



神秘的阿列夫

—— 数学、犹太神秘主义教派以及对无穷的探寻

THE MYSTERY OF THE ALEPH

Mathematics, the Kabbalah, and the Search for Infinity

[美] 阿米尔·艾克塞尔 著 左平 译



上海科学技术文献出版社
Shanghai Scientific and Technological Literature Press



2

神秘的阿列夫

——数学、犹太神秘主义教派以及对无穷的探寻

THE MYSTERY OF THE ALEPH

Mathematics, the Kabbalah, and the Search for Infinity

[美] 阿米尔·艾克塞尔 著 左平 译



上海科学技术文献出版社
Shanghai Scientific and Technological Literature Press

图书在版编目 (CIP) 数据

神秘的阿列夫：数学、犹太神秘主义教派以及对无穷的探寻 / (美) 艾克塞尔著；左平译．—上海：上海科学技术文献出版社，2016.6

(合众科学译丛)

书名原文：THE MYSTERY OF THE ALEPH: Mathematics, the Kabbalah, and the Search for Infinity

ISBN 978-7-5439-7004-5

I . ① 神… II . ① 艾…② 左… III . ① 无穷级数—普及读物 IV . ① O173-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 057278 号

The Mystery of the Aleph

by Amir D. Aczel

Copyright © 2000 Amir D. Aczel

Simplified Chinese translation copyright © 2016

by Shanghai Scientific & Technological Literature Press

Published by arrangement with Da Capo Press, a Member of Persus Books LLC through Bardon-Chinese Media Agency

博达著作权代理有限公司

All Rights Reserved

版权所有 • 翻印必究

图字：09-2015-634

责任编辑：李 莺

封面设计：许 菲

丛书名：合众科学译丛

书 名：神秘的阿列夫——数学、犹太神秘主义教派以及对无穷的探寻

[美]阿米尔·艾克塞尔 著 左 平 译

出版发行：上海科学技术文献出版社

地 址：上海市长乐路 746 号

邮政编码：200040

经 销：全国新华书店

印 刷：上海中华商务联合印刷有限公司

开 本：650×900 1/16

印 张：11.5

字 数：133 000

版 次：2016 年 7 月第 1 版 2016 年 7 月第 1 次印刷

书 号：ISBN 978-7-5439-7004-5

定 价：25.00 元

<http://www.sstlp.com>

献给 6 岁的米略姆 (Miriam)，他已能理解 χ_0 与连续
统的势之间的某些差别。

目 录

1. 德国工业城市哈雷	001
2. 古代起源	008
3. 喀巴拉——中世纪犹太神秘主义教派	019
4. 伽利略和波尔查诺	036
5. 柏 林	050
6. 化圆为方	063
7. 学 生	070
8. 集合论的诞生	075
9. 第一个圆圈	084
10. “我看着它，但我不相信它”	089
11. 粗暴的攻击	097
12. 超限数	102
13. 连续统假设	110
14. 莎士比亚和精神病	116
15. 选择公理	125
16. 罗素悖论	131

17. 少年哥德尔	136
18. 维也纳的咖啡馆	141
19. 1937年6月14—15日之夜	148
20. 莱布尼茨，相对论和美国宪法	152
21. 科恩的证明和集合论的未来	156
22. 上帝无限光亮的外袍	162
附 录	167
后 记	170
注 释	172



1. 德国工业城市哈雷

1918年1月6日，一位憔悴虚弱的老人因心脏衰竭在德国工业城市哈雷的一所大学精神病院去世。他的遗体安静地经过市区被运送到墓地，接着举行了小型葬礼。只有少数人参加了这一路德教葬礼，其中有他的妻子和遗下的5个孩子。

墓地已不再存在；那里为建私人住宅已被夷为平地。但有人把墓碑保存下来了，并且几年后在哈雷另找地方建起一个没有遗体的墓地，竖立起原来的墓碑，我们现在见到的就是它。墓碑上所刻碑文是：

