数阶微积分诞生于同一时期;说其新颖是因为它平静发展了两百多年,到了20世纪初期,分数阶微积分的研究与应用才逐步引起人们的关注,并快速地渗透到众多研究领域中.

分数阶微积分的提出,可追溯到1695年L'Hospital给Leibniz的一封信中提出的一个微分问题,即 $d^n f(x)/dx^n$ 中当 $n=1/2$ 时的结果是什么?后来这个问题发展为微分或积分阶次是任意复数(分数、无理数或者虚数)的问题.因此"分数阶"一词只是沿用历史的习惯称谓,从严格的数学意义上讲,广义的分数阶微积分应称为"复数阶微积分".但由于历史原因,分数阶微积分已成为研究者的习惯术语而被继续使用.

自从1695年L'Hospital在那封信中提出了有关微分阶次的问题之后,Euler、Bernoulli、Fourier等数学家也参与到该问题的研究中来,对分数阶微积分的发展作出了重要贡献.第一次真正使用分数阶算子是1823年,Abel求解等时曲线问题的积分方程时,引入了分数阶微积分来表示该方程的解.而关于分数阶微积分的比较系统的研究,一般认为是由Liouville、Riemann等在19世纪中期开始的.1832年,Liouville给出了第一个较规范的分数阶微积分的定义,并利用此定义解决了势理论问题.此后(1832~1837年)Liouville发表的一系列关于分数阶微积分的论文,使他成为分数阶微积分理论的实际创始人.继Liouville之后,Riemann、Grünwald、Hadamard、Letnikov、Hardy、Willian Center、Cayley、Riesz、Weyl、Caputo等数学家或物理学家也相继作出了巨大贡献,使得分数阶微积分有了历史性的发展,并逐渐成为一门独立的学科[1].

分数阶微积分的基础是分数阶微分算子 D^α 和分数阶积分算子 I^α,其中 α 为任意实数(广义的分数阶微积分的阶次可以扩展到复数,但是一般是在实数域研究分数阶微积分,本书主要在实数域讨论分数阶微积分理论及其应用).分数阶算子的定义主要有Riemann-Liouville定义、Caputo定义、Grünwald-Letnikov定义、Weyl定义、Erdelyi-Kober定义、Riesz定义以及Marchaud-Hadamard定义[2,3],文献[4]给出了这几种定义之间的内在联系,其中Riemann-Liouville定义(简称R-L定

义)、Caputo 定义、Grünwald-Letnikov 定义(简称 G-L 定义)是较常用的三种定义. G-L 定义是从整数阶微分的定义出发,归纳并扩展到分数阶而得到的分数阶微分统一性的表达式;R-L 定义中的积分是根据函数 $f(t)$ 的 n 重积分可由卷积形式的单一积分(即 Cauchy 公式)表示,而扩展到分数重积分,并且其微分可表示为 $D^{\alpha}f(t)=D^{n}I^{n-\alpha}f(t)$,其中 n 为大于或等于 α 的整数,即先计算整数阶积分,再计算阶次在 0 和 1 之间的分数阶微分;Caputo 定义的微分则是 $D^{\alpha}f(t)=I^{n-\alpha}D^{n}f(t)$,其中 n 为大于或等于 α 的整数,即先计算整数阶微分,再计算阶次在 0 和 1 之间的分数阶积分[5]. R-L 定义主要应用于纯数学领域,Caputo 定义由于其微分方程的初始条件与整数阶微积分的初始条件一致,因此被广泛应用于工程领域.

由于分数阶算子定义与建立在光滑连续空间-时间观基础上的经典物理学体系存在本质的矛盾[6,7]. 分数阶微积分被提出的三百多年历史中,只是作为数学领域的一个纯理论问题,并未在物理和力学等学科获得广泛的应用和关注. 直到 20 世纪末,学者从事物的本质出发,开始着手研究分数阶微积分的几何解释及物理意义.

1.1.2 分数阶微积分的几何解释及物理意义

分数阶微积分是传统微积分的广义化形式,与传统的微积分一样具有相似的概念和数学分析及计算工具,但由于其本身的复杂性,使得对分数阶微积分概念的理解比较困难,导致其在很长一段时间内不能广泛普适地应用于实际问题中. 而整数阶微积分有着清晰的几何解释和物理意义,如微分表示斜率、速度;积分对应面积、距离等,这些清晰且易于理解的解释和意义使得其在实际问题的研究中得以广泛应用. 因此,给出分数阶微积分几何解释及物理意义具有重大的实际作用.

