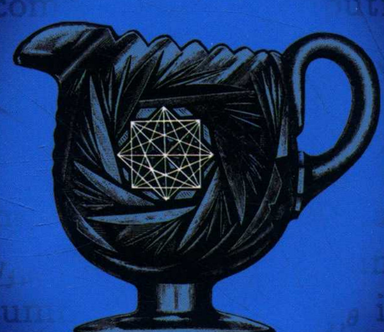
600 World Famous

600个世界著名数学征解问题

Reader Solved Mathematics Problems

◎ 冯贝叶 编译

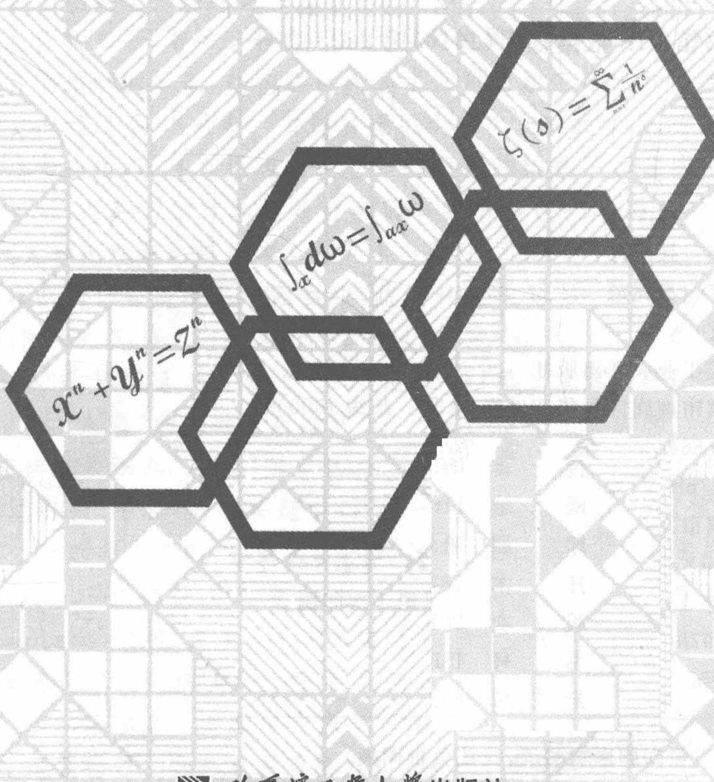


哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

600 WORLD FAMOUS READER SOLVED MATHEMATICS PROBLEMS

600个世界著名数学征解问题

◎ 冯贝叶 编译



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书共分5章,涵盖了代数问题、几何问题、高等代数问题、初等数论问题、高等数学问题等内容,每章均包含了数例典型征解问题及解答.本书是在《500个世界著名数学征解问题》这本书的基础上新增了35道优质并且具有代表性的数学题目.

本书适合数学奥林匹克选手、教练员使用,也适合于大中专院校师生及数学爱好者参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

600个世界著名数学征解问题/冯贝叶编译.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2017.1

ISBN 978-7-5603-6197-0

Ⅰ.6…　Ⅱ.①冯…　Ⅲ.①数学—问题解答　Ⅳ.O1—44

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第222542号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　聂兆慈
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张29　字数688千字
版　　次　2017年1月第1版　2017年1月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-6197-0
定　　价　68.00元

◉修订说明

这次修订(《600个世界著名数学征解问题》在此简称为"B版",为《500个世界著名数学征解问题》(简称"A版")的修订版),是从《数学杂志》(*Mathematics Magazine*),《美国数学会通讯》(*Notices of the American Mathematical Society*)和读者来信中选择了一些题目补充进来.

在代数部分,增加了一些三角恒等式的题目,补充了"A版"中这方面题材的份量,这些题目反映了三角函数恒等式和高次方程之间的联系,其中有一些题目要用到三次方程的理论.为了便于读者应用,现将有关的三次方程的理论和结果不加证明地附列于后,详细的细节和推导可参阅有关书籍(例如,冯贝叶,《多项式和无理数》,哈尔滨工业大学出版社,2008年).

在几何部分所增加的题目中,我想特别提到B—2—3,B—2—4,B—2—5,B—2—6和B—2—14(文中B—X—Y代表"B版"中X章Y题目.如:B—2—3,代表"B版"第2章第3题)."B版"中,在"A版"的基础上新增的35个题目在题号前加有"*"号,使读者能够和"A版"加以区分.增加B—2—3,B—2—6是考虑它们和"A版"的有关题目(B—2—2)在图形上有类似性,但解法上则完全不同,因此放在一起就有了某种思考和鉴赏的兴趣.B—2—3题同时也是历史上的有名问题,称为汤普森(Thompson)问题.现在已有人收集了许多种解法(可参考沈文选,杨清桃,《几何瑰宝——平面几何500名题暨1000条定理(上、下)》,哈尔滨工业大学出版社,2010年),但大都需要作辅助线.这就需要一些特别的观察力和联想力.其实本题在现代看来已不能算太难,一个中学数学合格的学生用完全正规的方法

