超级考研数学系列丛书

考研数学基础引导

朱祥和 主编

- 清晰的知识框架、明确的考点说明
- 透彻的例题精讲、深入的难点解析
- 精选基础教材中的典型习题及答案

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

考研数学基础引导

主　编　朱祥和
副主编　张　伟　胡　雷
参　编　（排名不分先后）
冯　志　唐　蕾　李　磊　郑　帅
刘丽文　李　芳　李文飞

华中科技大学出版社
中国·武汉

内容简介

《考研数学基础引导》是专门针对硕士研究生入学考试编写的. 整本书包含考研数学要求的基本知识、典型例题和经典教材中的经典题解析. 希望通过对这本书的学习，在较短时间内，掌握考试要求的基本概念、基本理论、基本方法，掌握高等数学、线性代数、概率论与数理统计的基本知识点及典型习题，让数学基础薄弱甚至零基础的考生都能有较大的提升.

由于编写时间的限制，书中难免存在不足之处，敬请广大读者批评指正. 最后，祝同学们复习顺利，实现心中理想！

图书在版编目(CIP)数据

考研数学基础引导/朱祥和主编. —武汉：华中科技大学出版社，2017.2
ISBN 978-7-5680-2563-8

Ⅰ.①考… Ⅱ.①朱… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 014050 号

考研数学基础引导
Kaoyan Shuxue Jichu Yindao

朱祥和 主编

策划编辑：谢燕群
责任编辑：熊 慧
责任校对：刘 竣
责任监印：周治超
出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉) 电话：(027)81321913
武汉市东湖新技术开发区华工科技园 邮编：430223
录 排：武汉市洪山区佳年华文印部
印 刷：武汉鑫昶文化有限公司
开 本：787mm×1092mm 1/16
印 张：34.5
字 数：902 千字
版 次：2017 年 2 月第 1 版第 1 次印刷
定 价：69.80 元

华中出版

本书若有印装质量问题，请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线：400-6679-118 竭诚为您服务

前　　言

数学复习建议书

你好！感谢你在考研复习过程中，选择了我们这套丛书做伴．在未来接近1年的时间里，我们将始终跟你在一起并肩作战，为你保驾护航．如果你在复习过程中，碰到什么问题，我们热烈地欢迎你联络我们．你也可以关注丛书主编朱祥和教授的新浪微博：祥和老师．

考研数学满分150分，是研究生考试中非常重要的一门科目，很容易拉开分数，因此是考研学生"必争的领地"，享有"得数学者得考研"的美誉．本书分为三个部分，即高等数学、线性代数、概率论与数理统计，这三个部分独立成体系．本书在总结历年考研真题的基础上，结合最新的考研命题思路，针对考研数学的基础复习时间、重点、方式、参考资料、辅导班等基本问题进行分析，以助准备考研的同学们能够顺利考上自己心仪的学府．

一、宏观复习脉络

1．知己知彼，百战不殆

1）考试类型

考研数学按照考生所报考的专业主要可分为三个类型，即数学一、数学二、数学三，考查内容涉及高等数学、概率论与数理统计以及线性代数三个部分（注意，数学二不考概率论与数理统计部分）．在数学一、数学三的试卷中，三科所占的比重分别约为56%、22%、22%，而在数学二的试卷中，高等数学和线性代数分别约占78%和22%的比例．考生在实际复习过程中，要按照三个部分在考试中所占的比例，合理地分配复习时间．

2）试卷题型

在开始复习前，必须对考研数学的题型有一个清楚的把握．考研数学的整张试卷可以分为选择题、填空题和解答题三种题型．选择题有8道题，填空题有6道题，每道题均为4分．这两部分占了很大的比例，达到56分．解答题为9道，共94分．对待这三种不同的题型，应该选择不同的解题方法，例如，在做选择题和填空题时，可能会有一些特殊的处理方法和技巧．如果做这种题还是按照常规主观题的做法，有的时候方法不当，本来很简单的题做成了很复杂的题，走了弯路，而且浪费了宝贵的时间．但是，考生也不能片面追求技巧，而是要把这种技巧建立在自身已经很牢固地掌握基础知识之上，做到基础牢固，技巧添花．

