普通高等教育“十三五”系列教材

微积分训练与指导

浙江理工大学科技与艺术学院数学教研室 主编

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

普通高等教育“十三五”系列教材

微积分训练与指导

浙江理工大学科技与艺术学院数学教研室 主编

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn
·北京·

内 容 提 要

本习题册内容包括函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，二元函数微分学，二重积分，无穷级数以及微分方程等内容，以配套教材为主线，章、节名和先后顺序均与教材吻合，与《微积分》（上册、下册）配套使用。本习题册各章由内容摘要、练习题、复习题三部分组成，内容摘要概括了教材中的基本概念、基本法则、基本公式和基本方法；习题由浅入深，紧扣教材内容，并预留空白供解答用；复习题可供学生测试学习效果。

本习题册可供经济类、管理类专业微积分数学教学使用。

图书在版编目（CIP）数据

微积分训练与指导 / 浙江理工大学科技与艺术学院数学教研室主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社, 2016.8
普通高等教育“十三五”系列教材
ISBN 978-7-5170-4554-0

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①浙… Ⅲ. ①微积分－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第193158号

书　　名	普通高等教育“十三五”系列教材 **微积分训练与指导** WEIJIFEN XUNLIAN YU ZHIDAO
作　　者	主编　浙江理工大学科技与艺术学院数学教研室
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路1号D座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（营销中心）
经　　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	中国水利水电出版社微机排版中心
印　　刷	三河市鑫金马印装有限公司
规　　格	184mm×260mm　16开本　10.25印张　243千字
版　　次	2016年8月第1版　2016年8月第1次印刷
印　　数	0001—3000册
定　　价	**23.00**元

目　　录

第一章　函数、极限与连续 …… 1
第二章　导数与微分 …… 21
第三章　微分中值定理与导数的应用 …… 35
第四章　不定积分 …… 51
第五章　定积分及其应用 …… 71
第六章　二元函数微分学 …… 89
第七章　二重积分 …… 107
第八章　无穷级数 …… 121
第九章　微分方程 …… 141

参考文献 …… 157

第一章　函数、极限与连续

函数、极限与连续（内容摘要一）

一、函数

1. 函数的定义及其两要素：定义域和对应关系.

2. 函数的基本性质：有界性、单调性、奇偶性、周期性.

3. 复合函数、初等函数、分段函数.

二、数列极限

1. 定义：已知数列 $\{x_n\}$，当 n 无限增大时（即 $n\to\infty$ 时），若 $\{x_n\}$ 无限接近一个确定的常数 a，则称 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，此时也称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，否则称数列 $\{x_n\}$ 发散.

2. 收敛数列的性质：唯一性，保号性，有界性.

注意：数列 $\{x_n\}$ 收敛一定有界，但数列 $\{x_n\}$ 有界不一定收敛.

3. 几个常用极限：$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0\quad(|q|<1)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\quad(a>0)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

要求：(1) 求函数的定义域；判断两函数是否相等；判断函数的有界性、单调性、奇偶性、周期性；函数的分解及复合；求函数的反函数；实际问题列函数关系式等.

(2) 理解极限的定义，求简单数列的极限.

班级______________

姓名______________

函数、极限与连续（练习一）

一、选择题

1. 下列各对函数相等的是（　　）.

A. x；$\sin(\arcsin x)$　　B. $\sqrt{x^2}$；$(\sqrt{x})^2$

C. x；$\ln e^x$　　D. $\cos x$；$\sqrt{1-\sin^2 x}$

2. 设 $f(x)$ 是奇函数，当 $x>0$ 时 $f(x)=x-x^2$，则当 $x<0$ 时 $f(x)=$（　　）.

A. $x+x^2$　　B. $x-x^2$

C. $-x-x^2$　　D. $-x+x^2$

3. 函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内（　　）.

A. 有界　　B. 无界

C. 单调增加　　D. 单调减少

4. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，且 $a\neq b$，则数列 a_1，b_1，a_2，b_2，…，a_n，b_n，…的极限为（　　）.

A. 不存在　　B. $a+b$　　C. a　　D. b

5. 下列命题正确的是（　　）.

A. 若数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 都收敛，则数列 $\{a_n+b_n\}$ 必收敛

B. 若数列 $\{a_n+b_n\}$ 收敛，则数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 必都收敛

C. 若数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 都发散，则数列 $\{a_n+b_n\}$ 必发散

D. 若数列 $\{a_n+b_n\}$ 发散，则数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 必发散

二、填空题

1. 函数 $y=\sqrt{9-x^2}+\frac{1}{\lg(x-1)}$ 的定义域是________________.

2. 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，则函数 $y=f(\ln x)$ 的定义域为________________.

3. 若 $f(x)=\frac{x}{1-x}$，则 $f[f(x)]=$________________，$f_n(x)=\underbrace{f[f(\cdots f(x))]}_{n}=$________________.

4. 已知 $f(x)=\sin x$，而 $f[\varphi(x)]=1-x^2$，则 $\varphi(x)=$________________，其定义域为________________.

