

《高等代数》七十九问



广东韶关教育学院数学科编

编 者 的 话

这本小册子搜集了学习张禾瑞等编《高等代数》（第二版）方面的七十九个问题及其解答，这些问题是我院数学科各届学员所提出的，也有一些是教师备课时碰到的，解答这些问题的材料，来自有关书刊，而大部分是我们草拟的，旨在作为辅导材料使用。出于通俗性的考虑，有些解答使用了直观性的语言。

原来的问题过百条，后因限于篇幅，删并成现有条数。考虑到张编教本第三版将有群论内容，所以也把一篇有关群论概貌的文章也附在卷末。

由于水平、时间、人力所限，未能做到过细审校，错漏之处，敬希指正。

韶关教育学院数学科代数、几何教研组

一九八四年十月

目 录 表

1.1	理解集合概念应注意什么?	(1)
1.2	什么是集合论?	(2)
1.3	集的运算怎样?	(5)
1.4	积集的意义是怎样的?	(5)
1.5	集合之间的关系是怎样的?	(6)
1.6	何谓等价关系?	(6)
1.7	次序关系是怎样的?	(8)
1.8	何谓弗晰集(Fuzzy集)(又称模糊集)?	(8)
1.9	映射的定义是怎样的?	(10)
1.10	映射的同义语有哪些?	(11)
1.11	何谓映射的限制?	(11)
1.12	何谓映射的合成?	(11)
1.13	何谓逆映射?	(12)
1.14	何谓线性映射?	(15)
1.15	何谓向量空间的基变换和点变换?	(16)
1.16	点变换和基变换有何联系?	(22)
2.1	如何理解一元多项式的定义?	(22)
2.2	数域上一元多项式函数的零点个数的结论, 能否适用于数域上矩阵多项式? 为什么?	(24)
2.3	为什么零多项式没有次数? 零多项式与零次多项式有何区别?	(25)
2.4	为什么要引入整除的概念? 如何理解整除的概念?	(26)

2.5	零次多项式在 $F[x]$ 的整除性理论中有什么特殊的地位?	(26)
2.6	多项式的整除性与其系数域有什么关系?	(27)
2.7	如何理解最大公因式的唯一性?	(27)
2.8	如何求多项式的最大公因式?	(28)
2.9	公因式、最大公因式与多项式的系数域有什么关系?	(31)
2.10	课本P49定理2.3.2中的 $u(x)$ 与 $v(x)$ 是否唯一的?	(32)
2.11	多项式互素的概念是对哪些多项式而言的? ...	(33)
2.12	典型分解式 $f(x) = \prod_{i=1}^t a_i P_i^{k_i}(x)$ 中 $P_i(x)$ 的结构与什么有关?	(33)
2.13	多项式的可约性与整除性有什么联系和区别?	(34)
3.1	关于 n 阶行列式的定义应注意什么问题?	(34)
3.2	行列式的基本性质命题较多, 怎样才较易记忆?	(35)
3.3	行列式的简史怎样?	(35)
4.1	学习线性方程组要注意什么问题?	(36)
5.1	矩阵的起源和应用的概况怎样?	(36)
5.2	矩阵的转置符号“ 1 ”, 伴随符号“ $*$ ”以及逆的符号“ -1 ”三者的关系怎样?	(37)
5.3	矩阵的证明题的解法灵活多样, 往往使初学者感到无从下手, 可否介绍一些较有效的方法?	(37)
5.4	矩阵的化简有哪几种方法?	(50)