3）考研数学考什么

据统计，每年考研数学试题中有60%以上的题目是在考查对基础知识的理解与掌握，所以一定要重视基础．但是很多同学不够重视这一点，总是好高骛远，一味寻求技巧或者是抠难题，以为这样才是提高数学成绩的途径．其实，这就是相当一部分同学复习数学的"恶习"．考研数学中大部分是中档题和容易题，所谓的20%的比较有难度的题目，其考查的不过是简单题目上的进一步综合分析能力，并不是说有多么难．简而言之，考研数学的考试重点在于对基础知识的掌握与运用．

4）善用历年真题

统计表明，每年的研究生入学考试高等数学内容较之前几年都有较大的重复率．当年试题

与往年考题雷同的约占 50%. 这些考题或是改变某一数字,或是改变一种说法,但解题的思路和所用到的知识点几乎一样. 需要通过对考研的试题类型、特点、思路进行系统的归纳总结,并做一定数量的习题,有意识地重点解决解题思路问题. 对于那些具有很强的典型性、灵活性、启发性和综合性的题,要特别注重解题思路和技巧的培养. 尽管每年试题千变万化,但其所考的知识结构基本相同,题型相对固定,往往存在明显的解题套路. 提炼题型的目的是提高解题的针对性,形成思维定式,进而提高考生解题的速度和准确性. 例如,考数学一的同学,最好看看往年的其他类数学的真题,如数学三的概率论与数理统计、数学二的线性代数等. 一方面,这些题目有可能难于数学一的,另一方面,这些考题有可能稍作变换后就出现在当年的数学一考试中.

此外,现在的阅卷都是分步给分的,要通过自己不断地摸索去体会历年考试真题,重视总结归纳、解题思路、套路和经验,做到训练有素. 这样在考试中即便碰到很吃力的问题,也可以将分数的损失减到最低.

2. 运筹帷幄,决胜千里

在启动考研数学复习之前,首先需要从宏观上把握考研数学全年复习规划. 考研是一个极具选拔性和自学性的考试. 在学习中必须具备良好的心态和策略,这是成功的保证. 学数学靠的是日积月累,靠的是早准备、早计划、早复习. 数学基础好的同学需要花 8～10 个月时间,稍差的同学需要花 12～15 个月时间. 数学的复习应具有连贯性. 由于数学分值的重要性以及数学内容多而杂,量很大,因此应该做好打持久战的心理准备. 事实上,一旦进入考研备考阶段,数学复习就不应该间断,考生最好可以保证每天至少用 3 个小时的时间来复习数学. 特别是到了最后冲刺阶段,考生在心理和生理上都难免会感到疲惫,而此时恰恰是复习备考最关键的时候. 若此时间断或者放下对数学的复习,则会对考生的备考状态产生不利影响. 在最后的复习阶段中,最好按照考试时间去做一些强度不太大的模拟题或者已经做过的真题,让自己保持"手感",以良好的复习心态积极迎接考试,这是至关重要的. 总体来说,就是要前期把基础打好,中期进行专项训练,后期进行技巧培训,日积月累,持之以恒.

