高等数学基础
学习指导与习题精讲

（第2版）

孙艳玲 付春菊 顾艳丽 闫红梅 编著

清华大学出版社

高等数学基础
学习指导与习题精讲

（第2版）

孙艳玲 付春菊 顾艳丽 闫红梅 编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书以国家教育部工科数学课程指导委员会制定的《高等数学课程教学的基本要求》为依据，结合目前该门课程的教学改革情况编写，吸取了编写组教师多年的教学经验. 本书共分12个专题，包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数. 每一专题均由考试内容与要求、知识要点、基础例题与范例精解、自测题、自测题答案共5个部分组成.

本书可作为高等数学教学辅助教材供教师与学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学基础学习指导与习题精讲/孙艳玲等编著. —2版. —北京：清华大学出版社，2016

ISBN 978-7-302-44091-8

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①孙… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第175514号

责任编辑：袁勤勇
封面设计：傅瑞学
责任校对：白　蕾
责任印制：沈　露

出版发行：清华大学出版社
　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
　课件下载：http://www.tup.com.cn，010-62795954
印 装 者：清华大学印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：18.75　　**字　　数**：435千字
版　　次：2015年2月第1版　　2016年9月第2版　　**印　　次**：2016年9月第1次印刷
印　　数：1～2000
定　　价：39.50元

产品编号：069310-01

前　　言

高等数学是高等学校理工科专业本科生最重要的基础理论课之一.随着科学技术的迅速发展,高等学校各个专业对高等数学的要求不断提高,数学在自然科学、工程技术和社会科学等领域的作用越来越突出,应用面越来越广,也就是说数学正在日益渗透到各个专业领域,已成为人们学习和研究各门专业知识的重要工具.因此掌握好高等数学的基本知识、基本理论、基本运算和分析方法,不仅对学生学好后继课程是必要的,而且对他们今后自身能力的提高和发展都有深远的影响,并且有助于学生综合素质的培养.但是高等数学的知识复杂繁多,对于刚从初等数学学习转到高等数学学习的学生来说,在认知、观念、心理等各个层面上对高等数学研究对象和方法的改变会感到不适应和困惑.特别是对于形式多样、难易不同、方法各异的习题和练习题感到无所适从,手足无措.为了克服这种困难,我们组织了具有丰富教学经验的教师,以国家教育部工科数学课程指导委员会制定的《高等数学课程教学的基本要求》和《全国硕士研究生入学考试数学考试大纲》为依据,结合目前该门课程的教学改革情况编写了本书,旨在帮助学生深刻理解高等数学的基本概念和理论,准确抓住解题关键,清晰辨明解题思路,提高分析问题和解决问题的能力.

《高等数学基础学习指导与习题精讲》一书由沈阳建筑大学长期从事高等数学教学的教师编写,与同济大学数学系主编的《高等数学》(第六版)教材同步,本书系统地介绍了一元函数微积分及其应用、向代数量与空间解析几何、多元函数微积分及其应用、常微分方程与无穷级数等方面的基本概念、基本理论、基本运算和分析方法,为学生学习物理、电工、电子等课程和以后扩大数学知识面,打好基础.在介绍基础知识点的同时,辅以例题与练习题,引导学生认真阅读教材,独立完成习题,逐步培养学生的抽象思维、逻辑推理、空间想象、分析解决实际问题的能力,帮助学生掌握学习方法,培养自学能力.本书以基本题为主,侧重基本概念、基础知识和基本技能的训练,突出重点,解疑难点.本书中的每章都由考试内容与要求、知识要点、基础例题与范例精解、自测题、自测题答案 5 个部分组成.本书具有以下特点:

(1) 考试内容与要求和知识要点列出该章的主要概念和理论,并对其中重要内容做简要叙述,明确了学习要求和主要学习内容.针对基本概念和基本理论进行剖析,在后面配合精选的例题,使学生能够深入理解牢固掌握,考试时避免犯概念性的错误.

(2) 基础例题与范例精解中,在给出例题之前先给出该部分的解题提示,总结该部分的常用公式等知识点,然后通过例题给出详尽的介绍.该部分列出了对应章节中的重点提示,并归纳总结特殊题型的不同解决方法、技巧和注意问题.

(3) 本书介绍了许多新的、快捷的解题方法和技巧,每道例题都在题前给出了分析,以便学生自主思考解题,在题后给出了评注,以方便学生看后的理解消化.