按部就班地去做，也完全可以解决．本书就给出了这样一种解法，完全不需作辅助线，因此在图形上就非常简单，所用到的方法就是反复地使用正弦定理和余弦定理，思路则是进行直接的计算，而计算的方法就是解有关的三角形，任何一个有实际计算能力的人都可以想到．而解决这个问题（如果你把这个问题看成是一个实际工作中的工程问题而不单纯是一个几何上的理论问题）也反过来有助于训练在实际工作中运用所学知识的能力，因此特补充进来供读者参考．B—2—6 题是一位读者提供给编者的，在图形上与 B—2—2 题非常类似，但解决它需要知道某个特殊角所满足的代数方程，编者至今不知道．如果不知道这一结果，是否能用纯几何的方法解决此题，因此也特收集进来供读者思考．B—2—14 题在历史上是一个很有名的问题．而其来源则是平面几何中非常普通和简单的一条定理，即等腰三角形等角的角平分线相等．而此问题则是问这一定理的逆定理是否成立（这个问题又称为斯坦纳—雷米欧斯问题）．与这一定理类似的还有等腰三角形的等边上的中线相等，等腰三角形的等边上的高线相等，其逆定理都非常简单．唯独这个定理的逆定理很难，即使在今天，这个问题对一般的中学生也仍然是一道难题．现在已有人收集了许多种解法（可参考上文提到过的沈文选，杨清桃，《几何瑰宝——平面几何 500 名题暨 1000 条定理（上、下）》），这些解法无非是反证法、同一法和直接证法三种．根据文献中的讨论，数学爱好者最感兴趣的是直接证法．在这次修订中编者收入了两种直接证法，一种是根据俄罗斯的文献，应用角平分线的长度公式的证法，另一种是首先由甘志国先生给出的，后经编者简化的三角证法（可参看甘志国，《初等数学研究（I）》，哈尔滨工业大学出版社，2008 年．他原来的证明要使用 5 倍角的三角函数，现在编者简化为只使用普通的三角公式即可）．反证法和同一法是最先发现的证法，在三角形内的中线、高线和角平分线用各边表示的公式都得出后，用代数方法去证明这一问题就是一个很容易想到的思路．最难的是纯几何的证明，而且是直接证明．

1840 年德国数学家雷米欧斯在给斯图姆（Sturm）的一封信中提到：几何题在没有证明之前，很难说它是难还是容易．等腰三角形两底角平分线相等，初中生都会证明；可是反过来，已知三角形两内角平分线相等，要证它是等腰三角形却不容易了，我至今还没有想出来．斯图姆向许多数学家提到了这件事，请求给出一个纯粹的几何学的证明，首先回答这个问题的是瑞士的几何学家斯坦纳（Steiner，1796—1863），所以这个问题就命名为斯坦纳—雷米欧斯定理而闻名于世．

斯坦纳的证明发表后，引起了数学界极大反响．论证这个定理的文章发表在 1842～1864 年的几乎每一年的各种杂志上．后来，一家数学刊物公开征解，竟然收集并整理了 60 多种证法，编成一本书．直到 1980 年，美国《数学老师》月刊还登载了这个定理的研究现状，随后又收到了 2 000 多封来信，增补了 20 多种证法并收入了一个最简单的直接证法．经过几代人的努力，100 多年的研究，“斯坦纳—雷米欧斯”定理已成为数学百花园中最惹人喜爱的瑰丽花朵！

在本书中，编者收集了 6 种证法，其原则如下：首先一定要收入一种容易想到的证法以表明其实这个问题在现在已不能算难，另外必须收入一种几何的直接证法，因为这正是这个问题的迷人之处．在各种几何的直接证法中，编者又特别偏爱图形是对称的证法．本题中给出的第 3 种证法正是这样一种证法．这种证法只用到初中程度的平面几何知识，如三角形的全等和圆周角定理，但是虽然很容易懂，自己想出来却并不容易．原因就在于采用这种证法需要看出三角形中的一些特殊的图形，而且这些图形还是原来所没有的，需要你自己想象并

添加进来.有人曾用一些机器证明软件做实验企图证明这个问题,均未成功,这表明人类的思维特性有一些至今无法确切描述的和用机器替代的因素.

在本书所收集的证法中,有人认为代数法太过复杂而并不欣赏,但编者并不这样看,编者认为一个问题的解法是否复杂,不光在于其证明过程是否冗长和牵涉复杂的运算,更重要的在于思路是否简单,是否容易想到.从这个观点看,代数法的思路是极其简单的,也是非常容易想到的.它的基础在于利用像用三角形的三条边等基本元素表示出三角形的一些基本线段的公式.这种结果,无论是从当初研究的动机还是最后的应用上,都不是针对某一特殊问题的.但是一旦这种基本结果得出,往往一个特殊问题即可迎刃而解.这就显示出基本理论和基本结果的重要性.而一些专门针对某一特殊问题的特殊解法,虽然看起来可能显得很简洁和巧妙,但往往只具有解决这一特殊问题的效力,对其他问题则难以用上.当然,这类结果也是数学中的瑰宝,也有珍藏起来加以赏析的价值.有些解法,看起来好像很简单,但往往要依赖于一些预备结果,如果连这些预备结果都算上,整个的证明过程也就不像原来那样简短了.题目B—2—9中的最后一种解法和这次新增加的问题B—2—4中的第一种解法就是对上述观点的一个说明.在数学竞赛题中,难题往往出自几何题,而在有关三角形线段的几何题中,有关角平分线的题目往往又比关于高线和中线的题目难,因此在修订本中特别增加了两道有关三角形角平分线的题目(问题B—2—4和问题B—2—5),让读者体会一下这种问题的难度.问题B—2—4的解答也有以上提到的两种思路,第一种思路是利用几何关系,发现并看出图形中的一些隐蔽的关系.例如在问题B—2—4第二种解答中的充分性中,要求解答者发现 $CE+BD=BC$ 这一关系,并看出 $\triangle PDE$ 是一个等边三角形.在必要性的证明中,题目所给的条件是两条线段 PI 和 QI 之间的极其简单的二倍关系 $PI=2QI$,但这一关系与 $\angle A$ 之间的关系却并不明显.但是显然可以看出的是一旦 $\angle A$ 给定了,这两条线段之间的比例关系就完全确定了,因此一定可以把它们的比例关系用 $\angle A$ 等三角形的基本量表出.而这道题的解答也就有以上提到的两种思路,一种是利用几何关系巧妙地表出 PI 和 QI 之间的关系;另一种就是上面提到的代数证法,即用三角形的基本量逐步地,按部就班地计算出 PI 和 QI 之间的关系,待到此计算完成,这个问题也就解决了.这种证法虽然在中间过程中可能会涉及烦琐的计算,但是其思路却是极其清楚和简单的;而另一种证法一般都需要解答者有某种洞察力和巧妙的解法.问题B—2—4的第二种解答中的充分性,问题B—2—5以及问题B—1—50中的方法1都是由我的研究生师兄周庆善提供的,他和我的另一个同学王国义都是极聪明的人,对数学问题的解答经常会发现我不易想到的奇思妙解,使我在看到他们的解答后感到叹服.我自认为缺乏他们的天分和洞察力,但是只要一旦看出问题的解决可以归结为单纯的计算,这点计算能力和吃苦能力还是有的.我很欣赏杨振宁对学生"宁拙毋巧,宁朴勿华"的要求,正是由于这个原因,这两个问题的代数解法都是由本书编者给出的(我想任何一个认真点的数学爱好者也都可以用此方法做出),实践证明对某些问题来说,这也的确是一种有效的方法.