乔治·康托 博士

数学教授

1845.3.3—1918.1.6

在去世前，乔治·康托在哈雷精神病院（Halle Nervenlinik）治疗了7个月。但这不是他第一次住院。乔治·康托曾经在此医院治疗、休养、读书有好几次。在1891年该院建立前，他的精神已有问题若干年了。

1869年乔治·康托在柏林大学获得数学博士学位，在该大学他在当时一些最伟大的数学家的指导下学习，并被很多重要的数学思想吸引。他渴望能把自己的才智用在发展数学分析领域里的新理论上。24岁的他为获得一个德国大学的教师职位而努力，希望这将

使他有更多的时间继续他的研究。但提供给他的只是哈雷大学的职位，哈雷位于柏林西南约 113 千米处。

哈雷是一座有着迷人的中世纪鹅卵石街道的古老城市。它作为塞勒（Saale）河上的盐业中心建立于 10 世纪中叶。这个城市经历了世界大战的洗礼，有许多古建筑挺立在市中心，在市中心人们悠闲地购物或乘坐机动车来喝咖啡。哈雷也叫做五塔市。一座中世纪大厦的 4 个塔尖傲视着市中心其他的低矮建筑，附近耸立着第五座塔，这是 1418 年的红塔，是为纪念市民反对统治者的压迫，争取自由的斗争的一座建筑物。

1685 年，作曲家乔治·弗里德里希·汉德尔（Georg Friedrich Handel）诞生在哈雷的一所房子里，这所房子里最古老的墙是 12 世纪的。汉德尔在这所房里生活了将近 18 年。这所房子是现在仍能参观的展示这位作曲家生活的博览会。哈雷市一直是一座音乐会、歌剧和歌舞之城。

可以说，哈雷对于康托应该是有某些吸引力的，因为他父母双方的家庭成员中有些是很有天赋的音乐家。他们中的某些人在故乡俄罗斯已很有名望。但康托对哈雷的这种魅力并不很感兴趣。他来自一个移民的家庭——从古代亚平宁（Ibrian）半岛经丹麦和俄罗斯，这个家庭对年青的康托期望很高。特别是他的父亲全年都给康托寄信，敦促他在学校要做得更好，不要辜负家庭的巨大期望。

哈雷在两座伟大的大学城之间：柏林在东北而哥廷根在西边。19 世纪末，柏林大学在数学方面是世界上最好的，而柏林是全欧洲最活跃最令人激动的城市之一，哥廷根则是另一个科学的焦点。像哈雷一样，哥廷根也是一座古老的中世纪城市。市中心的许多房子装饰着以前住过的著名人物名字的小匾，这些人物有诗人海涅、化

学家本森（Bunsen）、天文学家奥伯斯（Olbers）等等，他们当中最著名的是 C.F. 高斯（Carl Friedrich Gauss, 1777—1855），他是那个时代无可争议的最伟大的数学家。哈雷同时受到柏林和哥廷根的影响和推动。

但康托一直住在哈雷，等待着从未到来的邀请。多年来，只要在柏林或哥廷根有公开需要的数学工作职位，他都抱着很大希望，每当他没有获得这种职位时，他都会感到愤愤不平。他有强烈的个人欲望和疯狂的特性。这种态度使他在一生中树立了不少敌人，失去了许多朋友。对照他与其他数学家的状态，他与他的家庭成员有着亲密的关系。在与同事们交谈时他总是处于主导地位，但在家中，他则充当一个较为轻松的角色，他让妻子和孩子更接近他并引导启发在餐桌上的交谈。每次餐毕他总是问妻子：“你今天和我在一起过得愉快吗？你爱我吗？”