(4) 自测题和自测题答案是与教学内容同步的练习题,在每章的最后都会给出练习题及解答,帮助学生巩固学习内容,检查学习效果.

本书的第1、2章由孙艳玲编写,第3～6章由付春菊编写,第7、11、12章由顾艳丽编写,第8～10章由闫红梅编写,全书由孙艳玲统稿,孙艳玲、付春菊、顾艳丽和闫红梅审稿.另外,本书的编写工作得到了清华大学出版社的大力支持,在此表示衷心的感谢!

作为高等数学的辅助教材,本书作者侧重于基础题的分析、解答和评注,充分展示了解题过程的来龙去脉.既通过解题示范帮助学生巩固基础知识,又通过评注提高了学生综合运用知识的能力.

由于编者水平有限,本书如有错误和不当之处,殷切期望专家、同行和广大读者提出宝贵的批评和建议,以便不断更新完善.

编　者

2016年4月

目　　录

第 1 章　函数与极限 …… 1

1.1　考试内容与要求 …… 1

1.1.1　考试内容 …… 1

1.1.2　考试要求 …… 1

1.2　知识要点 …… 1

1.2.1　基本概念 …… 1

1.2.2　基本性质 …… 3

1.2.3　基本理论 …… 4

1.2.4　重要结论及基本计算方法 …… 5

1.3　基础例题与范例精解 …… 6

1.3.1　函数概念的例题与解析 …… 6

1.3.2　求极限的例题与解析 …… 7

1.3.3　由函数极限和连续性求函数中待定系数的例题与解析 …… 14

1.3.4　无穷小比较的例题与解析 …… 16

1.3.5　函数连续性判断的例题与解析 …… 17

1.3.6　闭区间上连续函数性质的例题与解析 …… 19

1.4　自测题 …… 20

1.4.1　填空题自测 …… 20

1.4.2　选择题自测 …… 20

1.4.3　计算题自测 …… 21

1.4.4　证明题自测 …… 21

1.5　自测题答案 …… 21

1.5.1　填空题答案 …… 21

1.5.2　选择题答案 …… 22

1.5.3　计算题答案 …… 22

1.5.4　证明题答案 …… 23

第 2 章　导数与微分 …… 24

2.1　考试内容与要求 …… 24

2.1.1　考试内容 …… 24

2.1.2　考试要求 …… 24

2.2　知识要点 …… 24

2.2.1 基本概念 …… 24
2.2.2 基本性质 …… 25
2.2.3 基本理论 …… 26
2.2.4 重要结论及基本计算方法 …… 27
2.3 基础例题与范例精解 …… 28
2.3.1 函数导数计算的例题与解析 …… 28
2.3.2 利用导数定义求极限的例题与解析 …… 35
2.3.3 函数可导性讨论的例题与解析 …… 36
2.3.4 导数应用的例题与解析 …… 37
2.3.5 函数微分的例题与解析 …… 38
2.4 自测题 …… 39
2.4.1 填空题自测 …… 39
2.4.2 选择题自测 …… 39
2.4.3 计算题自测 …… 40
2.4.4 证明题自测 …… 40
2.5 自测题答案 …… 41
2.5.1 填空题答案 …… 41
2.5.2 选择题答案 …… 41
2.5.3 计算题答案 …… 41
2.5.4 证明题答案 …… 43

第3章 微分中值定理与导数的应用 …… 44

3.1 考试内容与要求 …… 44
3.1.1 考试内容 …… 44
3.1.2 考试要求 …… 44
3.2 知识要点 …… 44
3.2.1 基本概念 …… 44
3.2.2 基本性质 …… 45
3.2.3 基本理论 …… 46
3.2.4 重要结论及基本计算方法 …… 48
3.3 基础例题与范例精解 …… 49
3.3.1 中值定理相关的例题与解析 …… 49
3.3.2 洛必达法则应用的例题与解析 …… 53
3.3.3 不等式证明的例题与解析 …… 56
3.3.4 函数单调性的例题与解析 …… 57
3.3.5 函数极值和最值的例题与解析 …… 58
3.3.6 曲线凹凸性和拐点的例题与解析 …… 59
3.4 自测题 …… 60

3.4.1　填空题自测 …… 60
3.4.2　选择题自测 …… 60
3.4.3　计算题自测 …… 61
3.4.4　证明题自测 …… 61
3.5　自测题答案 …… 61
3.5.1　填空题答案 …… 61
3.5.2　选择题答案 …… 62
3.5.3　计算题答案 …… 62
3.5.4　证明题答案 …… 64