而这部分新增加的最后一个问题(B—2—52)的结果本身也具有数学和物理两方面的魅力.

在高等代数部分,增加了两个以高等代数中熟知的定理为题目的问题(B—3—14,B—3—52),其目的不在于介绍这两个定理本身,而在于分别对这两个定理各介绍一种新的证法.

在初等数论部分中，这次修订对“A 版”中的第 187 题(修订本 B—4—192，在两种版本中都是最后一道题)给出了一个新的证明. 中国科学院应用数学研究所朱尧辰研究员向编者指出原来的证明有缺陷以及不太严谨. 编者参考了单墫教授的论文并对其中叙述的不够详细之处进行了补充，给出了一个新的证明，经朱尧辰研究员审核，认为没有问题.

在高等数学部分中，编者认为新增加的一些极限问题(B—5—82，B—5—83)有一定的趣味.

最后，编者想向读者指出，如果通过本书能增强自己以下三种能力，那将在解题能力方面得到实质性的收获. 一是敏锐的观察力，表现在通过对图形或代数式的观察，发现某些具体的特点和特性(例如对称性，相等的线段或角度，代数式中可配成完全平方或可换元的成分，等等)；二是有关结果的积累和整理；三是深入的思考和推理能力. 这三种能力是互相促进，互相补充的. 例如在斯坦纳—雷米欧斯问题中，如果你具有非常敏锐的观察力而发现某种辅助线的作法从而得出一种证明，那当然值得庆贺，但是即使你缺乏这方面的眼力，如果你知道三角形中角平分线的长度公式，你仍然可以想到一种很自然的证法，这就是用积累丰富的结果来补偿观察力不足的一个例子. 而每个人都有自己的特长，所以对有些问题即使自己一时解决不了也不必妄自菲薄，只要做到不断钻研，以己之长，补己之短，就定会有所提高.

解题有时颇类似于破案，见到题目之后的最初感觉更是一种高级的潜能力，读者更应注意培养自己在这方面的能力. 我们知道，在现代科技条件下，如果公安部门的怀疑对象和侦查方向正确的，那么犯罪嫌疑人一般是很难逃脱法网的(当然也可能会有例外). 以后的技术问题在侦查方向正确的前提下，一般早晚会得到解决. 解题也是这样，如果解题方向正确，此后在数学方面所遇到的技术手法等问题，一般也早晚会得到解决. 例如在斯坦纳—雷米欧司问题中的角平分线长度公式证法中，我们会有一步需要进行因式分解，有人担心如果分解不出来会卡住，其实这完全没有必要，只要这个问题的答案是肯定的，那么这种证法中的 b 和 c 就必然相等，因此把平方后的式子看成 b 的多项式，它就必然会含有 $b-c$ 的因子，即使你不能通过分组之类的方法将式子分解，在万不得已的最后情况下，你即使用做除法的方法也必定能将其分解. 再比如在本书给出的对汤普森问题的证法中，会有一个对三角函数式子做恒等变形的过程，有人担心这一步看不出来怎么办. 其实这也完全没有必要，只要答案确实是 30°，肯定早晚能把这些恒等变形凑出来. 由此我想到两个问题，一是由于结果的正确与否和知道不知道经常会决定解题方向，所以我觉得应当鼓励读者对问题的答案进行积极的猜测，一旦形成了正确的猜想，对解题是有极大帮助的. 为此，解题时养成一些良好的习惯是很有好处的. 比如，在解几何和代数问题时，有时我们需要作一个草图来帮助思考，对有些问题，图画的草一些问题不大，对帮助思考已足矣. 但是对有的问题，认真仔细的作图本身就有助于形成正确的猜想，比如在汤普森问题中，如果你非常认真地作图，就很容易发现，所求的角度是 30°(甚至可以用量角器验证)；另一个问题是一定要锻炼自己形成猜想和判断问题正误的能力，这对今后准备做科研工作的读者尤其重要. 因为科研问题与习题最重要的区别在于习题的答案往往是预先就知道的(如证明题)或预先就肯定知道必然存在的，而科研问题的特点是你不知道这个问题是否一定有答案，即使知道，也仍然不知道自己是否一定能得出答案. 因此做科研有如在黑夜的茫茫大海中航行，指引你前进的唯一线索是前人积累的资料和成果，其他一切都需要靠你自己去摸索、试验、判断和猜测. 因此从学校中的好学生到一

个好的科研工作者是要有一个转变的(有时是痛苦的)过程的,而及早锻炼自己在这方面的能力将有助于缩短这一过程.

拉拉杂杂说了这么多可能是废话的话,仅供读者参考.

附:关于三次方程的几个结果:首先可将一般的三次方程化成标准形.

一般的三次方程的形式为

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0,a_0>0$$

先用 a_0 去除方程的两边,得出

$$x^3+b_1x^2+b_2x+b_3=0$$

其中

$$b_1=\frac{a_1}{a_0},b_2=\frac{a_2}{a_0},b_3=\frac{a_3}{a_0}$$

再令

$$x=y-\frac{b_1}{3}$$

则方程化为

$$y^3+py+q=0$$

其中

$$p=b_2-\frac{b_1^2}{3},q=b_3-\frac{1}{3}b_1b_2+\frac{2b_1^3}{27}$$

对标准方程

$$y^3+py+q=0$$

有以下判据:

定理 1　实系数三次方程 $y^3+py+q=0$,

当 $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$ 时,有一个实数根和一对共轭复根;

当 $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$ 时,有三个实根,并且其中有两个根或三个根相等;

当 $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$ 时,有三个不相等的实根.