康托的学术生涯是从当私人讲师开始的，那也是当时进入德国的大学做研究的入门式的工作。经少许几年的努力工作，他被提升为副教授，不久成为一位数学教授。但是在他的最多产的时期中，发生了某件奇怪的事情，他暂时终止了他的工作。1884 年夏，康托受到深深压抑感的打击。这年从 5 月到 6 月他完全处于停顿状态——不能工作或做任何事。他的情况使他的妻子和孩子们苦恼，使他的同事们感到遗憾，他们知道他是热切渴望攀登绝顶的数学家。然而，没有经过任何的医治或专业帮助，康托克服了他的疾病并恢复了正常生活。此后，他给他的挚友，瑞典数学家 G. 米塔-莱夫勒（Gosta Mittag-Leffler, 1846—1927）写了一封信，信中描述了他的疾病并提到患精神疾患前他一直在研究“连续统问题”。

在随后的 1885 年，康托为他的家庭建起一座华丽的住宅，坐



大约 1900 年哈雷市的一个市场

[摄影：德国人穆勒（Moeller）；汉斯·格洛特（Hanns H.Grote）提供]

落在以哈雷的大作曲家之名汉德尔雀塞（Handelstrasse）命名的一条街道上。这房子现仍属于康托的孙子所有。这是一座2层楼房，有较高的屋顶和很大的窗户。乔治·康托的父亲，一位商人兼股票经纪人，去世后留给其后代几千万马克。这些遗产的一部分建起了这座新房和购置了家具，使康托一家过得很舒适。如今，汉德尔雀塞街是一条宁静的林荫道，街两旁有许多富丽堂皇的住宅，这些房子距大学和咖啡厅、餐馆以及文化机构都只有十几分钟的步行路程。但是，在这个新家，康托与他的家人一起没住多久，尚没有很好地享用这新住宅，不久，他的病再次复发。发病前他一直在研究连续统问题。

哈雷大学有一个非常好的心理病学系。康托能得到那时最好的治疗——并且是免费的，因为他是大学教授。他的大学和柏林的文化部授权作出这样的决定，即要慷慨地保证康托可以从教学岗位反复离开。但他进医院的次数随着时光流去变得更加频繁。柏林的普鲁士国家档案馆里保存有一封文化部致法国财政部的信，日期标为1902年8月29日。在此信中，文化部要求一笔6600马克的资金，用来支持当康托教授病得太重时，哈雷大学为使教学得以顺利进行的数学教授替换协定。但康托再次康复并回到教学岗位。

下一年他再次发病，1904年9月17日被送进精神病院，一直住到1905年3月1日。之后在那年的秋天，康托再次进入医院。

哈雷精神病院有11座大楼，这些大楼是由吸引人的黄色研磨砖构成的，周围有很长的围墙。建筑质量是如此的精良，即使现今看起来几乎仍与百年前建立时完全一样。主要大厦有一尖塔，说它是精神病院，倒不如说更像是一个军事司令部。内部的房间宽敞明亮，窗户很大并带有私人浴室。这不是限制那些穿紧身衣的疯子自





康托的住宅

[摄影：阿米尔·艾克塞尔 (Amir D.Aczel)]

由的地方。它是——并且仍然是——一个富人们为了个人健康在此暂住几个月的医院，而这些人的家庭是能缴付房租、伙食和治疗费用的。乔治·康托，一位大学教授，被安排在一间有很好视野的单间里，并且可自由地继续他的研究。他的治疗主要是浸泡在热水澡盆里一段时间。

虽然他确实是在医院治疗中死去的，但人们不能对后来罗素（Bertrand Russell）所说的关于康托（参考康托已写的一封信）的话作出肯定的判断，即，读到他的信的人听到康托死在一个精神病院里的消息是不会感到惊讶的。

我们不知道康托所患病的确切状况。某些报告所说的症状像是双极紊乱或极度郁闷。但这精神疾病的原因现在逐渐被归结为遗传因素，而在康托的祖先中存在我们不知道的此病病例。

我们已经知道关于康托的病的一个事实。压抑感对他的攻击是与这样一个时期联系在一起的，在此时期内他正在思考关于现在叫做“康托的连续统假设”的问题。他也正在苦思冥想着一个单独的数学表达式，即利用希伯来字母阿列夫的一个方程：