考生要保持良好平稳的心态,避免情绪因素影响复习和考试. 每年都有很多考生中途放弃,越到后期越密集,几乎每天都不断有人退出竞争,甚至在考场上还有当场打退堂鼓的. 据调查,每年在 6 月份宣称准备考研的同学中大约只有 40%坚持到底. 这种坚持需要超强的毅力和定力. 实现这种超强毅力和定力:一是凭借各人的自制力;二是通过不断的自我心理暗示来强化信心;三是尽量远离干扰源,如尽量不要在宿舍学习;四是通过周期性的适当放松,甚至发泄,以保持心理平衡. 此外,在复习的过程中,一旦复习计划制订完成,就要严格按照要求来执行. 过度地与别人进行比较,会干扰自己的进度,影响自己的心理状态,扰乱自己的复习计划. 要做到按部就班,循序渐进,心中有数. 孟子曾经说过:"天将降大任于斯人也,必先苦其心志,劳其筋骨,饿其体肤,空乏其身,行拂乱其所为,所以动心忍性,曾益其所不能."考研对我们来说,不单单是对知识点的考查,更是对考生心理素质的巨大考验. 考生必须要做好足够的心理准备,去迎接即将到来的磨炼. 考研的路上,请牢牢记得:只有心理强大,才是真正的强大.

3. 合理安排每天的复习时间

在研究生入学考试中,数学被安排在上午,为了调整生物钟与之一致,我们建议考生将数学的复习时间安排在上午. 每天上午 8:30—11:30 为佳. 每天至少应该花 3 个小时来复习数学,其中用 1.5～2 个小时的时间理解、掌握基本概念、定义等,余下的时间用于做习题的巩固. 考生也可以根据自己对于知识的掌握程度做适当的增减. 要保证基础阶段高等数学的复习在 3 个月内完成,线性代数的复习在 1 个月内完成,概率论与数理统计的复习在 1 个月内完成.

二、核心复习内容

1. 教材

1）计划安排——把握大纲，吃透课本

（1）把握大纲.

考试大纲之所以很重要，是因为它几乎涵盖了考试的所有知识点和对考生能力的要求. 考试大纲对考试内容的要求有理解、了解、掌握三个层次；对方法的要求有掌握、会（能）两个层次. 一般来说，要求理解的内容、要求掌握的方法，是考试的重点. 在历年考试中，这方面考题出现的概率较大；在同一份试卷中，这方面试题所占的分数也较多，不仅要在主要内容和方法上多下功夫，更重要的是去寻找重点内容与次要内容间的联系，以主带次，用重点内容提挈整个内容. 主要内容理解透了，其他的问题迎刃而解. 从近几年的情形来看，考研数学大纲基本没有变化.

（2）吃透课本.

课本是数学所有知识的"源"，所以在复习的过程中，一定要牢牢地抓住课本. 在复习备考的基础阶段，首先要从课本着手，参照考试大纲，建立对数学课本整个体系知识脉络的宏观掌握，同时培养好的复习习惯. 需要强调的是，仅仅粗枝大叶地浏览一遍课本是绝对不行的，只有通过对课本第二遍、第三遍的反复研读，才能真正理解和掌握课本的精华.

2）推荐书目

（1）《高等数学》，同济大学数学系编，第七版（上、下两册）.

（2）《工程数学——线性代数》，同济大学数学系编，第五版.

（3）《概率论与数理统计》，浙江大学盛骤、谢式千、潘承毅编，第四版.

（4）《考研数学基础引导》，朱祥和主编.

3）复习建议

在数学基础阶段的复习过程中，应该注意高等数学、线性代数、概率论与数理统计三科的复习顺序. 在第一遍复习中，建议先复习高等数学，再复习线性代数，最后复习概率论与数理统计. 对于要考数学二的同学，概率论与数理统计的内容不在考试的范围之内. 由于高等数学是概率论与数理统计的基础，首先学习高等数学是上佳选择. 同时，由于数学的学习具有系统性和连续性，因此建议一门课程复习完毕后，再投入下一门的复习. 当然同学们也可以根据自己的特殊情况调整复习顺序.

在第二遍复习过程中，建议在脑海中通过线索把所学的知识串联起来. 例如，在复习高等数学时，一定要把极限论、微分学和积分学有机地结合起来，前后贯穿，灵活运用. 在复习线性代数时，一定要以线性方程组为核心，前后融会贯通，灵活运用所学知识来分析问题和解决问题，不要将它们孤立割裂开来. 比如，行列式、矩阵、向量、线性方程组是线性代数的基本内容，它们不是孤立割裂的，而是相互渗透、紧密联系的. 在复习概率论与数理统计时，考生要灵活运用所学知识，建立正确的概率模型，综合运用极限、连续、导数、积分、广义积分、二重积分及级数等知识去分析和解决实际问题，提高解综合题的能力.