5. 已知函数 $f(x+1)=\begin{cases}x+2, 0\leqslant x\leqslant 1\\ e^x, 1<x\leqslant 2\end{cases}$，则 $f(x)=$________________.

6. 函数 $f(x)=\sin x+e^{\sin 2x}$ 的最小正周期为________________.

三、计算题

1. 下列函数是由哪些简单函数复合而成的?

（1） $y=e^{\sin\sqrt{1+x^2}}$　　　　（2） $y=(\arctan\ln x)^{\frac{1}{3}}$

2. 设 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}, x\neq 0$，求 $f(x)$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^n}{n^2}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n+6}{2n^{\frac{5}{2}}+2n^2-7}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2^n+3^n+4^n}{3+4^{n+1}}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$，$|a|<1$，$|b|<1$，$a$、$b$ 为常数．

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\dfrac{1}{3\times4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$

9. 设 $f(x)=\mathrm{e}^x$，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]$.

四、应用题

某市居民在购房时，面积不超过 120m^2 时按总房价的 1.5%交税，面积超过 120m^2 时超过部分要按房价的 3%交税．当房价是 a 元/m^2 时，试建立购房总价与房屋面积 x 之间的函数关系．

函数、极限与连续（内容摘要二）

一、函数极限

1. 定义

（1）设函数 $f(x)$ 在 $|x|$ 充分大时（记作 $x\to\infty$）有定义．$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow$ 当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近常数 A，则称 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限．

（2）设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域有定义．$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow$ 当 x 无限接近 x_0 时（记作 $x\to x_0$），函数 $f(x)$ 无限接近常数 A，则称 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限．

2. 左极限：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 或 $f(x_0-0)=A$. 右极限：$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 或 $f(x_0+0)=A$.

结论：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$（此时 $y=A$ 是函数图形的水平渐近线）．

3. 函数极限的性质：唯一性，局部有界性，局部保号性．

二、无穷小与无穷大

1. 无穷小

（1）定义：极限为零的量（函数或数列）称为无穷小（量）．

（2）性质：a. 有限个无穷小的和（积）还是无穷小．

b. 有界量与无穷小的积还是无穷小，如 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sin n=0$.

（3）函数极限与无穷小的关系：$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 为无穷小.

（4）无穷小的比较：在自变量 x 的同一变化过程中，设 $\lim\alpha(x)=0$，$\lim\beta(x)=0$.

a. 若 $\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$，称 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 的高阶无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$（反之低阶）．

b. 若 $\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=c\neq0$，称 $\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ 是同阶无穷小．

特别当 $c=1$ 时，称 $\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ 是等价无穷小，记作 $\beta\sim\alpha\left(\Leftrightarrow\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1\right)$.

（5）常用的等价无穷小：当 $u\to0$ 时，有

$$u\sim\sin u\sim\tan u\sim\arcsin u\sim\arctan u\sim e^u-1\sim\ln(1+u)$$

$$\sqrt[n]{1+u}-1\sim\frac{1}{n}u,\ 1-\cos u\sim\frac{1}{2}u^2$$

这里的 u 可以是自变量 x 也可以是趋于零的函数，如当 $x\to0$ 时，$\sin 2x^3\sim2x^3$（$u=2x^3$）.

注意：记住以上等价无穷小，在解决极限的计算、无穷小的比较、间断点的分类等问题（这些问题都需要求极限）时，做到在乘积中熟练替换，简化计算.

2. 无穷大

（1）定义：当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时 $f(x)$ 的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大，则称函数 f

(x) 是当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷大（量），记为 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = \infty$.

(2) 无穷大与无界函数的关系：无穷大必是无界函数，反之不然.

(3) 无穷小与无穷大的关系：倒数关系.

三、极限的四则运算法则和复合运算法则

1. 设 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$，则 $\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B$，$\lim[f(x)g(x)] = AB$，$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}(B \neq 0)$.

注意：前提是极限存在.

2. 有理分式函数在 $x \to \infty$ 时的极限：

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0, n < m \\ \dfrac{a_n}{b_m}, n = m \\ \infty, n > m \end{cases}$$

3. $\lim\limits_{x \to x_0} f[g(x)] \xlongequal{u=g(x)} \lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A$，这里 $u_0 = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

四、两个重要极限

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x} = 1$　一般地若 $\lim \phi(x) = 0$，则 $\lim \dfrac{\sin \phi(x)}{\phi(x)} = 1$.

注意：$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$，　$\lim\limits_{x \to \infty} x \sin \dfrac{1}{x} = 1$，　$\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$，一般地若 $\lim \phi(x) = \infty$，则 $\lim \left[1 + \dfrac{1}{\phi\ (x)}\right]^{\phi(x)} = \mathrm{e}$.

注意：$\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x = 1$，$\lim\limits_{x \to \infty} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$

要求：(1) 通过求极限比较无穷小的阶.

(2) 利用二个重要极限计算函数的极限.