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

这个方程是关于无穷的性质的一个表述。在康托写出它以后的一个多世纪，这个方程——连同它的性质和蕴涵——仍然在数学中保留着最不可思议的神秘性。

2. 古代起源

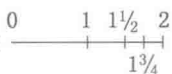
在公元前5世纪和6世纪间，古希腊人发现了无穷（或无限）。这个概念对人类直觉而言是如此矛盾、怪异，甚至是对它们的颠覆，以致使古代哲学家和发现它的数学家深感困惑，引起了无限痛苦、精神错乱，至少有一个人因此而死。这个发现引起的结果对以后2500年的科学、数学、哲学和宗教有着深刻影响。

有证据表明古希腊人已接近无穷概念，这就是那时经常出现的伊利亚（Elea）哲学家芝诺（前495—前435）提出的悖论。这些悖论中最著名的是芝诺描述的古代跑得最快者阿其里（Achilles）与一只乌龟之间的赛跑。由于乌龟跑得非常慢，所以开始时是让它在前面。芝诺推理说阿其里在乌龟后面某一处时开始起跑，这时乌龟应在前面有一段距离。然后经过一段时间阿其里到达乌龟开始起跑处，而乌龟也已经进一步向前跑了一小段距离。这样的论断按此方式可继续无穷地进行下去。因而，芝诺得出结论，跑得最快的阿其里绝不能赶上跑得非常慢的乌龟。芝诺由此悖论推断出，在空间和时间可被无穷细分的假设下，运动是不可能的。

另一个芝诺的悖论是两分法，说的是你绝不能离开你在其中的房间。首先你走到你与房门间距离的一半处，然后是剩下距离的一半处，那么仍然剩下从你所在处到房门间的距离的一半，如此等等。甚至进行无穷多次——每次是前一次尺寸的一半——你也绝不能到达并通过房门！这个悖论的背后藏着一个重要的概念：甚至进行无穷多次有时仍能留下一个较完整的有限距离。但是，如果每一



次你取得的量值是前一次尺寸的一半，那么虽然你进行无穷多次，你走过的距离的量值是最初的距离的两倍：

$$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + 1/64 + \cdots = 2$$


芝诺利用这个悖论争辩说，在空间和时间可被细分为无穷多的假设下，运动甚至绝不能开始。

这些悖论是历史上利用无穷概念的最初例子。令人惊讶的结果是，进行无穷多步仍能有一个有限和，这种情形叫做“收敛”。

人们试图通过放弃这概念来解决阿其里的悖论，或一个人打算离开房间的悖论，那么必须采取少之又少的次数。怀疑依然存在，因为如果阿其里追赶的次数必须少之又少的话，那么他绝不能赢。这些悖论突出了无穷概念令人费解的性质，以及当我们试图理解无穷过程或现象时我们面临的陷阱。但无穷的思想在芝诺前一世纪的毕达哥拉斯（前 569—前 500）的著作中已经有了，毕达哥拉斯是古代最重要的数学家之一。

毕达哥拉斯生于阿纳托利（Anatolian）海湾内的萨摩斯（Samos）岛上。他年轻时广泛游览了整个古代世界。按照传统惯例，他访问了巴比伦，几次到埃及旅行并会见教士们——从文明初期起埃及历史纪录的保存者——并和他们一起讨论埃及人对于数的研究。他回来后，搬到意大利的克罗顿（Crotona），并创立了一个致力于数的研究的哲学学派。在那里，他和他的同伴推导出著名的毕达哥拉斯定理。

在毕达哥拉斯前，数学家们并不理解现在称为定理的那些结果，是必须证明的。毕达哥拉斯和他的学派，以及古希腊的其他数学家把我们引入严密的数学世界——一个从最初的少数原理利用公