2. "三基"（基本概念、基本方法、基本定理）

1）计划安排——强化基础，重视"三基"

在复习课本的过程中，一定要重视基本概念、基本方法和基本定理. 数学是一门逻辑性极强的演绎科学，只有对基本概念深入理解，对基本定理和公式牢牢记住，才能找到解题的突破口和切入点.

通过分析数学答卷可以发现，因为忽略了"三基"而失分的现象在近年的考试中出现很多.考生失分的一个重要原因就是对基本概念、定理记不全、记不牢、理解不准确，对基本解题方法掌握不好等；大多数考生往往因为一个考点没掌握而影响了整道题的运算，最终导致失分.如果对数学中最基本的方法掌握不好，则会给解题带来思维上的困难.例如，判断狄利克雷函数在 $x=0$ 处的间断点类型，在这道题上犯错误的同学不在少数.原因主要有二：一是对极限的性质还很模糊，没有分清函数在一点处有定义和函数在一点存在极限的区别；二是没有深入理解间断点的类型，不了解第一类间断点和第二类间断点的本质区别.这道题大家如果对照着课本一步一步做，几乎没有人会做错，而如果脱离了课本，很多人却感觉模棱两可.可导、可积等概念也是如此，其易错点有待大家在复习时挖掘.因此，在复习过程中，一定要针对大纲和课本具体研究，将二者有机结合起来，重点要把"三基"打牢固.

2）复习建议

第一，基础需全面.在备考复习的实践中，可能会遇到一些非常基本，而课本中又未明确给出的知识点，有些甚至是高中所学的知识，例如，三角函数的运算（和差角公式、积化和差公式、二倍角公式、半角公式等）、两点之间距离公式、阶乘公式、韦达定理，以及幂指数函数、对数函数的变换等.这些内容虽然很基础，但复习的时候绝不能忽略，一旦出错会影响后续的运算，甚至有些时候，它们可能会成为考试解题的突破点.例如：$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$，其中 $x>0$，$y>0$，这个式子可以作为满足 $f(xy)=f(x)+f(y)$ 的一个特殊函数，进行特殊化处理，也可以运用到求含复杂运算的对数函数的导数中（例如，求 $y=\ln 3x\sqrt{2e^x}(x>0)$ 的导数，可先将式子变形为 $y=\ln 3\sqrt{2}+\ln x+\frac{1}{2}\ln e^x$，易得其导数为 $y'=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}$，其他不再一一举例）.

第二，复习方法须得当.在复习中，首先通过课本的目录熟悉一下各章节的内容，然后吃透基本的概念、定理、例题，对一些重要的概念、公式要在理解的基础上进行记忆，同时通过课后习题进行巩固.对于一些易混淆的概念，可以通过相互比较来进行区分，把握课本前后内容的相互联系.例如，在讲到函数时，应对函数的奇偶性、周期性、单调性、有界性、对称性和凸凹性等性质进行归纳和总结，以便灵活运用.

3. 例题和课后习题

1）计划安排——强化基础，重视"三基"

课本中的例题都是很简单的，能够成为例题，说明它们必然有其经典之处，请大家细心体会.再有就是课后习题，尽管在一道大题中，每一道小题看起来都差不多，但如果不一道一道认真做，是很容易忽视一些细节问题的.例如：$x=0$ 是否是 $y=\arctan(1/x)$ 的一条垂直渐近线？如果 $y=x\sin(1/x)$ 在 x 趋于正无穷大和负无穷大时的极限都存在，是否它就有两条水平渐近线？

