《高等代数》七十九问

广东韶关教育学院数学科编

编 者 的 话

这本小册子搜集了学习张禾瑞等编《高等代数》（第二版）方面的七十九个问题及其解答，这些问题是我院数学科各届学员所提出的，也有一些是教师备课时碰到的，解答这些问题的材料，来自有关书刊，而大部分是我们草拟的，旨在作为辅导材料使用。出于通俗性的考虑，有些解答使用了直观性的语言。

原来的问题过百条，后因限于篇幅，删并成现有条数。考虑到张编教本第三版将有群论内容，所以也把一篇有关群论概貌的文章也附在卷末。

由于水平、时间、人力所限，未能做到过细审校，错漏之处，敬希指正。

韶关教育学院数学科代数、几何教研组

一九八四年十月

目 录 表

1.1 理解集合概念应注意什么?

△ 集合是最基本最一般的数学概念。因而从十九世纪Cantor提出集合论以来，一直未有一个逻辑上无可非议的定义。有种种不同的直观叙述：Cantor：“一组确定的人们在直觉或思维上的不同对象，作为一个整体来想像就称为一个集合。”

范德瓦尔登的《代数学》：“每个单元素具有或者不具有的性质就定义一个集合，这个集合的元素就是全体具有这个性质的对象。”

一切这些提法之所以是直观的是因为“整体”、“全体”并不比集合简单多少。

在理解集合的概念时应注意：

（1）集合是指具有某种属性的事物，即要区别集合及其元素这两个概念。

（2）集合中包含的事物是确定的，即可以确切地判断一事物是否属于此集合，例如，“与数6接近的实数”不能构成一个集合，因为无法判断一个数，例如5，是否属于与6接近的数。

（3）由一个元素组成的单元素集合与它所含的唯一的元素，在概念上是不同的。例如$\{\alpha\}$与α，它们的关系是$2\in\{\alpha\}$。

集合这个概念的背景是人们在长期实践中逐步认识到，往往需要把具有相同性质的对象的全体，作为一个单一的对象来处理。

集合概念为理论科学提供了一个基本手法，即可以按规定的性质把研究对象进行分类。

（4）由于集合缺乏逻辑上的定义，所以往往引出一些悖论。例如，1903年英国的逻辑学家罗素提出了一个著名的“罗素悖论”，其中有一个通俗的例子：“某乡村有一位理发师宣布：他只给本村那些不给自己刮脸的人刮脸。于是产生一个问题，理发师给自己理发吗？如果他给自己刮脸则违反他自己的原则，如果不给自己刮脸，则按他自己的原则，他又应该给自己刮脸。”这个问题写成“令N为不属于元素A自身的元素所组成的集合，即$N=\{A \mid A \notin A\}$，问N是否属于N？”于是$N \in N$或$N \notin N$都是矛盾的。悖论的提出，促使人们去研究集合论的无矛盾性。悖论根源之一是类如“一切集合的集合”这样的循环定义。故有些人在其著作中就声明不允许用循环定义。如范德瓦尔登的《代数学》。然而定义一个”其元素为集合”的集合，却是合法的。因此，有些书采用“集族”这个名称，以避免累赘。

集合是通过命题选择元素而规定出来的，例如

$$\text{集合}A=\{x \mid x\text{是质数，}x<21\}$$

即“A为小于21的质数的集合”，用列举法：

$$A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19\}$$

1.2 什么是集合论？

集合论是研究集合的一个数学名称，它考察一些对象的集合X，而不考虑X的元素是什么，只考虑X有哪些性质。例如，基数性就是重要的内容：当两个集A、B的元素间存在一一对应时称为有相同的基数，表为$C(A)=C(B)$。此记号对有限集来说表明A、B所含元素的个数相等，对无限集来说，则表明A、B的基数相同（或浓度相等，或说等势）。所以一个无限集可以和其子集有相同的基数，从而使