关于三次方程的求根公式有以下结果:

定理 2　三次方程 $y^3+py+q=0$ 的三个根可以分别表示为

$$y_1=z_1+z_2$$
$$y_2=\omega z_1+\omega^2z_2$$
$$y_3=\omega^2z_1+\omega z_2$$

其中

$$z_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},z_2=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

这一公式称为卡丹(Kadan)公式.

上面的公式只有当 $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\geqslant 0$ 时才可以用于实际计算,而当 $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$ 时,三次方程的三个实根只能用复数来表出,而一般不可能用实的根式表出,这种情况称为不可约情况.实际计算时,可用以下的带三角函数的公式.

定理 3　设 $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$, $\theta_k=\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3\sqrt{3}q}{2p\sqrt{-p}}\right)+\frac{2k\pi}{3}$, $k=0,1,2$. 那么实系数三次方

程 $y^3+py+q=0$ 的三个不同的实数解为

$$y_k=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\theta_k,k=1,2,3$$

以上就是有关三次方程的主要结果.

冯贝叶

⊙ 前言

这是一本献给数学爱好者的课外参考书，其内容包括了代数、几何、高等代数、初等数论和高等数学五方面的500余道各式各样的问题和解答(本来是计划选500题的，然而选到500题时，已看到2000年，于是索性将现有的刊物看完，共得578道题).这些问题基本上是根据1956～2006年《美国数学月刊》《数学杂志》等刊物中的问题与解答专栏编写的，其中也有一些问题是根据杂志中的文章的内容编写的，个别问题则是编者自己编写的.在每道题目后面的括号中都注明了这道题原来在《美国数学月刊》《数学杂志》(缩写分别为AMM和MM)中的题号或编者据以改编的题目.《美国数学月刊》和《数学杂志》也刊登历年以来的《普特南数学竞赛题及解答》，这其中也有不少值得收入的好题，但是由于哈尔滨工业大学出版社已另辑单本出版，所以本书未选收其中的题目.

《美国数学月刊》和《数学杂志》都是世界上著名的杂志，目前国内还没有同样性质的刊物.几十年来，它们刊登了大量饶有兴趣、紧跟时代发展的数学文章和问题.这些文章的深度大多可被具有高中至大学程度的读者所理解，且又与当时科学界所关心的热点和前沿问题有关，所以对一般读者起到了普及和鸟瞰的作用.例如在20世纪30年代，一种俄罗斯十五方块游戏曾经风靡美国，《美国数学月刊》就曾专门刊登文章探讨其数学原理，到了20世纪七八十年代，混沌的研究又在数学物理界掀起了热潮，这时《美国数学月刊》又刊登过李天岩的《周期3蕴含混沌》的著名文章，至今仍是混沌研究中的一篇重要文献.而《数学杂志》也刊登了好几篇有关周期3窗口的发生参数和消失参数方

面的文章.再比如,数学历史上曾有过许多非常著名的结果——代数基本定理、把整数表示为平方和的定理、常微分方程的解对初值和参数的连续性定理等,这些结果当时发表时的证明一般都是比较专业,难以为一般读者所理解的,而《美国数学月刊》和《数学杂志》又不断地发表对这些老的著名结果的简单的、容易理解的新的证明.这就不难理解为什么《美国数学月刊》和《数学杂志》几十年来一直是极受读者欢迎的刊物了.然而由于内容繁多以及语言障碍,因此很有必要针对中国读者的需要,从中精选部分内容结为专辑以飨中国读者.

本书是给数学爱好者阅读的课外读物,它既不能代替基础训练,也不是专门为了考大学或研究生而编写的.所以对那些带着寻找敲门砖的目的而阅读本书的人来说,这本书肯定是会使他们失望的.但是另一方面,世界上的事情有时就是很奇妙的,所谓"有意种花花不活,无心栽柳柳成荫".如果你认真钻研过本书,那也真说不准在数学竞赛、高考、考研中会得到意想不到的好处.

那么什么人可以算是适合阅读本书的数学爱好者呢?这使我想到《一千零一夜》中的一个故事.其内容大意是说古代埃及有一个王子,生活过得十分优越,但是他又感到十分无聊,就决定四处游访,见识一下外面的世界.有一次,他来到一个寺院,发现寺院里的僧人的左眼都是瞎的,但是对他十分友好,拿出好吃的吃食和水果招待他,并邀请他在寺院里多住几日,与他们一起欣赏寺院的风景并互相讲各人的见闻,一起讨论问题.结果这个王子在寺院里住了一段时间后就发现,每月有一天,寺院里的僧人就用锅灰把脸抹黑,不吃不喝,号啕大哭,过了这一天,又一切正常.他就感到很奇怪,但是他问了好几次,那些僧人都不告诉他,并且劝他不要再问,否则这美好的日子就要过到头了.但是这样一来,越发增加了王子的好奇心,在他的一再追问下,那些僧人生气了,对他说,既然你不听我们的劝告,你就等着倒霉吧.到了第二天,这些僧人用一张牛皮把他裹起来,并交给他一把刀,又在牛皮上涂了一些羊血.然后就把他扔到一个峡谷中.过了一会儿,就听见一阵呼呼的声音,他从缝隙中看见一只大鹏飞来,叼着他飞到了一个极高的悬崖之上.这时他用尖刀将牛皮割开,从牛皮中钻了出来,并挥刀把大鹏吓跑.等他放眼四看,就发现不远处有一座金碧辉煌的宫殿,就在他不知所措之时,从宫殿中跑出来30个月儿般美丽的姑娘,她们头上都戴着漂亮的花环,一齐对他说:"欢迎你,尊贵的客人."这30个姑娘把他拥进宫中,陪着他嬉戏玩乐,过了一段美好的日子.然而忽然有一天,为首的姑娘含着眼泪对他说:"现在我们必须要分别一个月,这个宫殿里一共有31个门,这前30个门,你都可以打开,每个门打开后,里面的陈列、景物都够你玩赏一整天的,只是最后一道门,你不能打开.你如果能按照我们的话去做,等我们回来,我们将永远陪着你,过着幸福愉快的日子,否则我们将再也不能相见."王子郑重地向她们保证他会照做,她们才满眼泪水、依依不舍地走了.等姑娘们走后,王子按照她们的话,每天打开一道门,果然每天的日子不知不觉就过去了.到了最后一天,王子起先恪守诺言,没有去开那个门,但是最后,却实在克制不住好奇心,终于还是把那个门打开了,打开后,却发现,这是一个很小的房间,里面只有一匹木马和一盆水,王子仔细检查了木马后,又骑到马上,发现马头上有一个开关,他又好奇地扭动了那个开关,结果这一下坏事了,他发现木马动起来了,并且会说话,只见马尾巴沾了一下盆里的水,向他脸上一挥,就把他的左眼打瞎了,然后马就飞起来,飞到一个地方,对着他说,下去吧,倒霉的家伙,他就掉了下去,下来后,他发现,自己正好又落到那个寺院里,从此,他也加入了那些僧人的行列,成了他们之中的一员.