对于第一个问题，首先我们应该明白垂直渐近线，是在自变量趋于某一点时，其函数趋于无穷，因此，当 x 趋于 0^+ 时，$1/x$ 趋于正无穷，$\arctan(1/x)$ 趋于 $\frac{\pi}{2}$，不是趋于无穷大，而当 x 趋于 0^- 时，$\arctan(1/x)$ 趋于 $-\frac{\pi}{2}$，不是趋于无穷大.由此可见，$x=0$ 不是 $y=\arctan(1/x)$ 的一条垂直渐近线，而且，还能得出 $x=0$ 是 $y=\arctan(1/x)$ 的第一类间断点，类型为跳跃间断点.而对于 $y=x\sin(1/x)$，当 x 趋于正无穷大和负无穷大时，$1/x$ 均趋于 0，根据 $\lim y=\lim\frac{\sin(1/x)}{1/x}=1$，可知当 x 趋于正无穷与负无穷时，其只有一条渐近线，为直线 $y=1$.此处不再一一举例.

另外，每章的总复习题中的部分题目就是历年考研真题，其重要性不言而喻.

4. 强化训练

1）计划安排——多动手，熟能生巧

很多考生存在这样的问题：书看了，就以为会了，或者做题时只是在草稿纸上画两下，并没有认真地算，而等到真正动手做的时候，错误百出. 这是个很大的问题. 数学是一门严谨的学科，容不得半点纰漏，在还没有建立起完备的知识结构之前，若只看解题而不亲自动手做，则必然难以把握题目中的重点. 这就要求同学们平时复习的时候，切勿眼高手低，对待一些基本的运算题不能光看会，而不去算. 不是说每道题都认真地做到底，但每一种类型的计算题都应该拿出一定量进行练习，这样才能提高计算的准确率，保证会做的题目真正能够得分. 而且，通过动手练习，还能帮助同学们规范答题模式，提高解题和运算的熟练程度. 正式考试时 3 个小时那么大的题量，本身就是对计算能力和熟练程度的考查. 因此，为了取得好的数学成绩，要求必须大量练习.

2）复习建议

在做题的过程中，一定要重视总结归纳解题思路、方法和技巧. 很多同学做题的过程就到核对过答案或是纠正过错误就结束了. 建议大家在纠正完错误之后，再把题目从头看一遍，总结一下自己都在哪些方面出错了，原因是什么，这道题中有没有出现自己不知道的新的方法、思路，新推导出的定理、公式等，并把这些有用的知识全都写到笔记本上，以便随时查看和重点记忆. 对于大题的解题方法，要仔细想一想，都涉及哪些科目和章节、这些知识点之间有哪些联系等，从而使自己所掌握的知识系统化，以达到融会贯通. 只有这样，才能使做过的题目实现其最大的价值. 如果你能够这样做，那么做过的题在以后的复习中如果没有时间，就不用再拿出来重新看了，因为你已经把要掌握的精华总结好了，只需看笔记本就行了.

5. 思维的训练

1）计划安排——多归纳总结，发散思维

思维上的训练存在于整个复习过程中，在最后考试的时候得以充分检验. 在平常的复习过程中，要有意识地培养逆向思维、抽象思维和定向思维的能力. 在训练中，要注意理解和总结一些技巧性的东西，有意识地提高自己思维的灵活性. 要争取一题多种解法，即概念要相通，在自我训练过程中多思考，灵活运用概念原理. 同时，要多了解归纳数学命题中常用到的一些思想. 这里列举一些，供同学们在复习中学习、领会、运用、掌握.

（1）数形结合的思想：利用图形来求解数学问题是一种非常简便、有效的常用手段，有时可将复杂问题直观化、简单化；对于有些问题，必须要画出图形，才能进行求解，例如，求曲线在某点的曲率中心坐标，斜率、导数与正切角的关系，等等.

（2）放缩的思想：可广泛地应用于夹逼法则求极限、证明不等式、求上下界等问题上. 它是一种对技巧性要求较高的方法，通常需要对问题进行合适的变形才可以得出所要的结论.