全体大于部分这个公理失去意义。例如整数集和偶数集有相同的基数。$f(n)=2n$（n为整数）表明$C(A)=C(B)$。A表整数集，B表偶数集。

这基数性牵涉到集论中尚未解决的问题。即连续统假设的问题（1900年希尔伯特在国际数学家大会上提出23个问题，其第一个问题就是这个连续统假设）。"一无限集不和正整数一一对应，则称为不可数。若X是实数集R的一个不可数子集。问$C(X)$是否等于$C(R)$？"估计答案是肯定的。故称为连续统假设。1963年J·科恩〔美〕在下述意义下，证明了此问题不可解，即连续统假设的真伪不可能在策墨罗公理系统内判明。

若A的元与B的一子集的元之间，存在着一一对应。就说$C(A)=C(B)$，一个有用的定理断言：任二集A、B可以比较。即使$C(A)\leqslant C(B)$或$C(B)\leqslant C(A)$。另一定理断言：如$C(A)\leqslant C(B)$，同时又有$C(B)\leqslant C(A)$，则$C(A)=C(B)$。

排次序是在两个有相同基数的集之间建立一一对应关系的一种方法，一个集X满足下列条件的关系$<$就是一个次序关系：

（1）对任何不同元x_1、x_2，则或

$x_1<x_2$或$x_2<x_1$

（2）$x_1 \nless x_1$

（3）若$x_1<x_2$，$x_2<x_3$，则$x_1<x_3$

在实数集中，$<$表示小于。字典中的字也是按次序排列的。

若X的次序又满足下面的补充条件，则称为良序；

（4）X的非空集Y总有第一个元，即有元y_0致对Y的任何其他元均有$y_0<y^1$。

例子：正整数的自然次序是良序的，但整数和实数，其自然次序都不是良序的。但若不限于自然次序则可能是良序的，例如整数的一个良序为0，1，2，…，-1，-2，…

由于写不出实数的良序，会猜测它不存在良序。但有一个定理指出这个猜测是错误的，定理说，任何集X都有良序，其证明思路是：考虑X的一切非空子集之集合Z，每在Z的每一元Z_α中选取一点，$x_\alpha = f(Z_\alpha)$并把X这样良序化：若S_α是x_α前面一切元的集合，则$x = f(Z - S_\alpha)$

用良序证明的某些定理非常奇怪其正确性在直观上并不明显。

也可用良序来构造一些病态例子作为各种猜想的反例。目前集论公理系统有两种形式，一种是策墨罗—弗兰克尔—科恩形式简称ZFC，另一种是贝尔内斯—诺伊曼—库德尔形式，简称BNG，在我们的叙述中采取ZFC形式，ZFC包括九个公理：

1° 外延公理。

2° 空集公理。

3° 无序对公理。

4° 正则公理。（a和{a}不同就是根据此公理）

5° 替换公理。

6° 方幂集公里。

7° 和集公理。

8° 无限公理。

9° 选择公理。

这个系统有缺点。例如，不能证明自己不矛盾，未能包括齐必需的集。

1.3 集的运算怎样？

△ 和或并：A与B的和（$A+B$或$A\cup B$）是A或B中一切元素的集合：$A+B=\{a\mid a\in A或a\in B\}$。

交或积或公共部分：A与B的交（$A\cdot B$，AB或$A\cap B$）是既在A中又在B中之元的集，即

$A\cap B=\{x\mid x\in A且x\in B\}$。

如果A，B没有公共元，称为不相交，记作$A\cap B=\phi$。

差$A-B$表示在A中但不在B中之元的集合：$A-B=\{x\mid x\in A，且x\notin B\}$。若$B\subset A$，则

差$A-B$也称为B关于A的余集或补集，记作B^c，$B^c=\{x\mid x\in A且x\notin B\}$。

集合运算所满足的规律略。

1.4 积集的意义是怎样的？

△ 设A、B为两集，A，B的积集由所有序对（a，b）组成（其中$a\in A$，$b\in B$，），记作

$A\times B=\{(a, b)：a\in A, b\in B\}$。

集A的自身的积记作 $A\times A$或A^2。

例1 笛卡尔平面$R^2=R\times R$，其上每个点P代表有序数对（a，b），反之也对。

例2 设$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{a, b\}$。则

$$A\times B=\{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

积集的概念可以自然地推广到任意有限多个集，集A_1，A_2，…，A_m的积集由所有m元有序数组（a_1，a_2，…，a_m）组成的集（其中$a_i\in A_i$），记作$A_1\times A_2\times\cdots\times A_m$。