我讲这个故事的意思就是要告诉你,科学家就是那种宁愿瞎掉一只眼睛,也想知道那个

门后面是什么的人.同样也只有具有这样强烈的好奇心,你才有钻研数学的动力.因此我认为一个真正的数学爱好者需要具备三个条件,首先的条件是你对数学要有强烈的兴趣,这表现在喜好数学题材的读物,看见一个数学问题就摩拳擦掌,想试试看会不会做,如果做不出来,又十分想知道答案,甚至达到废寝忘食的程度,而且在经过自己的努力,解决了一个数学问题后,会感到十分愉快和兴奋.如果你有这种劲头,这第一个条件就具备了.古代迦太基大数学家阿基米德(Archimedes)对国王交给他甄别金王冠中是否掺假的问题曾思考了很长时间都未能解决,有一次他正洗澡时,由于感受到水的浮力而想到可以利用浮力原理来解决这一问题,就兴奋得光着身子跑到大街上大喊"我想出来了,我想出来了",这就叫作和数学有缘分,并不是每个人都是和数学有缘分的.有一次我曾偶然经过附近的小学校,当时操场上上体育课的男生分成两队,其中一队有一个队员突然起脚,球应声进门,结果这一队的队员都兴奋得大喊"踢进去了,踢进去了".我也很为他们高兴.然而这时我又听到另一种声音,才注意到,操场边上还有几个女生也在说话,但是她们说的却是"踢进去就踢进去呗,那又怎么了",我想这几个女生是天生与足球运动无缘的.如果你在一道数学题做不出来后感到"做不出来就做不出来,那又怎么样",那我想你也恐怕是与数学无缘的.

其次是当你看到一个陌生或抽象的数学符号或表达式时,是否会感到头晕,从心里产生一种害怕的感觉?比如平常你解的方程都是关于 x 的一元一次方程或一元二次方程,结果在一次数学竞赛选拔考试中突然要你解方程

$$x^3-[x]=3$$

其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数,比如$[2.5]=2$,$[-3]=-3$,$[-3.4]=-4$.你是感到害怕还是觉得这个问题有点意思啊?再比如说,你平常见到的都是等号、大于号、小于号这些符号,结果有一天你去新华书店翻书,发现一本书里有许多有意思的问题,但是又同时有很多地方有 $a\equiv 2 \pmod 3$ 这种符号,你是马上感觉这本书看不懂,还是觉得这个"$\equiv$"到底是什么意思,很想知道一下?还有,你平常见惯了 $1+4+\cdots+n^2$ 这种写法,如果有一天,你发现有的书上把这个式子写成 $\sum\limits_{k=1}^{n}k^2$ 的样子,或者还有像 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}f(i,j)=\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n}f(i,j)$ 这种式子,你是感到嗓子眼发干,实在不想看下去,还是想继续看下去,搞清楚这是什么意思,并且等你看懂后觉得这种写法挺省事,以后也想这样写.如果你对陌生、抽象的数学符号和表达式不晕、不怕、敢于弄懂,并且见到一个数学问题后,不管是否能把它做出来,就先愿意在纸上划拉两道,摆弄摆弄,那么可以说你对数学有点感觉,已具备了数学爱好者的第二个条件.

最后,尽管你对数学很感兴趣,也有感觉,你还需思考一下,你是否在数学上确实有落在实处的记录以证明你确实有这方面的才能.再具体点来说,就是你在学校中数学作业和考试的成绩如何,是否在某种级别的数学竞赛中得过名次或至少参加过这种竞赛.如果你只是在口头上说或者自认为对数学很感兴趣,但是在学校里数学成绩却很糟糕,这个恐怕你应该承认,自己实际上还没能表现出这方面的能力.如果课本中的数学题目都不会做,或做起来很费劲,那恐怕这本书中的题目就更难看得懂了.也就是说,至少你已很熟练地掌握了数学课本中的内容(倒不一定表现在每次数学考试都能得100分),在学校里数学成绩还不错,课本里的题目做起来很轻松,那才可以考虑钻研一下这本书中的题目.

如果你对数学有兴趣,有感觉也有能力,那么我认为你是可以看这本书的,并且一辈子都会感到这是一本有价值的书.

现在我从这本书中抽出10个问题(题目后面第一个括号中的内容是这道题在本书中的章号和题号,第二个括号中注明了理解这道题目的解答所需要的文化程度),如果你对这些问题没有一点兴趣,那就不要看了.如果发现自己至少对一两个问题感兴趣,并且有想知道答案的欲望,那我建议你赶紧把这本书买下,只要能看懂一部分就可买下,其余不懂的部分买回去后慢慢看,我说过这本书是够你琢磨一辈子的,是可以终身陪伴你的一本书.老实说,如果一本书中的东西你都知道,都看得懂,那就没必要再看了,就是要有一些你一开始看不懂,看了后才懂,这本书才对你有价值.