第4章　不定积分 …… 65

4.1　考试内容与要求 …… 65
4.1.1　考试内容 …… 65
4.1.2　考试要求 …… 65
4.2　知识要点 …… 65
4.2.1　基本概念 …… 65
4.2.2　基本性质 …… 66
4.2.3　基本理论 …… 66
4.2.4　基本积分公式 …… 67
4.3　基础例题与范例精解 …… 67
4.3.1　不定积分概念与性质的例题与解析 …… 67
4.3.2　第一类换元法的例题与解析 …… 72
4.3.3　第二类换元法的例题与解析 …… 75
4.3.4　分部积分法的例题与解析 …… 82
4.3.5　有理函数积分的例题与解析 …… 85
4.4　自测题 …… 88
4.4.1　填空题自测 …… 88
4.4.2　选择题自测 …… 89
4.4.3　计算题自测 …… 89
4.4.4　证明题自测 …… 90
4.5　自测题答案 …… 90
4.5.1　填空题答案 …… 90
4.5.2　选择题答案 …… 90
4.5.3　计算题答案 …… 91
4.5.4　证明题答案 …… 93

第5章　定积分 …… 94

5.1　考试内容与要求 …… 94

5.1.1 考试内容 …… 94
5.1.2 考试要求 …… 94
5.2 知识要点 …… 94
5.2.1 基本概念 …… 94
5.2.2 基本性质 …… 96
5.2.3 基本理论 …… 97
5.2.4 奇偶函数与周期函数的积分性质 …… 98
5.3 基础例题与范例精解 …… 98
5.3.1 定积分的概念与性质的例题与解析 …… 98
5.3.2 微积分基本公式的例题与解析 …… 101
5.3.3 定积分的换元法和分部积分法的例题与解析 …… 103
5.3.4 广义积分的例题与解析 …… 106
5.4 自测题 …… 108
5.4.1 填空题自测 …… 108
5.4.2 选择题自测 …… 109
5.4.3 计算题自测 …… 109
5.4.4 证明题自测 …… 110
5.5 自测题答案 …… 110
5.5.1 填空题答案 …… 110
5.5.2 选择题答案 …… 110
5.5.3 计算题答案 …… 111
5.5.4 证明题答案 …… 113

第6章 定积分的应用 …… 114

6.1 考试内容与要求 …… 114
6.1.1 考试内容 …… 114
6.1.2 考试要求 …… 114
6.2 知识要点 …… 114
6.3 基础例题与范例精解 …… 115
6.3.1 定积分的几何应用的例题与解析 …… 115
6.3.2 定积分的物理应用的例题与解析 …… 119
6.4 自测题 …… 122
6.4.1 填空题自测 …… 122
6.4.2 选择题自测 …… 122
6.4.3 计算题自测 …… 123
6.5 自测题答案 …… 124
6.5.1 填空题答案 …… 124
6.5.2 选择题答案 …… 124

6.5.3 计算题答案……124

第7章 微分方程……127

7.1 考试内容与要求……127
7.1.1 考试内容……127
7.1.2 考试要求……127
7.2 知识要点……127
7.2.1 基本概念……127
7.2.2 基本方法……128
7.3 基础例题与范例精解……132
7.3.1 微分方程的基本概念的例题与解析……132
7.3.2 可分离变量的微分方程的例题与解析……133
7.3.3 齐次方程的例题与解析……134
7.3.4 一阶线性微分方程的例题与解析……135
7.3.5 可降阶的高阶微分方程的例题与解析……138
7.3.6 高阶线性微分方程的例题与解析……139
7.3.7 常系数齐次线性微分方程的例题与解析……140
7.3.8 常系数非齐次线性微分方程的例题与解析……141
7.4 自测题……142
7.4.1 填空题自测……142
7.4.2 选择题自测……142
7.4.3 计算题自测……143
7.4.4 证明题自测……143
7.5 自测题答案……143
7.5.1 填空题答案……143
7.5.2 选择题答案……144
7.5.3 计算题答案……144
7.5.4 证明题答案……145

第8章 向量代数与空间解析几何……146

8.1 考试内容与要求……146
8.1.1 考试内容……146
8.1.2 考试要求……146
8.2 知识要点……147
8.2.1 基本概念……147
8.2.2 基本性质……148
8.2.3 基本理论……148
8.3 基础例题与范例精解……151