Podlubny 对分数阶积分的几何解释为“墙上移动的阴影”(moving shadows on the walls),具体的几何解释可参考文献[8]. 曾庆山也给出了详细的范例图示[9],得出了分数阶积分的物理意义,即积分是对某种量的累积存储,那么分数阶积分就是有记忆的存储,并且分数阶积分与距离当前时刻较近的值相关程度更高,离得越远关联性越小(近则储之,对过去的渐渐遗弃[5]). 近年来复杂物理、力学、生物和工程的建模问题的出现,使得整数阶模型不再适用,而引入分数阶模型可以更好地刻画实际系统的动态特性. 例如,许多黏弹性材料(包括黏弹性固体和流体物质)的应力松弛是非指数型的,具有记忆性[10];“反常”扩散(高温高压下等离子体运动)[11];软物质[12](又被称为复杂流体,介于理想固体和液体之间的复杂状态物质,大多由大分子或基团组成,经常是多相介质)的热传导;电子运输[13]等. 这些现象涉及物理和力学过程的记忆和遗传,路径依赖性和全局相关性等,在建模过程中采用分数阶微积分都具有不同的几何解释或物理意义. 下面简单介绍两种现象模型中的分数阶微积分的物理意义.

"反常"扩散是相对于理想固体和液体的"正常"扩散而言的，本质上其本构关系不服从各种标准的"梯度"律（如达西定律、傅里叶热传导等）[14]，并且相应实验测量数据拟合得到的经验公式表现为幂律（power law）函数形式. 而分数阶拉普拉斯算子（fractional-order Laplace operators）是典型的非局部空间分数阶导数，可以精确地描述"反常"扩散过程物理力学行为的路径依赖与长程相关特征[14]. 因此，由时间-空间分数阶导数构成的反常扩散方程成为描述各类"反常"扩散行为特征的主控方程，能够较好地刻画不同物理力学问题"反常"扩散的幂律经验公式[15]. 以下为典型分数阶导数反常扩散方程

$$\frac{\partial^{\alpha}x}{\partial t^{\alpha}}+\gamma\,(-\nabla^{2})^{\beta}x=0,\quad 0<\alpha,\beta\leqslant 1$$

式中，x 为所研究问题的物理和力学量（如浓度、温度等）；γ 为相应的标准化物理系数（如扩散系数、热传导系数等）；$(-\nabla^{2})^{\beta}$ 为分数阶拉普拉斯算子；α,β 为实数. 从方程中可看出，α 是系统记忆强度的指标[14]，在 $\beta=1$ 的情况下，α 越小，物理力学过程的记忆性越强. 因此，从物理和力学建模角度看，标准的整数阶时间导数由局部极限定义，不适合描述历史依赖过程，而分数阶微分算子实际上是微分一积分算子，其定义中的积分项充分地体现了系统函数发展的历史依赖性，是对记忆性较强过程建模的有力数学工具[16].

另外一种广泛存在的现象是幂律分布，也是当今科学研究的一大热点. 幂律分布现象普遍存在于自然界和人类社会中，例如，英语单词出现的频率与其出现频率高低的名词存在简单的反比关系；还有著名的 80/20 法则，即 20%的人口占据 80%的社会财富；"长尾"理论，即少数大门户网站被人关注，大部分小网站却不被知晓等. 而分数阶微分方程的解却具有幂律函数的形式. 因此，分数阶微分方程与幂律分布现象之间的对应关系，可以用来描述幂律现象[4].

综上，分数阶微分方程模型和整数阶微分方程模型的物理意义有本质的区别，对时间而言，整数阶微分方程所表征的是一个物理或力学过程某时刻的变化或某种性质，而分数阶微分方程所表征的性质则与该现象的整个发展过程有关；整数阶空间微分方程描述的是一个物理过程在空间中某一确定位置的局部性质，而分数阶微分方程所描述的性质则与该物理过程涉及的整个空间有关. 分数阶微分方程模型克服了经典整数阶微分方程模型描述一些复杂物理和力学过程时，理论与实验结果吻合不好的缺点，能够更好地模拟原实际系统动态特性，实现实验效果和研究模型更好的一致性.

1.1.3　分数阶微积分的研究历史及现状

分数阶微积分虽然早在三百多年前就被提出，但关于分数阶微积分的研究成果在近五十年来才不断增多，并出现了许多和分数阶微积分有关的专著、会议、期

刊及专题等. 第一本关于分数阶微积分理论的专著[17],是由 Oldham 和 Spanier 在 1974 年所著. 此后,许多在分数阶微积分研究领域的学者陆续发表了自己的研究专著. Samko、Kilbas 和 Marichev 在 1987 年发表的一部专著[18],全面详细地介绍了分数阶微积分理论及其发展应用. 1982 年,Mandelbrot 首次指出自然界和工程中存在大量分数维的事实,使得分数阶微积分成为研究分数维动力学的有力工具[19]. Oustaloup 在 1991 年发表的专著[20]首先提出了 CRONE 控制原理,此后又在 1999 年发表了对 CRONE 控制原理更深入研究的专著[21],为分数阶微积分在自动控制方面的应用迈出坚实的一步. 而 Podlubny 在 1998 年发表的专著[2]第一次提出了分数阶 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器的设计方法,推广了整数阶 PID 控制方法,专著中的基本结论、思想和方法对此后分数阶控制研究影响深远,是分数阶控制理论中一个里程碑式的文献. 至今 Podlubny 仍活跃在分数阶控制研究的前沿,对分数阶控制理论的发展作出了突出贡献.