1.用一个简单的法则来描述数列

$$1221121221221121122121121221121121221221 1\cdots$$

的构成规律,它的第 n 项是什么,这个数列是否是周期的?(1—3)(初中)

2.证明:$\sqrt{5}+\sqrt{22+2\sqrt{5}}=\sqrt{11+2\sqrt{29}}+\sqrt{16-2\sqrt{29}+2\sqrt{55-10\sqrt{29}}}$.(1—26)(初中)

3.在等腰$\triangle ABC$中,$AB=AC$.顶角$\angle A=20^\circ$,在AB边上取一点D,使$AD=BC$.求$\angle BDC$的度数.(2—1)(初中)

4.(1)证明:不可能存在一个连续的保距映射f,把球面上所有的点都映射到平面中去(即不可能把球面整体地展开成平面的一部分).(2—44(1))(初中)

5.设$x_1,x_2,\cdots,x_{48}$是$x^{49}=1$的不等于1的根,且

$$N=(1+x_1+x_1^4)(1+x_2+x_2^4)\cdots(1+x_{48}+x_{48}^4)$$

问是否可能成立$N=83^3$?(3—42)(高中)

6.由计算可知$\csc\frac{3\pi}{29}-\csc\frac{10\pi}{29}=1.999\ 989\ 433\cdots$,证明:不可能存在正整数$j,k$和正奇数$n$,使得$\csc\frac{j\pi}{n}-\csc\frac{k\pi}{n}=2$.(3—43)(高中、大学)

7.证明:对所有$n\geqslant 0$,成立

$$\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right]=\left[\sqrt{9n+8}\right]$$

(4—35)(高中)

8.设$a_0=4,a_1=a_2=0,a_3=3,a_{n+4}=a_{n+1}+a_n$,证明:如果$p$是一个素数,则$p\mid a_p$.(4—67)(高中、大学)

9.设$0<x_0<\pi,x_{n+1}=\sin x_n$,证明:当$n\to\infty$时,$\sqrt{n}x_n\to\sqrt{3}$.(5—66)(大学)

10.(1)设$1\leqslant a_1<a_2<\cdots$是严格递增的正整数,证明:如果存在整数$r\geqslant 0$使得级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^r}{a_k}$$

发散,则$\xi=0.(a_1)(a_2)(a_3)\cdots$是一个无理数.

(2)设$2,3,5,7,\cdots$是所有的素数组成的数列,证明:$\xi=0.235\ 7\cdots$是无理数.

(3)设$1,4,9,16,25,\cdots$是所有的完全平方数组成的数列,证明:$\xi=0.149\ 162\ 5\cdots$是无理数.(5—167)

有意思的题目还有很多,但限于篇幅,有些就只好割爱了.上面这些题目,很多都和一些历史上著名的问题或数学中重要的问题有联系.比如第2题是一个很著名的等式,称为山克斯(Thanks)等式,《美国数学月刊》曾刊登过一篇书评,在此书评中,评论者特意介绍了这

一等式，并且说明，这一等式可以从伽罗瓦(Galois)理论得出.再比如第4题，来源于历史上的地图理论，现在很多数学爱好者都知道无论你怎么制图，都不可能把球面完全不失真地画在平面上，更确切一点说，不管你用什么方法在平面上制成一幅球面的地图，都不可能使地图上任意两点之间的距离恰好等于这两点所对应的球面上的两点之间的原来的真实距离.第6题完全是由研究工作中真实的计算所引出的一个问题.第8题也是和数论中很有名的课题素性判断有关联的问题，所谓素性判断就是给出一个法则以决定一个给定的数字是否是一个素数.这也是一个很有新闻价值的问题.报纸杂志上每隔一段时间就会出现又发现至今以来最大的素数的报导.这些数一般都是一种称为梅森素数的数.判断这种数是否是一个素数，就要用到一个叫作卢卡斯—莱赫默(Lucas-Lehmer)判据的定理以及依靠计算机强大的计算能力.第9题也是数学分析中一个很基础，也很重要的问题，那就是弄清一个无穷小量的阶，数学历史上很多有名的结果其实就是给出了一个无穷小量的阶或阶的估计.这道题如果改成求数列$\{x_n\}$的极限那就容易多了，是大学数学分析课中常见的一道习题.恐怕中学生也可以做，但是可能要难一些，需要知道极限存在的魏尔斯特拉斯(Weierstrass)判据.不难得知这个极限就是零.但是第9题的形式就更难一些了.它实际上等价于要证明$x_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$，也就是$x_n$和$\sqrt{\frac{3}{n}}$等价的无穷小，这一结果当然蕴含$\{x_n\}$的极限是零，所以是比后者更强的结果，那肯定也应该是难度更大的结果.如果粗略一点来说，也可以说成是x_n是$\sqrt{\frac{1}{n}}$级的无穷小，或者写成$x_n = o\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right)$，也就是不管其中的常数了.关键是你一精确化，就会出来个$\sqrt{3}$的常数，这个常数是怎么和$\sin x_n$联系起来的，好像一开始根本看不出来，这就有点意思了，你要解释为什么这个常数恰好是$\sqrt{3}$，恐怕就要知道$\sin x$的泰勒(Taylor)展开式，所以就这么一个简单的大学生的数学分析习题，你一深入研究，就可以挖掘出一些越来越深入的问题.最后一个问题，第10题也是和数学中很重要的一个问题有关的结果，这个问题就是要判断一个给定的实数是否是无理数，这个问题也不是那么容易的，现在还仍有人不断给出这方面的结果，另外有些著名的常数例如欧拉(Euler)常数至今仍不能得知是否是无理数.这道题本身就是这方面的一个结果，虽然它很初等，但是又很有用，其中的(2)(3)部分就是应用，这两个结果你要不用这个结果得出来，恐怕也不是很容易.