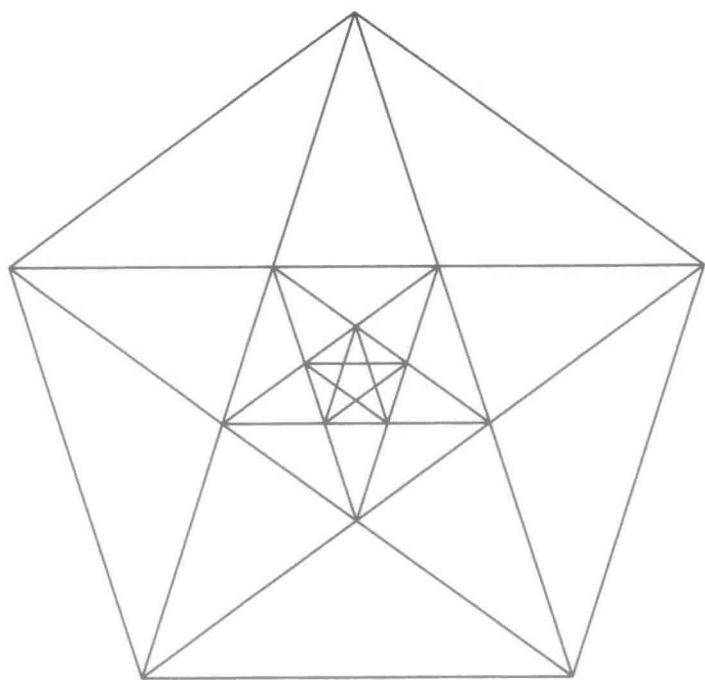
理化和逻辑推理逐级建立起来的体系。毕达哥拉斯以前，几何学是通过经验量度得来的一些规则的集合体。毕达哥拉斯发现，一个完整的数学体系是能够建立起来的，该体系中的几何元素是与数对应的，而整数和它们的比对于建立一个合乎逻辑和真实的完整体系都是必要的。但是某些事情粉碎了毕达哥拉斯及其同伴所建立的优美的数学体系。这就是无理数的发现。

在克罗顿的毕达哥拉斯学派遵从严格的管理规定。成员们相信轮回，即灵魂的转世。所以，为了保护死去朋友的灵魂而不能宰杀野兽。毕达哥拉斯派是素食主义者并遵守对额外食物的限制。

毕达哥拉斯派对数学和哲学的坚持不懈的研究是他们道德生活的基础。相信毕达哥拉斯派已经制造了两个词语，哲学（智慧的爱）和数学（学习到的东西）。毕达哥拉斯派有两类讲演：一类是给他们的学派成员的；另一类是为广泛交流通信用的。发现存在捣乱的无理数是在第一类讲演中提到的，对这类讲演成员们要宣誓完全保守秘密。

毕达哥拉斯派有一个符号——内接于一个五边形的一个五角星，这个五角星内部是另一个五边形，其内部是另一个五角星，如此等等直至无穷。在此图形中，每一条对角线被交线分成不等的两部分。较大线段与较小一段的比是黄金分割，是在自然界和艺术中出现的那个神秘的比例。中世纪有个斐波那契（Fibonacci）数列：1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ……其中从第3项起每个数是它前两个数的和，黄金分割是这个数列中相邻两个数的比所组成的数列的极限。每相邻两个数的比接近于黄金分割：1.618……，这是一个无理数。它是一个无限不循环10进小数。无理数在毕达哥拉斯以后的2500年中对无穷概念的发展起着决定

性作用。



数神秘主义不是起始自毕达哥拉斯学派。但毕达哥拉斯派举行的对于数的顶礼膜拜的仪式，不论是从数学还是从宗教方面来看其规格都很高。毕达哥拉斯们认为 1 是所有数的生成元。这样的认识使他们能对无穷概念有些理解，因为给定任何一个数——不论多么大——他们都可以在此数上加 1 而得到一个更大的数。毕达哥拉斯们认为偶数是阴性，奇数是阳性。3 是代表和谐的第一个真正的奇数，4 是第一个平方，看做是公正和恰当计算的符号。5 表示婚姻：第一个阴性数与第一个阳性数的结合。6 是创造的数。毕达哥拉斯们特别敬畏数 7：它是七个行星或“奇妙星体”的数。

最神圣的数是 10。它是表示宇宙的数，并是所有生成几何维