（3）换元的思想：求抽象函数、复合函数求导、求偏导、求微分、利用三角换元来进行不定积分或圆和椭圆等曲线方程的计算、第一换元积分、第二换元积分、曲线积分、极坐标与直角坐标转换等问题，均可利用换元的思想进行变换从而得以解决.

（4）构造函数的思想：通过构造某种函数，可以使问题得以转化，从而利用所构造函数的各种性质和运算得以解决. 例如，构造函数的思想可应用于拉格朗日中值定理的证明，结合函数的极值和最值或者零值定理、介值定理等定理来进行不等式的证明，以及用于实际应用等题目中，这是一种解决问题极为有效的手段.

（5）方程（组）解的思想：许多问题，例如，求某些微分方程的特解、求曲线方程的交点、线

性代数中形如 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$(其中 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为矩阵或者向量)等,都可以归结为求方程(组)解的问题.这些解常常是对应函数在一定条件下的临界点.通过对它们进行讨论,就可得出对应函数的性质.例如,一元二次方程 $F(x)=0$ 在 $\Delta>0$ 条件下的解将坐标轴分成了 3 个区间,可利用数形结合来讨论对应函数 $F(x)$ 在某特定区间的符号等.

(6) 从特殊到一般的思想:常用于求微分方程、求 $m\times n$ 线性方程组等的通解的问题中,通过求解出某些特解,从而可得到通解的一般形式;泰勒展开式、麦克劳林展开式等也可看作通过某些特殊点的函数值和各阶导数值而得出函数的一般表达式.此外,数学归纳法也可看作是从特殊到一般过渡的一种推理方法.在实际做选择题时,可利用某些特殊值和特殊函数,迅速得出结果.

(7) 拆分的思想:拆分的思想实质上是化整为零,逐个击破.例如:利用题目所给条件或者被积函数的奇偶性、对称性等,进行积分上下限的分割,用分割法求定积分面积、求体积、求曲面积分,等等.分类讨论也可归为此类思想,当题目中所给的条件存在着多种可能结果时,常需要进行讨论.例如:讨论曲线方程 $F(x)$ 和 $G(x)$ 的交点个数,常常通过转化为 $F(x)-G(x)=0$,并判断有几个解来解决.

(8) 凑的思想:在解决求极限、利用定义凑导数的形式、证明不等式、分式的拆分等问题和定积分类实际应用题中利用模型凑出被积函数从而进行积分,以及线性代数中凑上三角、下三角来求行列式的值,凑零来简化行列式的运算等问题中,常用到凑的思想.这种方法也往往要一定的技巧,需要进行训练.

(9) 取反的思想:在不方便直接求解问题时,常常可通过求解其反面来解决,原理可表示为 $A_{所求}=A_{总}-A_{余}$.例如:在所求图形的面积较难计算而总面积和其他部分的面积易求时,可利用取反来解决;在计算复杂事件的概率时,通过先求其对立事件概率,进而求得所求事件的概率.此外,求逆矩阵、求反函数也可归为此类,有时可以方便地解决问题.

数学是一门博大精深的学科,其中蕴含着丰富的思想和智慧,有待大家在学习中慢慢发现、体会、领悟.只有掌握了这些思想,才能看透题目的本质,做到融会贯通,以不变应万变.

特别应该强调一点,那就是数学当中所有用到的定理、思想、方法都有一定的适用范围和条件,在解题之前必须要进行观察和判定,以免掉入命题者的陷阱,例如,洛必达法则适用于求 0/0 型或者无穷/无穷型的极限,用它求极限之前必须判断是否满足这两种类型,如果不满足而用了洛必达法则,结果肯定会出错.这就要求必须学会读题,练就一双慧眼,学会从题目所给的条件中提炼出有效、正确的信息,来引领解题思路.这必须要通过扎实基础、多做题、多练习、多独立分析题目来强化.只有我们面对一道题时,知道它要考什么,有哪些条件可以利用,才能正确地解答出题目.

三、学习建议

6 月以前:第一轮基础复习.