5.5	矩阵的迹的概念有何重要作用?	(51)
5.6	矩阵的乘法同实数的乘法有何区别?	(51)
5.7	矩阵的乘法较繁琐易出错, 有何其它的算法?	(52)
5.8	分块矩阵有较多的应用, 常用的有哪几种? ...	(53)
5.9	在一般“高代”书中, 线性方程组的表现方式 有几种?	(53)
5.10	理解可逆矩阵应注意什么问题?	(54)
5.11	关于正交矩阵的概念、性质、命题, 可否给出 一个简明扼要的讲解?	(55)
6.1	怎样理解张禾瑞书中 P 181 说的向量空间是解 析几何里向量概念的一般化?	(56)
6.2	何谓数域 R 上 n 维向量?	(57)
6.3	为什么要把向量的起点放在原点?	(60)
6.4	向量空间中两个最重要的子集是什么?	(61)
6.5	子空间的直和有何重要作用?	(63)
6.6	对向量空间定义, 还须注意哪些问题?	(65)
6.7	向量空间定义较长, 怎样才能便于记忆?	(66)
6.8	基、维数、坐标等概念在向量空间理论中的 重要性, 表现在哪里?	(66)
6.9	线性组合和线性关系有何区别?	(67)
6.10	线性无关、线性相关概念的抽象基础(即背 景)是什么?	(68)
6.11	试应用向量空间理论简述矩阵的秩及其在解 线性方程组上的应用。.....	(69)
7.1	线性映射定义中, 蕴含的基本的代数性质是 什么?	(70)

- 7.2 向量空间在线性映射之下,局部与整体之间的关系有哪些是守恒的? (71)
- 7.3 定理 7.1.2 有何作用? (71)
- 7.4 线性映射的象和核的概念的抽象背景是什么?
..... (72)
- 7.5 线性变换能否看成是正比例函数的推广? (72)
- 7.6 张书P236 § 7.3 线性变换和矩阵,主要解决什么问题? (73)
- 7.7 对向量空间的同构概念应着重了解什么? (73)
- 7.8 张书P207所叙述的定理6.5.2和P236叙述的定理 7.3.1 有何区别和联系? (74)
- 7.9 特征根和特征向量的概念有何作用? (74)
- 7.10 张书P248, 定义 1 需注意什么问题? (75)
- 7.11 向量空间 V 上的射影变换的概貌如何? (76)
- 7.12 什么是凯莱——哈密顿定理? (77)
- 8.1 解析几何和线性代数对内积的处理上有何不同? (78)
- 8.2 在同一向量空间中定义欧氏空间内积的方法是否唯一的? (78)
- 8.3 正交基和标准正交基的思想来源是什么? (78)
- 8.4 正交变换是特殊的线性变换,特殊何在? (78)
- 8.5 正交变换的矩阵,一定是正交矩阵吗? (79)
- 8.6 张书P269例 1,为什么可以规定
 $\langle \xi, \eta \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$? (79)
- 8.7 张书P269定义 1,暗示了欧氏空间内蕴着的什么性质? (79)
- 8.8 何谓正交化方法? (79)

8.9	张书 P 294 第九行 $y = (\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}) x$ 是怎样求出来的?	(79)
9.1	为什么说二次型的概念起源于解析几何中二次曲线和二次曲面的研究?	(80)
9.2	在实 n 维空间中, 二次型齐次式的典型式是不是唯一的?	(81)
9.3	利用二次型知识可以使二次曲线方程的化简更为一般化吗?	(81)
附录: 群论概说		(86)

1.1 理解集合概念应注意什么？

△ 集合是最基本最一般的数学概念。因而从十九世纪 Cantor 提出集合论以来，一直未有一个逻辑上无可非议的定义。有种种不同的直观叙述：Cantor：“一组确定的人们在直觉或思维上的不同对象，作为一个整体来想像就称为一个集合。”

范德瓦尔登的《代数学》：“每个单元素具有或者不具有的性质就定义一个集合，这个集合的元素就是全体具有这个性质的对象。”

一切这些提法之所以是直观的是因为“整体”、“全体”并不比集合简单多少。

在理解集合的概念时应注意：

(1) 集合是指具有某种属性的事物，即要区别集合及其元素这两个概念。

(2) 集合中包含的事物是确定的，即可以确切地判断一事物是否属于此集合，例如，“与数 6 接近的实数”不能构成一个集合，因为无法判断一个数，例如 5，是否属于与 6 接近的数。