这些题目虽然大多和一些历史上著名的问题或数学中重要的问题有联系，但是选它们的着眼点却并不仅在此，如果只追求有名，那也有不少问题，例如黎曼假设、哥德巴赫问题、四色定理等.但是讲这些问题，恐怕就只能比较虚，要是实打实地讲，一是没有多少人能看得懂，二是即使讲了一大堆难而又难的东西，最后仍只能是一个未知数.而这里选的问题让人感兴趣之处就在于它是可以雅俗共赏的，而且有的问题之解答，给人以出奇制胜之感，绝对是你根本想不到的.下面举几个例子：

第1个例子是第2题，也就是我上面提到过的那个山克斯等式，按照刚才说过的那个书评，说是要用伽罗瓦理论才能得出来，这就有点吓人，这个伽罗瓦理论也是有一点名气的，它可以用来解决一个代数方程的根是否可用根式表出，不少人可能也从科普书中听说过，但是具体如何实行和真正进行计算，恐怕懂得的人就不多了.但是这么一个初等的等式居然要用这么高深的理论才能得出，我总有点不太相信.后来和几个朋友研究了一下，发现只要你有

足够的耐心，细心计算一下也是可以得出来的.下面是一种证明方法，这个证法虽然不是最简单，但却是正常思维可以自然想到的.其思路是设

$$\alpha=\sqrt{5}+\sqrt{22+2\sqrt{5}}$$

$$\beta=\sqrt{11+2\sqrt{29}}+\sqrt{16-2\sqrt{29}+2\sqrt{55-10\sqrt{29}}}$$

然后：

(1) 通过估计首先得出 α 和 β 的范围，具体一点就是说明 $\alpha>7,\beta>7$.

(2) 证明：α 和 β 满足一个同样的代数方程 $f(x)=0$.

(3) 证明：$f(x)=0$ 只有唯一的一个根符合 $x>7$ 的条件.

由此显然即可得出 $\alpha=\beta$ 的结论.这里最困难和吓人的一步是(2)，因为为了要得出 α 和 β 所满足的代数方程，尤其是所满足的方程，你必须多次的平方，而搞得不好，那个根号还是去不掉.不过等你真的去算一下，你就会发现其中有两步恰好可以消掉好些东西，所以并没有当初想的那么可怕.下面是详细的证明：

(1) 我们有

$$\alpha=\sqrt{5}+\sqrt{22+2\sqrt{5}}>\sqrt{4}+\sqrt{22+3}=2+5=7$$

又从 $2\sqrt{55-10\sqrt{29}}>1$ 以及 $10<2\sqrt{29}<11$，可以得出

$$\beta=\sqrt{11+2\sqrt{29}}+\sqrt{16-2\sqrt{29}+2\sqrt{55-10\sqrt{29}}}>$$

$$\sqrt{11+10}+\sqrt{5+1}=\sqrt{21}+\sqrt{6}>7$$

(2) $$\beta^2=11+2\sqrt{29}+16-2\sqrt{29}+2\sqrt{55-10\sqrt{29}}+$$

$$2\sqrt{(11+2\sqrt{29})(16-2\sqrt{29}+2\sqrt{55-10\sqrt{29}})}$$

所以

$$\beta^2-27-2\sqrt{55-10\sqrt{27}}=2\sqrt{60+10\sqrt{29}+2(11+2\sqrt{29})\sqrt{55-10\sqrt{29}}}$$

$$(\beta^2-27)^2-4(\beta^2-27)\sqrt{55-10\sqrt{29}}+4(55-10\sqrt{29})=$$

$$4(60+10\sqrt{29}+2(11+2\sqrt{29})\sqrt{55-10\sqrt{29}})$$

$$(\beta^2-27)^2-20-4(\beta^2-27)\sqrt{55-10\sqrt{29}}=$$

$$80\sqrt{29}+8(11+2\sqrt{29})\sqrt{55-10\sqrt{29}}$$

$$(\beta^4-54\beta^2+709)-80\sqrt{29}=4(\beta^2-5+4\sqrt{29})\sqrt{55-10\sqrt{29}}$$

$$(\beta^4-54\beta^2+709)^2-160(\beta^4-54\beta^2+709)\sqrt{29}+185\ 600=$$

$$16(\beta^2-5+4\sqrt{29})^2(55-10\sqrt{29})=$$

$$16(55\beta^4-2\ 870\beta^2+38\ 495)-160(\beta^4-54\beta^2+709)\sqrt{29}$$

算到这，你可以发现，式子里的根号已经可以消去了，因此，原则上，我们已经算是求出了 β 所满足的整系数代数方程，剩下的事只不过是化简一下，其实，我们甚至都不用再化简，只须知道 β 所满足的是一个8次方程就够了，但这是后话.第一次算时，还是老老实实算一下

$$((\beta^4-54\beta^2+269)+440)^2+185\ 600=16(55\beta^4-2\ 870\beta^2+38\ 495)$$

$$(\beta^4-54\beta^2+269)^2+880(\beta^4-54\beta^2+269)+440^2+185\,600=$$
$$880\beta^4-45\,920\beta^2+615\,920$$

算到这，你又可以发现，我们现在又可以消去好些东西

$$(\beta^4-54\beta^2+269)^2-1\,600\beta^2=0$$

由此就可以得出 β 满足一个整系数代数方程 $f(x)=0$，其中

$$f(x)=f_1(x)f_2(x)$$
$$f_1(x)=x^4-54x^2-40x+269$$
$$f_2(x)=x^4-54x^2+40x+269$$

同时易证 α 满足整系数代数方程 $f_1(x)=0$，当然也是 $f(x)=0$ 的根.