7 月—9 月:第二轮强化复习.

10 月—11 月中旬:第三轮冲刺复习.

11 月中旬—考前:第四轮点睛复习.

朱祥和

2016 年 10 月于中国人民大学静园

目　录

第一部分　高等数学

第二部分　线性代数

第三部分 概率论与数理统计

第一部分　高等数学

第一章　函数、极限、连续

一、考试要求

函数的概念及表示法;函数的有界性、单调性、周期性、奇偶性;复合函数、反函数、分段函数、隐函数;基本初等函数的性质及图形;初等函数;函数关系的建立;数列极限与函数极限的定义及性质;函数的左、右极限;无穷小量和无穷大量的概念及其关系;无穷小量的性质及无穷小量的比较;极限的四则运算;极限存在的两个准则;两个重要极限;函数连续的概念;函数间断点的类型;初等函数的连续性;闭区间上连续函数的性质.

1. 数学一、数学二

(1) 理解函数的概念,掌握函数的表示法,并会建立应用问题中的函数关系.

(2) 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

(3) 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.

(4) 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.

(5) 理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念,以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.

(6) 掌握极限的性质及四则运算法则.

(7) 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.

(8) 理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的比较方法,会用等价无穷小量求极限.

(9) 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.

(10) 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

2. 数学三

(1) 理解函数的概念,掌握函数的表示法,并会建立应用问题中的函数关系.

(2) 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

(3) 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.

(4) 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.

(5) 了解数列极限和函数极限(左极限与右极限)的概念.

(6) 了解极限的性质和极限存在的两个准则,掌握利用两个重要极限求极限的方法.

(7) 理解无穷小量的概念和基本性质,掌握无穷小量的比较方法,了解无穷大量的概念及其与无穷小量的关系.

(8) 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.

(9) 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

二、知识点及例题

知识点一:函数

(一) 函数的概念

【定义 1.1】 若 D 为一个非空实数集合,设有一个对应法则 f,使得对每一个 $x\in D$ 都有一个唯一确定的实数 y 与之对应,则称这个对应法则 f 为定义在 D 上的一个**函数**,或称变量 y 是变量 x 的函数,记作 $y=f(x),x\in D$. 其中 x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,集合 D 称为函数的**定义域**,也可以记作 $D(f)$. 对于 $x_0\in D$ 所对应的 y 的值,记作 y_0 或 $f(x_0)$,称为当 $x=x_0$ 时函数 $y=f(x)$的**函数值**. 全体函数值组成的集合$\{y|y=f(x),x\in D\}$,称为函数 $y=f(x)$的**值域**,记作 $f(D)$.

注 (1) 当且仅当其定义域与对应法则均相等时,两个函数相等.

(2) 在没有特别指定的情况下,函数的定义域取自然定义域,即使得函数运算有意义的自变量的取值范围. 易知,人为指定的定义域必为自然定义域的子集. 常见的函数及其定义域如下:

$$y=\sqrt{x},x\geqslant 0,\qquad y=\frac{1}{x},x\neq 0$$

$$y=\ln x,x>0;\qquad y=e^x,x\in\mathbf{R}$$

$$y=\sin x,x\in\mathbf{R};\qquad y=\cos x,x\in\mathbf{R}$$

$$y=\tan x,x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi;\quad y=\cot x,x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$$

(二) 函数的运算

(1) 四则运算.

(2) 复合函数.

设 $y=f(u),u\in D_1$ 与 $u=g(x),x\in D_2$ 为两个函数,若 $g(x)$的值域 $g(D_2)$包含于 $f(u)$的定义域 D_1,则可以定义 $y=f(g(x)),x\in D_2$ 为函数 $f(u)$与 $g(x)$的**复合函数**,记作 $y=f(g(x))$或 $f\circ g$.

【例 1.1】 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$,则 $f\{f[f(x)]\}$等于______.

解 由于 $f(x)\leqslant 1$,故 $f[f(x)]=1$,因而 $f\{f[f(x)]\}=1$.