(3) 由一个元素组成的单元素集合与它所含的唯一的元素，在概念上是不同的。例如 $\{\alpha\}$ 与 α ，它们的关系是 $2 \in \{\alpha\}$ 。

集合这个概念的背景是人们在长期实践中逐步认识到，往往需要把具有相同性质的对象的全体，作为一个单一的对象来处理。

集合概念为理论科学提供了一个基本手法，即可以按规定的性质把研究对象进行分类。

(4) 由于集合缺乏逻辑上的定义，所以往往引出一些悖论。例如，1903年英国的逻辑学家罗素提出了一个著名的“罗素悖论”，其中有一个通俗的例子：“某乡村有一位理发师宣布：他只给本村那些不给自己刮脸的人刮脸。于是产生一个问题，理发师给自己理发吗？如果他给自己刮脸则违反他自己的原则，如果不给自己刮脸，则按他自己的原则，他又应该给自己刮脸。”这个问题写成“令 N 为不属于元素 A 自身的元素所组成的集合，即 $N = \{A \mid A \notin A\}$ ，问 N 是否属于 N ？”于是 $N \in N$ 或 $N \notin N$ 都是矛盾的。悖论的提出，促使人们去研究集合论的无矛盾性。悖论根源之一是类如“一切集合的集合”这样的循环定义。故有些人在其著作中就声明不允许用循环定义。如范德瓦尔登的《代数学》。然而定义一个“其元素为集合”的集合，却是合法的。因此，有些书采用“集族”这个名称，以避免累赘。

集合是通过命题选择元素而规定出来的，例如

$$\text{集合 } A = \{x \mid x \text{ 是质数, } x < 21\}$$

即“A为小子21的质数的集合”，用列举法：

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

1.2 什么是集合论？

集合论是研究集合的一个数学名称，它考察一些对象的集合 X ，而不考虑 X 的元素是什么，只考虑 X 有哪些性质。例如，基数性就是重要的内容：当两个集 A 、 B 的元素间存在一一对应时称为有相同的基数，表为 $C(A) = C(B)$ 。此记号对有限集来说表明 A 、 B 所含元素的个数相等；对无限集来说，则表明 A 、 B 的基数相同（或浓度相等，或说等势）。所以一个无限集可以和其子集有相同的基数，从而使

全体大于部分这个公理失去意义。例如整数集和偶数集有相同的基数。 $f(n) = 2n$ (n 为整数) 表明 $C(A) = C(B)$ 。
A 表整数集, B 表偶数集。

这基数性牵涉到集论中尚未解决的问题。即连续统假设的问题 (1900年希尔伯特在国际数学家大会上提出 23 个问题, 其第一个问题就是这个连续统假设)。“一无限集不和正整数一一对应, 则称为不可数。若 X 是实数集 R 的一个不可数子集。问 $C(X)$ 是否等于 $C(R)$?” 估计答案是肯定的。故称为连续统假设。1963年 J·科恩〔美〕在下述意义下, 证明了此问题不可解, 即连续统假设的真伪不可能在策墨罗公理系统内判明。

若 A 的元与 B 的一子集的元之间, 存在着一一对应。就说 $C(A) = C(B)$, 一个有用的定理断言: 任二集 A 、 B 可以比较。即使 $C(A) \leq C(B)$ 或 $C(B) \leq C(A)$ 。另一定理断言: 如 $C(A) \leq C(B)$, 同时又有 $C(B) \leq C(A)$, 则 $C(A) = C(B)$ 。

排次序是在两个有相同基数的集之间建立一一对应关系的一种方法, 一个集 X 满足下列条件的关系 $<$ 就是一个次序关系:

