“十二五”江苏省高等学校重点教材

*21世纪*应用型本科院校规划教材

概率论与数理统计

（第三版）

主 编 刘 坤

南京大学出版社

“十二五”[redacted]材（编号：2015-1-021）

21世纪应用[redacted]

概率论与数理统计

（第三版）

主　编　刘　坤
副主编　李晓红

南京大学出版社

内容提要

本书是在2011年12月出版的第二版的基础上修订的，其中随机变量的分布及其数字特征部分重新进行了编写，章节与习题类型进行了调整。全书共分七章，内容包括：随机事件与概率、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、统计量及其分布、参数估计、假设检验等。书末附有习题答案。

本书内容丰富，编写层次清晰，阐述深入浅出，语言简明扼要。

本书可作为高等学校，特别是应用型本科院校工科类和经济管理类各专业的本科生教材，也可作为教学参考书和考研用书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 刘坤主编. -- 3版. -- 南京 : 南京大学出版社，2016.5

21世纪应用型本科院校规划教材

ISBN 978-7-305-16607-5

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①概率论－高等学校－教材②数理统计－高等学校－教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第052049号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路22号　　邮　编 210093
出 版 人 金鑫荣

丛 书 名 21世纪应用型本科院校规划教材
书　　名 概率论与数理统计(第三版)
主　　编 刘　坤
责任编辑 吴　汀　　编辑热线 025-83686531

照　　排 南京南琳图文制作有限公司
印　　刷 江苏凤凰通达印刷有限公司
开　　本 170×240 1/16 印张 15.25 字数 225千
版　　次 2016年5月第3版　2016年5月第1次印刷
ISBN 978-7-305-16607-5
定　　价 39.00元

网址：http://www.njupco.com
官方微博：http://weibo.com/njupco
微信服务号：njuyuexue
销售咨询热线：(025) 83594756

前言

概率论与数理统计是一门基础数学课程。它的基本概念、基本理论和解决问题的思想和方法在工程技术和经济管理中已得到广泛应用。

2011 年 12 月出版的《概率论与数理统计》教材(第二版)经过几年的教学实践,学生和教师反响良好,一致认为教材体系恰当,内容选择编排合理,语言通俗易懂,概念阐述深入浅出,知识点提炼的非常好,能分散难点,易于理解,利于学生自学。但也提出了许多宝贵意见,如习题还不够丰富,例题难度也需深化。另外,考研的学生越来越多,应当充实考研方面的内容。本书是在第二版的基础上进行修订的。本书是作者根据教育部关于高等学校工科类和经济管理类本科数学基础课程教学的最新基本要求,对概率论与数理统计的传统内容进行了整合,在第二版的基础上,对随机变量的分布及其数字特征部分重新进行了编写,章节与习题类型进行了调整。改变了部分内容的阐述方式,使阐述更为精炼和简明易懂,使其更便于讲授和学生接受,在难易程度上充分考虑了高等教育大众化背景下的学生特点和教学特点,既淡化了较艰深的理论推导,突出应用性,又保持了理论体系的连贯性和完整性,以便为学生继续深造和考研提供保障。

本书对第二章内容进行调整,将随机变量与数字特征分开;对例题和习题的配置作了调整和充实,使例题和习题更丰富,题型也更多样;汇编了一些年来的研究生入学考试试题。以上这些改动不仅使有志于攻读硕士研究生的学

生能在学习过程中就作适当的准备，而且所有学生也能从中具体理解概率论与数理统计课程的基本要求和重点。全书共分七章，内容包括：随机事件与概率、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、统计量及其分布、参数估计、假设检验等。书末附有习题答案。

本书注重讲清用数学知识解决实际问题的基本思想和方法，着重培养学生的逻辑能力、应用能力和创新思维能力。

本书第三版由刘坤任主编，李晓红任副主编；其中第一章、第二章；第三章、第四章、第五章由刘坤编写，第六章、第七章由李晓红编。刘坤撰写编写大纲与统稿。

本书的修订，得到了常州工学院教务处、数理与化工学院的领导和南京大学出版社的大力支持，在此向他们深表谢意！编写过程中，我们参阅了许多教材，谨表诚挚谢意！

由于编者水平有限，书中错误疏漏之处在所难免，望广大读者和同行专家批评指正。

编　者

2016 年 1 月

目　录

第 1 章　随机事件与概率

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科，是近代数学的重要组成部分，同时也是近代经济理论应用与研究的重要数学工具. 概率论与数理统计在工业生产、军事科学、经济管理中有广泛的应用.

§1.1　随机事件及其运算

1.1.1　两类现象

在现实世界中，我们经常遇到两类不同的现象.

1. **确定性现象**

确定性现象的特点是：在一定条件下，某种结果必然发生或必然不发生，即只有一个结果，不存在其他的可能性.