8.3.1 向量及其线性运算的例题与解析 …… 151
8.3.2 数量积、向量积、混合积的例题与解析 …… 153
8.3.3 曲面及其方程的例题与解析 …… 155
8.3.4 空间曲线及其方程的例题与解析 …… 158
8.3.5 平面及其方程的例题与解析 …… 161
8.3.6 空间直线及其方程的例题与解析 …… 163
8.3.7 平面、直线、点的关系 …… 166
8.3.8 点、线、面间的距离 …… 167
8.3.9 线、面间夹角 …… 169
8.4 自测题 …… 169
8.4.1 填空题自测 …… 169
8.4.2 选择题自测 …… 170
8.4.3 计算题自测 …… 170
8.4.4 证明题自测 …… 171
8.5 自测题答案 …… 171
8.5.1 填空题答案 …… 171
8.5.2 选择题答案 …… 171
8.5.3 计算题答案 …… 172
8.5.4 证明题答案 …… 173

第9章 多元函数微分法及其应用 …… 174

9.1 考试内容与要求 …… 174
9.1.1 考试内容 …… 174
9.1.2 考试要求 …… 174
9.2 知识要点 …… 175
9.2.1 基本概念 …… 175
9.2.2 基本性质 …… 177
9.2.3 基本理论 …… 177
9.3 基础例题与范例精解 …… 181
9.3.1 二元函数的概念的例题与解析 …… 181
9.3.2 二元函数极限的例题与解析 …… 182
9.3.3 多元函数连续性的例题与解析 …… 184
9.3.4 函数偏导数的例题与解析 …… 185
9.3.5 多元复合函数的偏导数的例题与解析 …… 188
9.3.6 隐函数的偏导数的例题与解析 …… 191
9.3.7 多元函数的全微分的例题与解析 …… 193
9.3.8 方向导数与梯度的例题与解析 …… 195
9.3.9 多元函数微分学的几何应用的例题与解析 …… 196

9.3.10　多元函数的极值与最值的例题与解析 …… 199
9.4　自测题 …… 201
9.4.1　填空题自测 …… 201
9.4.2　选择题自测 …… 201
9.4.3　计算题自测 …… 202
9.4.4　证明题自测 …… 202
9.5　自测题答案 …… 202
9.5.1　填空题答案 …… 202
9.5.2　选择题答案 …… 203
9.5.3　计算题答案 …… 203
9.5.4　证明题答案 …… 205

第 10 章　重积分 …… 207

10.1　考试内容与要求 …… 207
10.1.1　考试内容 …… 207
10.1.2　考试要求 …… 207
10.2　知识要点 …… 207
10.2.1　基本概念 …… 207
10.2.2　基本性质 …… 208
10.2.3　基本理论 …… 209
10.2.4　基本应用 …… 210
10.3　基础例题与范例精解 …… 212
10.3.1　二重积分的几何意义的例题与解析 …… 212
10.3.2　二重积分的性质的例题与解析 …… 213
10.3.3　利用直角坐标计算二重积分的例题与解析 …… 213
10.3.4　利用极坐标计算二重积分的例题与解析 …… 215
10.3.5　改变重积分的积分次序的例题与解析 …… 216
10.3.6　利用直角坐标计算三重积分的例题与解析 …… 217
10.3.7　利用柱坐标计算三重积分的例题与解析 …… 218
10.3.8　利用球坐标计算三重积分的例题与解析 …… 219
10.3.9　重积分的应用的例题与解析 …… 221
10.4　自测题 …… 224
10.4.1　填空题自测 …… 224
10.4.2　选择题自测 …… 224
10.4.3　计算题自测 …… 225
10.4.4　证明题自测 …… 226
10.5　自测题答案 …… 226
10.5.1　填空题答案 …… 226

10.5.2　选择题答案…………………………………………………… 226
10.5.3　计算题答案…………………………………………………… 226
10.5.4　证明题答案…………………………………………………… 227