(3) 由

$$f_1(-7)=304, f_1(-6)=-139$$
$$f_1(-3)=-16, f_1(-2)=149$$
$$f_1(1)=176, f_1(2)=-11$$
$$f_1(7)=-256, f_1(8)=587$$

可知 $f_1(x)$ 共有 4 个根 $-7<x_1<-6, -3<x_2<-2, 1<x_3<2, 7<x_4<8$. 易证 $-x_1$, $-x_2$, $-x_3$, $-x_4$ 是 $f_2(x)$ 的根，而

$$-8<-x_4<-7, -2<-x_3<-1, 2<-x_2<3, 6<-x_1<7$$

由于 $f(x)$ 是一个 8 次方程，因此上述这 8 个根就是 $f(x)$ 的所有的根，因而其符合条件 $x>7$ 的根是唯一的.

由(1)(2)(3)三点就可得出 $\alpha=\beta=x_4$.

因此现在我们已经知道，要证明这个山克斯等式，是根本不需要用到伽罗瓦理论的(但是或许伽罗瓦理论是发现这一等式的一个来源). 但是你可能根本想不到，后来《美国数学月刊》又发表了一篇文章，内容是要证明这个等式，还有更简单的方法，只需用到最简单的乘法公式和

仅仅四行式子

就可证明. 答案就在这本书中. 当然，答案一经揭晓，也就不稀奇了，但是，在你知道答案并且感到不稀奇之后，是否想过在知道答案之前检验一下自己是否有这个眼力？这是比马后炮似的不稀奇更值得深思的问题.

第 2 个例子是上面的第 3 题(这道题并不是从《美国数学月刊》上选出的，是我弟弟问我的一个问题，但是我觉得这道题也很有意思，所以也把它收入了)，这绝对不能算是一道难题，凡是学过解三角形的人肯定都能把它鼓捣出来，不信你可以拿这个问题去问理工科大学生或中学的数学老师，以及数学物理方面的科研工作者，都应该能做出来的，而且解法不止一种. 下面是一种解法，当然用这种解法你需要熟练地记忆和运用各种三角公式，例如倍角公式、积化和差、和差化积公式等.

设 $BC=a, AB=AC=b, \angle BDC=\theta$，那么在 $\triangle ABC$ 中由正弦公式就有

$$\frac{a}{\sin 20^\circ}=\frac{b}{\sin 80^\circ}$$

因此有

$$b=\frac{\sin 80^\circ}{\sin 20^\circ}a$$

而
$$BD=b-a=\left(\frac{\sin 80^\circ}{\sin 20^\circ}-1\right)a=\left(\frac{\sin(20^\circ+60^\circ)}{\sin 20^\circ}-1\right)a=$$
$$\frac{\sin(60^\circ-20^\circ)}{\sin 20^\circ}a=\frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}a=2a\cos 20^\circ$$
在 $\triangle BCD$ 中，再由余弦公式可得
$$CD^2=BD^2+BC^2-2BD\cdot BC\cos 80^\circ=(4\cos^2 20^\circ+1-4\cos 20^\circ\cos 80^\circ)a^2=$$
$$(2(1+\cos 40^\circ)+1-2(\cos 100^\circ+\cos 60^\circ))a^2=$$
$$(2+2(\cos 40^\circ+\cos 80^\circ))a^2=(2+4\cos 20^\circ\cos 60^\circ)a^2=$$
$$2(1+\cos 20^\circ)a^2=4a^2\cos^2 10^\circ=4a^2\sin^2 80^\circ$$
因此
$$CD=2a\sin 80^\circ$$
在 $\triangle BCD$ 中，再由正弦公式可得
$$\frac{a}{\sin\theta}=\frac{CD}{\sin 80^\circ}=\frac{2a\sin 80^\circ}{\sin 80^\circ}=2a$$
这就得出 $\sin\theta=\frac{1}{2}$，而 $\angle BDC=\theta=30^\circ$.

但是我告诉你，解这道题其实根本不必用到什么正弦公式、余弦公式以及各种各样的三角公式，而只需用到初中课程中所学到的最基本的三角知识即可. 不知你相信不相信，你自己可以先试一试，在本书中有这个答案. 不过虽然这个答案的确是非常简单的，但是我认为上面给出的解答仍旧是有价值的，因为它有一般性，可以适用于 $\triangle ABC$ 的顶角不是 20°，而是任意角 α 的一般情况.

说到这，我想插一句题外话. 就是一旦你知道了这个答案是 30°，那这个问题就可能变得容易了，因为知道了最终的答案和不知道这个答案是大不一样的，对于知道了答案的人，他的主要精力就不用放在探索最后的解答是什么形式这方面了，而是放在往那个答案上凑，而且这个凑不是瞎凑，是有目标的. 这就好多了，这也是科研工作和做习题的最重要的差别. 有些习题也可以很难，但是再难，它也是一个已经解决了的问题，而科研工作的特点是你事先无法知道这个问题是否能解决，这里的风险是如果你企图解决一个错误的猜想，那可能你耗费了无数心血之后，发现自己是在白干. 也正因为这个原因，科研人员在自己的成果正式公布之前，一般是不愿意透漏给同行知道的，因为在得知了你的成果之后，其他的人就也可能做出来而抢先发表这一成果.

第 3 个例子是第 4 题，上面已经说过有不少数学爱好者都知道不可能把球面完全不失真地画在平面上这个事情，但是大多数人只是限于知道而已，却并不知道如何证明这一点，而且在很多人的心目中，要理解这件事情是需要用到例如微分几何那样比较高深的数学知识的，其实完全不是这样，看了本书之后你就会知道，要理解这件事情，只需用到最简单的初中几何知识就已足矣. 这里选的只是书中题目的第一问，第二问是要证明即使是球面上的任意一个小的区域也不可能完全不失真地画在平面上. 这就比第一问更难一些，但是要证明这件事情，也仅需要用到大学一年级的微积分学知识.

最后，我想提醒读者注意一下第 5 题，这道题原来的解答在我看来都是不能令人满意的，不是不够严格就是太过高深，目前的这个解答是我根据原解答中一个未给出证明的命题，请我的好友王国义先生给出的，这个解答我认为既足够巧妙又不难理解，其中最关键的一步是设