例如：水在标准大气压下，加热到 100 ℃就会沸腾；向上抛一颗石子，必然会落回地面；任何有生命的生物，有朝一日必然会死亡；掷一枚骰子，掷一次，必然出现 1～6 中的任一个点数等.

又如：水在常温下不可能燃烧；子弹打得再高不可能飞出地球；没有电电灯不可能亮；目前小麦的产量不可能亩产十万斤；掷一枚骰子一次不可能出现 7 个点.

2. **随机现象**

随机现象的特点是：在一定条件下，可能发生这样的结果，也可能发生那样的结果，而在大量重复试验中其结果又具有某种规律性.

例如：抛一枚均匀的硬币，落下后，可能正面朝上，也可能反面朝上；某篮球运动员投篮一次，其结果可能命中，也可能不命中；某射手打靶，打一枪，可

能是 10,9,8,7,6,5,4,3,2,1,0 环;从某厂的一批产品中(含有次品数不少于 4 件),随机抽取 4 件进行检查,抽到的次品数可能是 0,1,2,3,4.

这些例子所反映的现象都是随机现象. 概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律的一门数学学科.

1.1.2　样本空间与随机事件

1. 随机试验

我们遇到过各种各样的试验. 在这里,我们把试验作为一个含义广泛的术语. 它包含各种各样的科学实验. 而我们所要研究的随机现象是通过随机试验来研究的. 在一定条件下,抛硬币、投篮、抽查产品等,都是随机试验,简称试验 E.

定义 1.1　满足以下条件的试验称作随机试验:

(1) 试验可在相同条件下重复进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果;

(3) 进行一次试验前无法确定出现哪种结果.

2. 样本空间与样本点

对于随机试验 E 的所有可能结果 e 所构成的集合 $\{e\}$,称为随机试验 E 的样本空间,记为 S. 样本空间的元素,即 E 的每一个结果 e,称为样本点.

例 1　写出下列随机试验的样本空间.

E_1:掷一枚骰子,观察所出现的点数.

解　$S_1=\{1,2,3,4,5,6\}$.

E_2:掷两枚硬币,观察所出现的正反面的情况. 设 H 表示"正面向上",T 表示"反面向上".

解　$S_2=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$.

E_3:在装有红、白、黑球的袋子中摸一球.

解　$S_3=\{$红,白,黑$\}$.

E_4:某射手射击,击中目标为止. 设击中为+,击不中为-,则

解　$S_4=\{+,-+,--+,\cdots,---\cdots+\}$.

3. 随机事件

一般地，我们称随机试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的随机事件，简称事件. 常用 $A,B,C,\cdots$表示. 当且仅当事件中的一个样本点出现时，就称这一事件发生.

只含一个样本点的事件叫基本事件. 如，掷一枚骰子，出现6点. 由2个或2个以上样本点构成的事件叫复杂事件. 例如，掷一枚骰子出现"奇数点"，是复杂事件，是由1点、3点、5点构成的.

样本空间 S 包含所有的样本点，它是自身的子集，在每次试验中它总是发生的，称为必然事件，记为 S.

空集不包含任何样本点，它也是样本空间 S 的子集，它在每次试验中都不发生，称为不可能事件，记为$\varnothing$.

1.1.3　事件的关系和运算

1. 包含关系

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含 A，或称 A 包含于 B. 记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$.（图1-1）

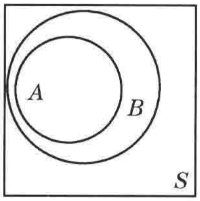

图1-1

例2　某人打靶，靶上有10环，打一枪. 设

$A=\{$命中环数不小于8环$\}=\{8,9,10\}$.

$B=\{$命中环数不小于5环$\}=\{5,6,7,8,9,10\}$，则 $B\supset A$.

2. 相等关系

若 $B\supset A$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等. 记为 $A=B$.

3. 事件的和(并)

事件 A 与事件 B 至少有一个发生，称为 A 与 B 的和. 记为 $A+B$ 或 $A\cup B$.（图1-2）

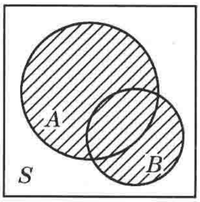

图1-2

类似地，称 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件；称 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的和事件.

例3　掷一枚骰子，设 $A_i=$"出现 i 点"$(i=1,2,3,4,$

5,6),B=“出现偶数点”,则 $B=A_2\cup A_4\cup A_6$.

4. **事件的积(交)**

事件 A 与事件 B 同时发生,称为 A 与 B 的积,记为 AB 或 $A\cap B$.(图 1-3)

类似地,称 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件;称 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的积事件.

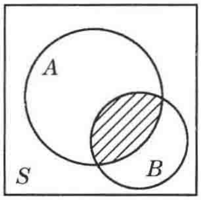

图 1-3

例 4 A=“甲厂的产品”,B=“正品”,则 AB=“甲厂生产的正品”.