班级____________

姓名____________

函数、极限与连续（练习二）

一、选择题

1. $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 都存在是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的（　　）条件．

A. 充分　　B. 必要

C. 充分必要　　D. 既非充分也非必要

2. 下列极限不正确的是（　　）．

A. $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}=\infty$　　B. $\lim\limits_{x\to 0^-}2^{\frac{1}{x}}=0$　　C. $\lim\limits_{x\to 0^+}3^{\frac{1}{x}}=+\infty$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$

3. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin\dfrac{n\pi}{2}=$（　　）．

A. ∞　　B. 1　　C. 0　　D. 不存在

4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=$（　　）．

A. 0　　B. 1/6　　C. 3　　D. ∞

5. 设 $f(x)=x^2-x^3$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 关于 x 是（　　）．

A. 等价无穷小　　B. 同阶非等价无穷小

C. 高阶无穷小　　D. 低阶无穷小

6. 当 $x\to 0$ 时，若 $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $1-\cos x$ 为等价无穷小，则 $a=$（　　）．

A. 2/3　　B. 1/3　　C. 1　　D. 3/2

二、填空题

1. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=$______________　　$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=$______________

$\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=$______________　　$\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=$______________

$\lim\limits_{x\to\infty}2^{\frac{1}{x}}=$______________　　$\lim\limits_{x\to+\infty}2^{\frac{1}{x}}=$______________

$\lim\limits_{x\to-\infty}2^{\frac{1}{x}}=$______________　　$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\dfrac{1}{x}=$______________

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{1}{x}=$______________　　$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\ln x}=$______________

2. 设 $f(x)=\begin{cases}1, x>1\\ -1, x<1\\ a, x=1\end{cases}$，且 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=a$，则 $a=$______________．

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}, x<0\\ a+\sin x, x>0\end{cases}$，当 $a=$______________时 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在．

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+1}{x^3+3x+1}=$______________　　5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+1}{x^2-4}=$______________

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^4-3x^2+1}=$ ________

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x}{x^2-3x+1}=$ ________

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x}{x^2-3x+1}=$ ________

9. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)=$ ________

10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}=$ ________

11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}=$ ________

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x+\sin x}=$ ________

13. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+2x}=$ ________

14. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=$ ________ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=$ ________

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=$ ________

三、求下列极限

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{2x^2-x-1}$

2. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x+4}{\sqrt{5-x}-3}$

3. $\lim\limits_{x\to +\infty}x\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)$

四、利用等价无穷小求下列极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 2x)}{e^x-1}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan 4x}{\ln(1+2x)}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\tan x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x+x^2)$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$

五、证明：当 $x\to 0$ 时，无穷小$\dfrac{\ln(1-4x^3)}{2}=o(x^2)$.

函数、极限与连续（内容摘要三）

一、函数的连续性与间断点

1. 定义：函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$（或$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$）

注意：$f(x)$ 在点 x_0 处连续必须满足三个条件：①有定义；②有极限；③极限值=函数值．

2. $f(x)$ 在点 x_0 处左（右）连续$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$ $[\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)]$

结论：$f(x)$ 在点 x_0 处连续$\Leftrightarrow f(x)$ 在点 x_0 处既左连续又右连续．

注意：讨论分段函数在分段点的连续性需用以上结论．

3. $f(x)$ 在区间上连续$\Leftrightarrow f(x)$ 在区间内处处连续．若是闭区间 $[a, b]$，只在开区间 (a, b) 内连续，在 a 点右连续，b 点左连续．

4. 点 x_0 是 $f(x)$ 的间断点$\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 不连续，即不满足三个连续条件中至少一条．

5. 间断点分类$\begin{cases}\text{第一类间断点}\Leftrightarrow\text{左右极限均存在的间断点}\\ \text{第二类间断点}\Leftrightarrow\text{左右极限至少有一个不存在（无穷，振荡间断点）}\end{cases}$

若 x_0 是 $f(x)$ 的第一类间断点，有$\begin{cases}\text{跳跃间断点，}f(x_0+0)\neq f(x_0-0)\\ \text{可去间断点，}f(x_0+0)=f(x_0-0)\text{即极限存在}\end{cases}$

注意：(1) 求间断点方法：没有定义的点（一定是），分段函数的分段点（可能是）．

(2) 判断间断点类型方法：求间断点的极限，左右极限．

二、一切初等函数在其定义区间上是连续函数

1. 基本初等函数在其定义域上连续．

2. 连续函数的和、差、积、商（分母不为零）都是连续函数．

3. 连续函数的复合函数是连续函数．

三、闭区间上连续函数的性质

1. 有界与最值定理：闭区间上连续函数一定有界且存在最大值与最小值．

2. 零点定理：设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$.

几何意义：连续曲线弧 $y=f(x)$ 的两个端点如果位于 x 轴的两侧，则曲线弧与 x 轴至少有一个交点．

3. 介值定理：设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(a)<f(\xi)<f(b)\,[\text{或 } f(b)<f(\xi)<f(a)]$$

注意：讨论方程的根，证明闭区间上连续函数含有中值 $\xi\in(a,b)$ 这一类等式的证明题，常用零点定理．

要求：(1) 用定义讨论函数的连续性．

(2) 判断间断点的类型．

(3) 利用零点定理证明一些结论．