1.5 集合之间的关系是怎样的？

△ 由集A到集B的二元关系（简称关系R）对每个有序对（a，b）$\in A\times B$，确定了下列两种情形之一：

i “a对b有关系”：$a\,R\,b$

ii “a对b无关系”：$a\,R\,b$

由集A到自身的关系称为A中的关系。例：

集的包含是集的任何类中的关系。因为任给＝集合A，B便有$A\subset B$或$A\not\subset B$。

由A到B的任何关系R，唯一地确定了$A\times B$的子集$\widehat{R}$如下：

$$\widehat{R}=\{(a,\ b):\ a\,R\,b\}$$

反之，$A\times B$的任何子集$\widehat{R}$确定了由A到B的关系

$$a\,R\,b，当且仅当(a,\ b)\in\widehat{R}$$

由R与$\widehat{R}$之间的对应，可以定义关系如下：

定义　由A到B的关系R是$A\times B$的一个子集。

前述的次序关系就是例子。

1.6 何谓等价关系？

△ 集A中的关系如果满足下列公理称之为等价关系：

i 对每个$a\in A$，a对a有联系

$$a\,R\,a \quad（自反）$$

ii 如a对b有关系，则b对a也有关系

$$a\,R\,b\Longrightarrow b\,R\,a \quad（对称）$$

iii 如a对b有关系，且b对c有关系，则a对c也有关系

$$aRb \text{及} bRc \Longrightarrow aRc \quad (\text{传递})$$

简言之，若关系是自反的，对称的，传递的，则是等价关系。

例1　包含关系$\subset$：$A\subset A$；若$A\subset B$，$B\subset C$，则$A\subset C$，可见包含关系是自反的，也是传递的，但却不是对称的，因为从$A\subset B$及$A\neq B$推得$B\not\subset A$。

例2　在欧氏几何中，三角形的相似性是等价关系。

集A中任何元素a的等价类是指与a有关系的元素集，记作$[a]=\{x: aRx\}$。

把等价类的总体称为商集A/R

$$A/R=\{[a] \mid a\in A\}$$

等价关系的性质如下：

设R是A中的等价关系，则商集A/R是A的分类，即A中每个元a属于A/R中的一个元，而A/R的元两两不相交，即无公共元素。

例如xEY表x，y同属偶数或同属于奇数，π表分整数Z成奇数或偶数的一种划分，则商集

$$\pi=Z/E=\{E,\ 0\}$$

例：R_5是整数集Z中的关系，一集以$x-y=5n$（n为整数）确定“$x-y$能被5整除”作为R_5就是一个等价关系，在Z/R_5中恰有5个不同的等价类：

$$A_0=\{\cdots,\ -10,\ -5,\ 0,\ 5,\ 10,\ \cdots\}$$

$$A_1=\{\cdots,\ -9,\ -4,\ 1,\ 6,\ 11,\ \cdots\}$$

$$A_2=\{\cdots,\ -8,\ -3,\ 2,\ 7,\ 12,\ \cdots\}$$

$$A_3=\{\cdots,\ -7,\ -2,\ 3,\ 8,\ 13,\ \cdots\}$$

$$A_4=\{\cdots,\ -6,\ -1,\ 4,\ 9,\ 14,\ \cdots\}$$

$$Z=A_0\cup A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$$

1.7 次序关系是怎样的?

△ 集合X中一个关系若是自反的、传递的，反对称的，则称为次序关系，习惯上采用记号≤，有如下性质：

自反性 $a \leq a$

传递性 $a \leq b \quad b \leq c \Longrightarrow a \leq c$

反对称 $a \leq b \quad b \leq a \Longrightarrow a = b$

若对 $a \in X \quad b \in X$ 恒有 $a \leq b$ 或 $b \leq a$ 称X为全序集，若非恒有而只是部分有，则称为半序集。全序集又称链，例如实收集是链，而若把a整除b定义为 $a \leq b$，则这个序关系使正整数集 N^{+} 成为半序集，因为其中任二整数不都可以整除

次序关系能通过图来定义，例如设：

$$Z = \{a, b, c, d, e\}$$

则图：

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] & c \arrow[r] & e \\ b \arrow[u] & d \arrow[l] \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

定义下面的次序：

$b < a \quad c < a \quad d < b \quad d < c \quad e < c$

由于传递性有：$d < a \quad e < a$

1.8 何谓弗晰集(Fuzzy集)(又称模糊集)?