第11章　曲线积分与曲面积分 ……………………………………………… 228

11.1　考试内容与要求……………………………………………………… 228
11.1.1　考试内容……………………………………………………… 228
11.1.2　考试要求……………………………………………………… 228
11.2　知识要点……………………………………………………………… 228
11.2.1　基本概念……………………………………………………… 228
11.2.2　基本性质……………………………………………………… 230
11.2.3　基本理论……………………………………………………… 231
11.2.4　基本应用……………………………………………………… 233
11.3　基础例题与范例精解………………………………………………… 235
11.3.1　对称性及质心公式的例题与解析…………………………… 235
11.3.2　曲线积分转化为定积分的例题与解析……………………… 236
11.3.3　格林公式的例题与解析……………………………………… 238
11.3.4　积分与路径无关的例题与解析……………………………… 240
11.3.5　二元函数的全微分求积的例题与解析……………………… 242
11.3.6　曲面积分转化为二重积分的例题与解析…………………… 243
11.3.7　高斯公式的例题与解析……………………………………… 245
11.3.8　斯托克斯公式的例题与解析………………………………… 246
11.3.9　曲线积分与曲面积分的应用的例题与解析………………… 247
11.4　自测题………………………………………………………………… 249
11.4.1　填空题自测…………………………………………………… 249
11.4.2　选择题自测…………………………………………………… 249
11.4.3　计算题自测…………………………………………………… 250
11.4.4　证明题自测…………………………………………………… 251
11.5　自测题答案…………………………………………………………… 251
11.5.1　填空题答案…………………………………………………… 251
11.5.2　选择题答案…………………………………………………… 251
11.5.3　计算题答案…………………………………………………… 251
11.5.4　证明题答案…………………………………………………… 252

第12章　无穷级数 ………………………………………………………… 254

12.1　考试内容与要求……………………………………………………… 254
12.1.1　考试内容……………………………………………………… 254
12.1.2　考试要求……………………………………………………… 254

12.2　知识要点……………………………………………………………………… 255
12.2.1　基本概念…………………………………………………………………… 255
12.2.2　基本理论…………………………………………………………………… 256
12.2.3　基本方法…………………………………………………………………… 260
12.3　基础例题与范例精解……………………………………………………… 261
12.3.1　常数项级数的概念和性质的例题与解析……………………………… 261
12.3.2　常数项级数的审敛法的例题与解析…………………………………… 262
12.3.3　幂级数的例题与解析……………………………………………………… 269
12.3.4　函数展开成幂级数的例题与解析………………………………………… 274
12.3.5　傅里叶级数的例题与解析………………………………………………… 276
12.3.6　一般周期函数的傅里叶级数的例题与解析……………………………… 278
12.4　自测题……………………………………………………………………… 279
12.4.1　填空题自测………………………………………………………………… 279
12.4.2　选择题自测………………………………………………………………… 280
12.4.3　计算题自测………………………………………………………………… 280
12.4.4　证明题自测………………………………………………………………… 281
12.5　自测题答案………………………………………………………………… 281
12.5.1　填空题答案………………………………………………………………… 281
12.5.2　选择题答案………………………………………………………………… 282
12.5.3　计算题答案………………………………………………………………… 282
12.5.4　证明题答案………………………………………………………………… 285

参考文献……………………………………………………………………… 286

第 1 章　函数与极限

1.1　考试内容与要求

1.1.1　考试内容

- 函数的概念(求函数的定义域);
- 数列的极限(数列极限的定义以及收敛数列的性质);
- 函数的极限(函数极限的定义以及函数极限的性质);
- 无穷大和无穷小;
- 极限运算法则;
- 极限存在准则以及两个重要极限;
- 无穷小的比较;
- 函数的连续性与间断点的讨论;
- 连续函数的运算与初等函数的连续性;
- 闭区间上连续函数的性质(有界性及最大值最小值定理,零点定理与介值定理).

1.1.2　考试要求

理解函数的概念,了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性;了解反函数和复合函数概念;熟悉基本初等函数的性质及其图形;能列出简单实际问题中的函数关系.

了解极限的 $\varepsilon-N$,$\varepsilon-\delta$ 等定义;掌握极限四则运算法则;了解两个极限存在准则(夹逼准则和单调有界准则);会用两个重要极限公式求极限.

了解无穷小、无穷大的概念;掌握无穷小的比较.

理解函数在某一点连续的概念,会判断间断点的类型;了解初等函数的连续性,知道在闭区间上连续函数的性质.

1.2　知识要点

1.2.1　基本概念

1. 函数

设数集 $D\subset R$,称映射 $f\colon D\rightarrow R$ 为定义在 D 上的函数,记为 $y=f(x)$,$x\in D$,数集 D 叫做函数的定义域,x 叫做自变量,y 叫做因变量. y 的取值范围叫做函数的值域.