5. **事件的差**

若事件 A 发生而事件 B 不发生,则称为 A 与 B 的差.记为 $A-B$.(图 1-4,图 1-5)

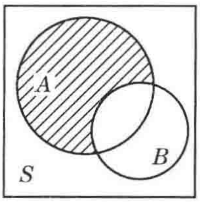

图 1-4

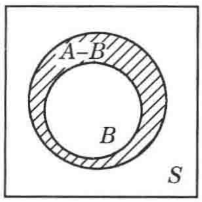

图 1-5

例 5 如例 3,B=“出现偶数点”,A_2=“出现 2 点”,$B-A_2=\{4,6\}$.

6. **互不相容事件(互斥事件)**

若事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$,则称 A 与 B 互不相容(互斥).(图 1-6)

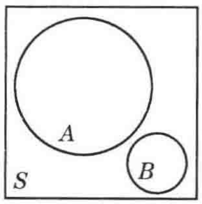

图 1-6

例 6 某人打靶打一枪,A=“命中 8 环”,B=“命中 9 环”,则 A 与 B 互不相容,即 A 与 B 不能同时发生.

7. **对立事件(互逆事件)**

若事件 A 与事件 B 互斥,且 A 与 B 的和事件为 S(样本空间).即 $A\cap B=\varnothing,A\cup B=S$,则称 A 与 B 是相互对立(互逆)的.A 的对立事件记为$\overline{A}$,显

然有$\overline{A}=S-A$.(图 1-7)

例 7　从含有 5 件次品的 20 件产品中随机抽查 5 件产品,设 A="全是正品",则$\overline{A}$="至少有一件次品".

对立必然互斥,反之则不一定.

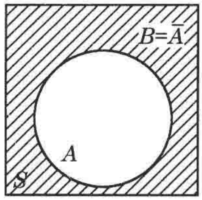

图 1-7

8. 事件的运算律

设 A,B,C 为事件,事件的关系与运算满足下列运算律:

(1) $A\cup\varnothing=A,A\cap\varnothing=\varnothing,A-\varnothing=A,A\cup A=A,A\cap A=A$.

(2) **交换律**:$A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$.

(3) **结合律**:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(4) **分配律**:$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

(5) **差化积**:$B-A=B\cap\overline{A}$.

(6) **吸收律**:若 $A\subset B$,则 $A\cup B=B,A\cap B=A$.

(7) **对偶律**:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.(**德摩根定律**)

一般地,对于 n **个事件** $A_1,A_2,\cdots,A_n$,**有** $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i},\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$.

同时,可以得到:$B-A=B-AB$.

例 8　甲、乙、丙三人对靶射击,用 A,B,C 分别表示"甲击中"、"乙击中"和"丙击中",试用 A,B,C 表示下列事件:

(1) 甲、乙都击中而丙未击中;

(2) 只有甲击中;

(3) 靶子被击中;

(4) 三人中最多两人击中;

(5) 三人中恰好一人击中.

解　(1) 事件"甲、乙都击中而丙未击中"表示 A,B 与$\overline{C}$同时发生,即:$AB\overline{C}$.

(2) 事件"只有甲击中"就是 A 发生而 B 和 C 未发生可表示为:$A\overline{B}\,\overline{C}$.

(3) 事件"靶子被击中"意味着甲、乙、丙三人至少有一人击中,可表示为:$A\cup B\cup C$.

(4) 事件"三人中最多两人击中"意即"三人中至少有一人未击中",可表示为:$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

(5) 事件"三人中恰好有一人击中"意即"三人中只有一人击中其余两人未击中",可表示为:$A\overline{B}\,\overline{C}\cup B\overline{A}\,\overline{C}\cup C\overline{A}\,\overline{B}$.

§1.2 随机事件的概率

研究随机现象,不仅要知道在试验中可能出现哪些事件,更重要的是要研究各事件出现的可能性的大小,即所谓事件的概率.我们知道随机事件在一次试验中是否发生是不确定的.但在大量重复试验中,它的发生却具有统计规律性,所以应从大量试验出发来研究它.为此,先从研究事件的频率入手.

1.2.1 频率与概率

1. 频率的定义

定义 1.2 设随机事件 A 在 n 次重复试验中出现 m 次,m 称为事件 A 发生的频数.则称比值$\frac{m}{n}$为事件 A 在 n 次重复试验中出现的频率,记为 $f_n(A)$.

即

$$f_n(A)=\frac{m}{n}.$$

2. 频率的性质

由频率的定义,容易得出它具有下列性质.

(1) 非负性:即对任何事件 A,$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

(2) 规范性:即对必然事件 S,有 $f_n(S)=1$;

(3) 有限可加性:若 k 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 两两互不相容,则

$$f_n(\bigcup_{i=1}^{k}A_i)=\sum_{i=1}^{k}f_n(A_i).$$

我们知道,一个随机事件,在每次试验中,可能发生也可能不发生,即在一次试验中,随机事件的发生带有偶然性,然而,对于一事件,在相同条件下进行