【例 1.2】 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ x^2+x, & x>0\end{cases}$,则(　　).

A. $f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0\\ -(x^2+x), & x>0\end{cases}$　　B. $f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x<0\\ -x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

C. $f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ x^2-x, & x>0\end{cases}$　　D. $f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

解 由于 $x<0$ 时,$-x>0$,故 $f(-x)=x^2-x$,同理可得 $x>0$ 时函数表达式. 选 D.

【例 1.3】 设 $f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+x$，求 $f(x)$.

解 令 $u=e^x+1$，得到 $x=\ln(u-1)$，得 $f(u)=(u-1)^2+u-1+\ln(u-1)$，则

$$f(x)=(x-1)^2+(x-1)+\ln(x-1)$$

(3) 反函数.

① 反函数的定义.

设 $y=f(x)$ 为定义在 D 上的一个函数，其值域为 $f(D)$. 若对于每一个 $y\in f(D)$，均有唯一确定的 x，使得 $f(x)=y$ 与之对应，则将该对应法则记作 f^{-1}. 这个定义在 $f(D)$ 上的函数 $x=f^{-1}(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，或称它们互为反函数.

② 存在反函数的充要条件.

函数 $y=f(x)$ 存在反函数的充要条件是，对于定义域 D 中任意两个不同的自变量 x_1、x_2，有 $f(x_1)\neq f(x_2)$.

③ 反函数的性质.

(i) 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

(ii) 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 (a,b)，值域为 (α,β)，若 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上单调递增(或递减)，则 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上存在反函数，且 $x=f^{-1}(y)$ 在 (α,β) 上单调递增(或递减).

(三) 基本性质

1. 单调性

1) 定义

对于函数 $y=f(x)$，$x\in D$，若在某区间 I 内的任意两点 $x_1>x_2$，均满足 $f(x_1)>f(x_2)$(或 $f(x_1)<f(x_2)$)，则称函数 $f(x)$ 在 I 上**单调递增**(或**单调递减**)，并称 I 为 $f(x)$ 的一个**单调增区间**(或**单调减区间**). 若对区间 I 内的任意两点 $x_1>x_2$ 均有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$(或 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$)，则称函数 $f(x)$ 在 I 上**单调不减**(或**单调不增**).

2) 性质

(1) 若 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 均为增函数(或减函数)，则 $f_1(x)+f_2(x)$ 亦为增函数(或减函数).

(2) 设 $f(x)$ 为增函数，若常数 $C>0$，则 $Cf(x)$ 为增函数；若常数 $C<0$，则 $Cf(x)$ 为减函数.

(3) 若函数 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 增减性相同，则 $y=f(g(x))$ 为增函数；若函数 $y=f(u)$ 与 $u=f(x)$ 增减性相反，则 $y=f(g(x))$ 为减函数.

2. 周期性

1) 定义

对于函数 $y=f(x)$，$x\in D$，若存在正数 T，使得对 D 内的任意一点 x 都有 $f(x\pm T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为一个**周期函数**，而 T 为 $f(x)$ 的一个周期. 易知，若 T 为 $f(x)$ 的一个周期，则对任意的整数 n，nT 亦为 $f(x)$ 的周期. 在 $f(x)$ 的所有周期中，最小的正数称为**最小正周期**.

注 常见周期函数及其最小正周期如下：

$$y=\sin x,T=2\pi;\quad y=\cos x,T=2\pi$$
$$y=\tan x,T=\pi;\quad y=\cot x,T=\pi$$

2) 性质

(1) 若 $f(x)$ 以 T 为最小正周期，则对任意的非零常数 C，$Cf(x)$ 仍然以 T 为最小正周期，$f(Cx)$ 以 $\frac{T}{|C|}$ 为最小正周期.

(2) 若 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 都以 T 为周期，则 $k_1f_1(x)+k_2f_2(x)$ 仍以 T 为周期($k_1,k_2\in\mathbf{R}$). 注