2. 数列极限

设有数列$\{x_n\}$和常数a，若对$\forall\varepsilon>0$，$\exists$正整数N，当$n>N$时，总有$|x_n-a|<\varepsilon$则称a是数列当$n\to\infty$时的极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

3. 函数极限

(1) 设函数$f(x)$在某$\overset{0}{U}(x_0)$内有定义，若对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，对$\forall x\in\overset{0}{U}(x_0)$，总有$|f(x)-A|<\varepsilon$成立，$A$就叫做函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限，记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

(2) 左极限：$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$x_0-\delta<x<x_0$时，总有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

(3) 右极限：$f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$x_0<x<x_0+\delta$时，总有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

(4) 函数$f(x)$当$x\to\infty$时有极限A，即：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，当$|x|>X$时，总有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

4. 无穷小

若$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$，则$\alpha(x)$是当$x\to x_0$时的无穷小：

(1) 若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则$\beta$是$\alpha$的高阶无穷小，记为$\beta=o(\alpha)$；

(2) 若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，则$\beta$与$\alpha$是等价无穷小，记为$\beta\sim\alpha$；

(3) 若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq0$，则$\beta$与$\alpha$为同阶无穷小；

(4) 若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq0$，则$\beta$为$\alpha$的$k$阶无穷小.

5. 无穷大

设函数$f(x)$在某$\overset{0}{U}(x_0)$内有定义，对$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，总有$|f(x)|>M$，则称$f(x)$当$x\to x_0$时为无穷大量，记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

6. 连续

设函数$f(x)$在某$\overset{0}{U}(x_0)$内有定义，如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，那么就称函数$f(x)$在点$x_0$连续.

7. 间断

函数$f(x)$在点x_0处不连续，则称$y=f(x)$在点x_0处间断，称x_0为间断点. 若$f(x)$在点x_0出现如下情况之一，那么x_0是间断点：

(1) $y=f(x)$在点x_0处无定义；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，但不等于 $f(x_0)$.

间断点有以下几种常见类型：

设 x_0 是函数 $f(x)$的间断点，左极限 $f(x_0-0)$和右极限 $f(x_0+0)$都存在，则 x_0 为函数 $f(x)$的第一类间断点，其中左极限 $f(x_0-0)$、右极限 $f(x_0+0)$存在并相等时，称 x_0 为可去间断点；左、右极限存在但不相等时，称 x_0 为跳跃间断点.

不是第一类间断点的任何间断点都是第二类间断点，其中当左极限 $f(x_0-0)$和右极限 $f(x_0+0)$至少有一个为无穷时，称 x_0 为无穷型间断点；当 $x\to x_0$ 时，函数值 $f(x)$无限地在两个不同数之间变动，称 x_0 为振荡型间断点.

1.2.2 基本性质

1. 函数的性质

(1) 有界性：设函数 $f(x)$的定义域是 D，若$\exists M>0$，使得$\forall x\in X\subset D$，总有$|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$在 X 上有界. 若不存在这样的 M，则称 $f(x)$在 X 上无界.

(2) 单调性：设函数 $f(x)$的定义域是 D，区间 $I\subset D$，如果对 I 中任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称 $f(x)$在 I 上单调增加（或单调减少）.

(3) 奇偶性：设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称，若$\forall x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$是偶函数；若$\forall x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$是奇函数. 偶函数的图形关于 y 轴对称；奇函数的图形关于原点对称.

(4) 周期性：设函数 $f(x)$的定义域是 D，若存在一个不为零的数 l，使得$\forall x\in D$，有 $x\pm l\in D$ 且 $f(x+l)=f(x)$恒成立，则称 $f(x)$为周期函数，l 为 $f(x)$的周期，一般指最小正周期. 若 l 是 $f(x)$的周期，则$\dfrac{l}{a}$是 $f(ax+b)$的周期，$a\neq 0$，b 为任意实数.

2. 数列极限性质

(1)（唯一性）若数列$\{x_n\}$收敛，则极限必唯一；

(2)（有界性）若数列$\{x_n\}$收敛，则必有界；

(3)（局部保号性）如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 且 $a>0(a<0)$，那么存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $x_n>0(x_n<0)$；

(4)（收敛数列与其子数列间的关系）若数列$\{x_n\}$收敛于 a，则其任一子数列也收敛于 a.

3. 函数极限性质

(1)（唯一性）若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则此极限唯一.

(2)（局部有界性）若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则 $f(x)$在 x_0 的某 $\overset{\circ}{U}(x_0)$内有界.

(3)（局部保号性）如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，而且 $A>0$（或 $A<0$），那么$\exists\overset{\circ}{U}(x_0)$，当 $x\in\overset{\circ}{U}(x_0)$时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.