(1) 对任何不同元 x_1, x_2 , 则或

$$x_1 < x_2 \text{ 或 } x_2 < x_1$$

(2) $x_1 < x_1$

(3) 若 $x_1 < x_2, x_2 < x_3$, 则 $x_1 < x_3$

在实数集中, $<$ 表示小于。字典中的字也是按次序排列的。

若 X 的次序又满足下面的补充条件, 则称为良序;

(4) X 的非空集 Y 总有第一个元, 即有元 y_0 致对 Y 的任何其他元均有 $y_0 < y^1$ 。

例子：正整数的自然次序是良序的，但整数和实数，其自然次序都不是良序的。但若不限于自然次序则可能是良序的，例如整数的一个良序为 $0, 1, 2, \dots, -1, -2, \dots$

由于写不出实数的良序，会猜测它不存在良序。但有一个定理指出这个猜测是错误的，定理说，任何集 X 都有良序，其证明思路是：考虑 X 的一切非空子集之集合 Z ，每在 Z 的每一元 Z_i 中选取一点， $x_i = f(Z_i)$ 并把 X 这样良序化：若 S_i 是 x_i 前面一切元的集合，则 $x = f(Z - S_i)$

用良序证明的某些定理非常奇怪其正确性在直观上并不明显。

也可用良序来构造一些病态例子作为各种猜想的反例。目前集论公理系统有两种形式，一种是策墨罗—弗兰克尔—科恩形式简称 ZFC，另一种是贝尔内斯—诺伊曼—库德形式，简称 BNG，在我们的叙述中采取 ZFC 形式，ZFC 包括九个公理：

- 1° 外延公理。
- 2° 空集公理。
- 3° 无序对公理。
- 4° 正则公理。（ a 和 $\{a\}$ 不同就是根据此公理）
- 5° 替换公理。
- 6° 幂集公理。
- 7° 和集公理。
- 8° 无限公理。
- 9° 选择公理。

这个系统有缺点。例如，不能证明自己不矛盾，未能包括齐必需的集。

1.3 集的运算怎样?

△ 和或并: A 与 B 的和 ($A + B$ 或 $A \cup B$) 是 A 或 B 中一切元素的集合: $A + B = \{a \mid a \in A \text{ 或 } a \in B\}$ 。

交或积或公共部分: A 与 B 的交 ($A \cdot B$, AB 或 $A \cap B$) 是既在 A 中又在 B 中之元的集, 即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

如果 A , B 没有公共元, 称为不相交, 记作 $A \cap B = \phi$ 。

差 $A - B$ 表示在 A 中但不在 B 中之元的集合: $A - B = \{x \mid x \in A, \text{ 且 } x \notin B\}$ 。若 BCA , 则

差 $A - B$ 也称为 B 关于 A 的余集或补集, 记作 B^c , $B^c = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ 。

集合运算所满足的规律略。

1.4 积集的意义是怎样的?

△ 设 A 、 B 为两集, A , B 的积集由所有有序对 (a, b) 组成 (其中 $a \in A$, $b \in B$), 记作

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

集 A 的自身的积记作 $A \times A$ 或 A^2 。

例 1 笛卡尔平面 $R^2 = R \times R$, 其上每个点 P

代表有序数对 (a, b) , 反之也对。

例 2 设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ 。则

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

积集的概念可以自然地推广到任意有限多个集, 集 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 的积集由所有 m 元有序数组 $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ 组成的集 (其中 $a_i \in A_i$), 记作 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m$ 。