△ 设 $X = \{x\}$ 为点空间，所谓X的Fuzzy集（以下称为F）A是以下面的从属函数，μ_A 为特征集

即 μ_A 为 μ_A：$X \longrightarrow M$ 的函数，M称为从属空间，对于元素x的值 $\mu_A(x) \in M$ 表示x属于F集A的程度或等级

M为$\{0, 1\}$时，A为通常意义的集 μ_A 就是集的特征函

数，即

$$\begin{cases} \mu_A(x)=1 \text{时} x\in A \\ \mu_A(x)=0 \text{时} x\notin A \end{cases}$$

从属空间M，一般可以是半序集或格，但是为简单起见以$M=\{0，1\}$的区间来讨论

定义　空间$X=\{x\}$的F集是以

$$\mu_A:\ X \longrightarrow \{0，1\}$$

从属函数为特征的集，若值$\mu_A(x)$逼近于1，则表示x属于A的程度高，若$\mu_A(x)$逼近于0，则表示x属于A的程度低

F集相等$A=B$　意即$\forall x\in X \quad \mu_A(x)=\mu_B(x)$

F集的空集$A=\phi$　即$\forall x\in X$有$\mu_A(x)=0$

F集的包含$A\subseteq B \Longleftrightarrow \mu_A\leqslant\mu_B$

补集$\mu_{\bar{A}}(x)=1-\mu_A(x)$即

$$\overline{A} \Longleftrightarrow \mu_{\bar{A}}=1-\mu_A$$

例1 "身材非常高的人"的F集，被"身材高的人"的F集所包含，

例2　$A=\{x1x\geqslant1\}$的补集为$\overline{A}=\{x1x<1\}$

并集$A\cup B$定义为包含集A和集B的最小F集，设

$$C=A\cup B$$

则其从属函数间有

$$C=A\cup B \Longleftrightarrow \mu_C(x)=M_{ax}[\mu\ (x),\ \mu_B(x)]$$

例如设在当x，$\mu_A(x)=0.9$

$$\mu_B(x)=0.4$$

$$\mu_{A\vee B}(x)=0.9$$

交集　F集A，B的交，记作$A\cap B$定义为含于A，B

的最大F集，设C = A∩B，其从属函数对$x \in X$表示为：

$$\mu_C = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

即 $$C = A \cap B \Longleftrightarrow \mu_C = \min[\mu_A, \mu_B]$$

1.9 映射的定义是怎样的？

设有一个集E称为定义域又有一个集F称为值域，一个对应关系；使每个元素$x \in E$对应于唯一确定的一个元$y \in F$这个对应关系称为E到F的映射。记作$f: E \to F$，y是x在f之下的象f(x)，

映射是数值函数概念的现代推广。因为当定义中的定义域E和值域F，都是数集时，则映射即为通常意义下的函数，可以说映射是函数的一般化，或者说函数是特殊的映射。

映射最重要的属性是它的单值性。有些分析学的著作也用多值定义，即允许有多个象元（即一个X可以对应多个y）这虽然是合理的但在实用上无用，因为不可能在这种多值的函数值上切实地定义出代数运算，例如当$\sqrt{Z}$定义为多值时（Z为复数）则$\sqrt{Z}+\sqrt{Z}=2\sqrt{Z}$，将是错误的。

映射有各种表示法，如$x \to f(x)$；$x \to f_x$，（当定义域为正整数集时常采用），$E \xrightarrow{f} F$……等等，

由于映射的单值性，故非每种指定的规则就都是一个映射，例如E、F是实数集，规则“$x \to y$当且仅当$y^2 = x$”就不是一个映射，因为$x = 4$时，它指定了两个元素$+2$和-2，这与映射的定义的要求不合。

但同时要注意，不同的元素可以有相同的象，例如