分数阶微积分专著不断增多的同时，相关的学术会议也逐渐出现. 1974 年 6 月,第一届分数阶微积分及其应用大会在美国的纽黑文大学举行,并由 Springer Verlag 出版了这次会议的论文集[22];1984 年,第二届分数阶微积分及其应用大会于英国的格拉斯哥举行;1989 年,在日本东京举行了第三次国际会议. 2004 年,在法国波尔多举行的控制领域著名国际学术会议 International Federation of Automatic Control (简称 IFAC) 也设立了第一届讨论分数阶微积分及其应用等相关议题的分会场,专门研讨分数阶微积分的最新理论成果以及在其他研究领域的最新应用成果. 此后每三年举办一次的 IFAC 大会上都会设立分数阶微积分及其应用的分会场.

在学术期刊方面,*Fractional Calculus and Applied Analysis*、*Fractional Dynamic Systems*、*Journal of Fractional Calculus* 都是有关分数阶微积分及其应用的专业学术期刊. 其他学术期刊如 *Computers and Mathematics with Applications*、*Journal of Computational Physics*、*Nonlinear Dynamics*、*Signal Processing* 等也经常刊登分数阶微积分领域的相关文章. 从 20 世纪末以来,国际上发表的有关分数阶微积分的论文数量一直在快速增长,2013 年起每年 SCI 检索的论文数量更是超过了 1000 篇. 而分数阶微积分研究与应用从 2012 年开始也已经覆盖了 *Web of Science* 如今所列的全部 145 个学科和应用领域[23]. 并且,著名的国际期刊也会经常发表分数阶微积分有关的专题(Special Issue),例如,*Asian Journal of Control* 在 2013 年发表的"Advances in Fractional Order Control and Estimation"专题;*Signal Processing* 在 2015 年发表的"Fractional Signal Processing and Applications"专题等. 相关国际会议越来越频繁地举行,国内外期刊在分数阶微积分理论和应用方面相关文章的刊登,反映了分数阶微积分理论已经被广泛地应用于各个领域,且逐步成为国际研究的热点.

1.2 分数阶控制系统分析

1.2.1 分数阶控制系统数学模型

很多实际系统中存在分数阶特性,因此利用分数阶微积分理论对原系统建立数学模型能够更加真实反映系统特性. 分数阶控制系统的分类和整数阶控制系统的分类类似. 根据输入输出之间关系可分为线性、非线性;根据时间可分为连续、离散;根据系统参数是否变化可分为时变、时不变;根据系统输入输出是否有时间延迟可分为时滞、非时滞;根据系统状态是否有时滞现象可分为状态时滞、状态非时滞;另外,分数阶系统还可根据传递函数的形式分为同元次、非同元次. 分数阶控制系统的数学建模方式也有时域微分方程描述[24]、频域传递函数描述[25]、状态空间描述[26]等多种形式.

分数阶控制系统的时域微分方程描述是用微分方程表示系统的输入输出关系,例如一个分数阶单输入单输出连续时不变系统,根据 Caputo 定义的 α 阶微分算子${}_a^CD_t^\alpha$可以将该系统表示为

$$\begin{aligned} &a_n D^{\alpha_n} y(t)+a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t)+\cdots+a_0 D^{\alpha_0} y(t) \\ &=b_m D^{\beta_m} u(t)+b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} u(t)+\cdots+b_0 D^{\beta_0} u(t) \end{aligned} \tag{1.1}$$

式中,D^α为当初始时刻 $a=0$ 的情况下,分数阶算子${}_a^CD_t^\alpha$的简化形式,$\alpha_i\in\mathbb{R}^+$,$\beta_j\in\mathbb{R}^+$,$a_i\neq0$,$b_j\neq0$,$i=0,1,\cdots,n$,$j=0,1,\cdots,m$,$\beta_m\leqslant\alpha_n$,阶次分别满足 $0\leqslant\alpha_0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n$ 和 $0\leqslant\beta_0<\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_m$. Podlubny 给出了上述分数阶微分方程解的存在性与唯一性定理[2],是研究微分方程描述的分数阶系统其他特性的基础.