1.5 集合之间的关系是怎样的？

△ 由集A到集B的二元关系（简称关系R）对每个有序对 $(a, b) \in A \times B$ ，确定了下列两种情形之一：

- i “a对b有关系”： $a R b$
- ii “a对b无关系”： $a \bar{R} b$

由集A到自身的关系称为A中的关系。例：

集的包含是集的任何类中的关系。因为任给 = 集合A，B便有 $A \subset B$ 或 $A \not\subset B$ 。

由A到B的任何关系R，唯一地确定了 $A \times B$ 的子集 $\hat{R}$ 如下：

$$\hat{R} = \{(a, b) : a R b\}$$

反之， $A \times B$ 的任何子集 $\hat{R}$ 确定了由A到B的关系

$$a R b, \text{ 当且仅当 } (a, b) \in \hat{R}$$

由R与 $\hat{R}$ 之间的对应，可以定义关系如下：

定义 由A到B的关系R是 $A \times B$ 的一个子集。
前述的次序关系就是例子。

1.6 何谓等价关系？

△ 集A中的关系如果满足下列公理称之为等价关系：

- i 对每个 $a \in A$ ，a对a有联系

$$a R a \quad (\text{自反})$$

- ii 如a对b有关系，则b对a也有关系

$$a R b \implies b R a \quad (\text{对称})$$

- iii 如a对b有关系，且b对c有关系，则a对c也有关系

$a R b$ 及 $b R c \implies a R c$ (传递)

简言之, 若关系是自反的, 对称的, 传递的, 则是等价关系。

例1 包含关系 $\subset$: $A \subset A$; 若 $A \subset B$, $B \subset C$, 则 $A \subset C$, 可见包含关系是自反的, 也是传递的, 但却不是对称的, 因为从 $A \subset B$ 及 $A \neq B$ 推得 $B \not\subset A$ 。

例2 在欧氏几何中, 三角形的相似性是等价关系。

集 A 中任何元素 a 的等价类是指与 a 有关系的元素集, 记作 $[a] = \{x : a R x\}$ 。

把等价类的总体称为商集 A/R

$$A/R = \{[a] \mid a \in A\}$$

等价关系的性质如下:

设 R 是 A 中的等价关系, 则商集 A/R 是 A 的分类, 即 A 中每个元 a 属于 A/R 中的一个元, 而 A/R 的元两两不相交, 即无公共元素。

例如 $x E y$ 表 x, y 同属偶数或同属于奇数, π 表分整数 Z 成奇数或偶数的一种划分, 则商集

$$\pi = Z/E = \{E, 0\}$$

例: R_5 是整数集 Z 中的关系, 一集以 $x - y = 5n$ (n 为整数) 确定 “ $x - y$ 能被 5 整除” 作为 R_5 就是一个等价关系, 在 Z/R_5 中恰有 5 个不同的等价类:

$$A_0 = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}$$

$$A_1 = \{\dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots\}$$

$$A_2 = \{\dots, -8, -3, 2, 7, 12, \dots\}$$

$$A_3 = \{\dots, -7, -2, 3, 8, 13, \dots\}$$

$$A_4 = \{\dots, -6, -1, 4, 9, 14, \dots\}$$

$$Z = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

1.7 次序关系是怎样的?

△ 集合 X 中一个关系若是自反的、传递的，反对称的，则称为次序关系，习惯上采用记号 $\leq$ ，有如下性质：

自反性 $a \leq a$

传递性 $a \leq b \quad b \leq c \implies a \leq c$

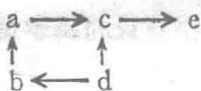
反对称 $a \leq b \quad b \leq a \implies a = b$

若对 $a \in X \quad b \in X$ 恒有 $a \leq b$ 或 $b \leq a$ 称 X 为全序集，若非恒有而只是部分有，则称为半序集。全序集又称链，例如实数集是链，而若把 a 整除 b 定义为 $a \leq b$ ，则这个序关系使正整数集 N^+ 成为半序集，因为其中任二整数不都可以整除

次序关系能通过图来定义，例如设：

$$Z = \{a, b, c, d, e\}$$

则图：



定义下面的次序：

$$b < a \quad c < a \quad d < b \quad d < c \quad e < c$$

由于传递性有： $d < a \quad e < a$

1.8 何谓弗晰集(Fuzzy集)(又称模糊集)?

△ 设 $X = \{x\}$ 为点空间，所谓 X 的 Fuzzy 集 (以下称为 F) A 是以下面的从属函数， μ_A 为特征集

即 μ_A 为 $\mu_A: X \rightarrow M$ 的函数， M 称为从属空间，对于元素 x 的值 $\mu_A(x) \in M$ 表示 x 属于 F 集 A 的程度或等级

M 为 $\{0, 1\}$ 时， A 为通常意义的集 μ_A 就是集的特征函

数, 即

$$\begin{cases} \mu_A(x) = 1 \text{ 时 } x \in A \\ \mu_A(x) = 0 \text{ 时 } x \notin A \end{cases}$$

从属空间M, 一般可以是半序集或格, 但是为简单起见以 $M = \{0, 1\}$ 的区间来讨论

定义 空间 $X = \{x\}$ 的 F 集是以

$$\mu_A: X \longrightarrow \{0, 1\}$$

从属函数为特征的集, 若值 $\mu_A(x)$ 逼近于 1, 则表示 x 属于 A 的程度高, 若 $\mu_A(x)$ 逼近于 0, 则表示 x 属于 A 的程度低

F 集相等 $A = B$ 意即 $\forall x \in X \quad \mu_A(x) = \mu_B(x)$

F 集的空集 $A = \phi$ 即 $\forall x \in X$ 有 $\mu_A(x) = 0$

F 集的包含 $A \subseteq B \iff \mu_A \leq \mu_B$

补集 $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$ 即

$$\bar{A} \iff \mu_{\bar{A}} = 1 - \mu_A$$

例 1 “身材非常高的人”的 F 集, 被 “身材高的人”的 F 集所包含,

例 2 $A = \{x | x \geq 1\}$ 的补集为 $\bar{A} = \{x | x < 1\}$

并集 $A \cup B$ 定义为包含集 A 和集 B 的最小 F 集, 设

$$C = A \cup B$$

则其从属函数间有

$$C = A \cup B \iff \mu_C(x) = M_{\max}[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

例如设在当 x , $\mu_A(x) = 0.9$

$$\mu_B(x) = 0.4$$

$$\mu_{A \cup B}(x) = 0.9$$

交集 F 集 A, B 的交, 记作 $A \cap B$ 定义为含于 A, B

的最大 F 集, 设 $C = A \cap B$, 其从属函数对 $x \in X$ 表示为:

$$\mu_C = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

$$\text{即 } C = A \cap B \iff \mu_C = \min[\mu_A, \mu_B]$$

1.9 映射的定义是怎样的?

设有一个集 E 称为定义域又有一个集 F 称为值域, 一个对应关系; 使每个元素 $x \in E$ 对应于唯一确定的一个元 $y \in F$ 这个对应关系称为 E 到 F 的映射。记作 $f: E \rightarrow F$, y 是 x 在 f 之下的象 $f(x)$,

映射是数值函数概念的现代推广。因为当定义中的定义域 E 和值域 F , 都是数集时, 则映射即为通常意义下的函数, 可以说映射是函数的一般化, 或者说函数是特殊的映射。

映射最重要的属性是它的单值性。有些分析学的著作也用多值定义, 即允许有多个象元 (即一个 X 可以对应多个 y) 这虽然是合理的但在实用上无用, 因为不可能在这种多值的函数值上切实地定义出代数运算, 例如当 $\sqrt{Z}$ 定义为多值时 (Z 为复数) 则 $\sqrt{Z} + \sqrt{Z} = 2\sqrt{Z}$, 将是错误的。

映射有各种表示法, 如 $x \rightarrow f(x)$; $x \rightarrow f_x$, (当定义域为正整数集时常采用), $E \xrightarrow{f} F \dots\dots$ 等等,

由于映射的单值性, 故非每种指定的规则就都是一个映射, 例如 E 、 F 是实数集, 规则 “ $x \rightarrow y$ 当且仅当 $y^2 = x$ ” 就不是一个映射, 因为 $x = 4$ 时, 它指定了两个元素 $+2$ 和 -2 , 这与映射的定义的要求不合。

但同时要注意, 不同的元素可以有相同的象, 例如