用分数阶微分方程描述的控制系统,时域分析较为复杂;而分数阶控制系统的频域传递函数描述是分数阶多项式方程形式,结构简单便于直接分析系统控制性能及稳定性. 上述微分方程描述的系统在频域上的传递函数为

$$P(s)=\frac{b_m s^{\beta_m}+b_{m-1} s^{\beta_{m-1}}+\cdots+b_1 s^{\beta_1}+b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n}+a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}}+\cdots+a_1 s^{\alpha_1}+a_0 s^{\alpha_0}} \tag{1.2}$$

对于 p 输入 q 输出的系统,状态空间描述的一般形式为

$$\begin{aligned} D^\alpha \boldsymbol{x}&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y}&=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \end{aligned} \tag{1.3}$$

式中,$\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$;$\alpha=(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$;$\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^p$是输入向量;$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$是状态向量;$\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^q$是输出向量;$\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$是状态矩阵;$\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times p}$是输入矩阵;$\boldsymbol{C}\in\mathbb{R}^{q\times n}$是输出矩阵;$\boldsymbol{D}\in\mathbb{R}^{q\times p}$是传递矩阵. 状态空间描述方法根据阶次复杂程度和分母形式会有计算精度与计算量的差别. 这种描述方法一般适用于阶次复杂度适中的小分母分数阶系统,在此基础上还能进行简单的零极点定义、状态反馈极点配置、能控能观性判断[26,27]以及建立复频域模型[28]等研究.

1.2.2 分数阶控制系统稳定性及鲁棒稳定性

对于控制系统来说，系统稳定是最基本也是最首要的问题. 对分数阶系统来讲，同整数阶类似，也有外部稳定性与内部稳定性问题. 外部稳定性又叫有界输入有界输出(boundary input boundary output，BIBO)稳定. 不同分数阶系统的不同数学模型描述对应不同稳定性判定方法. 如果给出分数阶系统传递函数 $P(s)$，一般情况下系统为输入输出稳定的充分必要条件是在第一黎曼面内，特征方程 $F(s)=0$ 的根仅位于左半平面，则分数阶系统 $P(s)$ 稳定. 对于同元次分数阶系统，可以利用变量替换 $w=s^{\alpha}$ 得到关于 w 的特征方程，将 s 平面的稳定区域映射为 w 平面上的角形区域，通过此特征方程根的相角来检验分数阶系统的稳定性[29]. 而如果线性分数阶系统是用状态空间模型表示，则一般利用 Kronecker 积来判断系统矩阵特征值是否在稳定扇形区内以检验稳定性[30]. 对于用状态空间表示的同元次分数阶线性系统，可以通过状态矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值判断系统是否渐近稳定，即内部稳定性判据[31]. 此外，Wang 等提出了线性分数阶系统 Nyquist 判据及对数频率判据等频域方法，通过图形方法来检验分数阶系统稳定性[32].

在许多实验或工业现场中，由于信息采样、传输的滞后性，时滞是不可避免的内在现象，因此分数阶时滞系统稳定性也受到许多学者的关注. 通常研究时滞分数阶系统的稳定性的主要方法可以分为两大类：一类是基于 Lyapunov 函数方法，另一类则是基于系统相应特征方程的特征根分析方法. 基于 Lyapunov 函数方法是给出分数阶的 Lyapunov 第一方法和第二方法，并将经典微分系统中的指数稳定性概念推广到分数阶系统中的 Mittag-Leffler 稳定性中[33,34]. 后一类基于特征方程的特征根分析方法，有基于频响图的几何判据[35]，具有方便、直观的特点，但不能判断系统特征方程的特征根的分布情况；数值积分检验法[36]克服了这一缺陷，并具有简单、高效的特点，在分数阶时滞系统稳定性判定中得到推广与应用.

实际系统总是不可避免地受到一些不确定因素的影响，如系统内部的不确定参数、不确定结构等. 另外，系统在运行过程中，由于工作环境的变化、位置的变迁、元件的老化，还有建模过程中的降阶近似量测噪声等，这些因素对系统的性能都有着不同程度的影响. 如果把所有的不确定因素视为扰动，所谓的鲁棒性就是系统的某一品质或者说某种性能在受扰动后仍能保持不变的性质. 如果某一稳定的系统在受扰动后仍然是稳定的，便称其具有鲁棒稳定性. 鲁棒稳定性研究和控制对象一般是不确定分数阶系统或者时滞分数阶系统. 梁舒等通过研究分数阶系统稳定区域与线性矩阵不等式(linear matrix inequality，LMI)之间的联系，改进了线性矩阵不等式稳定判据，设计了多胞型不确定分数阶系统的鲁棒控制器[37]. 卫一恒等根据退化分析方法和积分不等式法逼近系统稳定性，提出了不确定分数阶时滞系统的线性矩阵不等式形式的稳定性判据[38]. 梁涛年等提出了针对区间分