INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIADS

IMO 50年

2005～2009

第10卷

主　编　佩　捷

副主编　冯贝叶

多解　推广　加强

$\sum_{1}^{5} kx_k = a$

$\sum_{1}^{5} k^3 x_k = a^2$

$\sum_{1}^{5} k^5 x_k = a^3$

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIADS

IMO 50年

第10卷

2005～2009

● 佩捷 主编

多解 推广 加强

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书汇集了第46届至第50届国际数学奥林匹克竞赛试题及解答.该书广泛搜集了每道试题的多种解法,且注重初等数学与高等数学的联系,更有出自数学名家之手的推广与加强.本书可归结出以下四个特点,即收集全、解法多、观点高、结论强.

本书适合于数学奥林匹克竞赛选手和教练员、高等院校相关专业研究人员及数学爱好者使用.

图书在版编目(CIP)数据

IMO 50年.第10卷,2005～2009/佩捷主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2016.1

ISBN 978－7－5603－5780－5

Ⅰ.①I… Ⅱ.①佩… Ⅲ.①中学数学课－题解 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第003390号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 穆 青
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传 真 0451－86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张21.25 字数514千字
版 次 2016年1月第1版 2016年1月第1次印刷
书 号 ISBN 978－7－5603－5780－5
定 价 48.00元

前言 | Foreword

法国教师于盖特·昂雅勒朗·普拉内斯在与法国科学家、教育家阿尔贝·雅卡尔的交谈中表明了这样一种观点："若一个人不'精通数学'，他就比别人笨吗？"

"数学是最容易理解的. 除非有严重的精神疾病，不然的话，大家都应该是'精通数学'的. 可是，由于大概只有心理学家才可能解释清楚的原因，某些年轻人认定自己数学不行. 我认为其中主要的责任在于教授数学的方式."

"我们自然不可能对任何东西都感兴趣，但数学更是一种思维的锻炼，不进行这项锻炼是很可惜的. 不过，对诗歌或哲学，我们似乎也可以说同样的话."

"不管怎样，根据学生数学上的能力来选拔'优等生'的不当做法对数学这门学科的教授是非常有害的."（阿尔贝·雅卡尔、于盖特·昂雅勒朗·普拉内斯.《献给非哲学家的小哲学》. 周冉，译. 广西师范大学出版社，2001：96）

这本题集不是为老师选拔"优等生"而准备的，而是为那些对 IMO 感兴趣，对近年来中国数学工作者在 IMO 研究中所取得的成果感兴趣的读者准备的资料库. 展示原味真题，提供海量解法（最多一题提供 20 余种不同解法，如第 3 届 IMO 第 2 题），给出加强形式，尽显推广空间，是我国建国以来有关 IMO 试题方面规模最大、收集最全的一本题集. 从现在看，以"观止"称之并不为过.

前中国国家射击队的总教练张恒是用“系统论”研究射击训练的专家，他曾说：“世界上的很多新东西，其实不是‘全新’的，就像美国的航天飞机，总共用了 2 万个已有的专利技术，真正的创造是它在总体设计上的新意.”(胡廷楣.《境界——关于围棋文化的思考》.上海人民出版社，1999:463)本书的编写又何尝不是如此呢，将近 100 位专家学者给出的多种不同解答放到一起也是一种创造.

如果说这部题集可比作一条美丽的珍珠项链的话，那么编者所做的不过是将那些藏于深海的珍珠打捞起来并穿附在一条红线之上，形式归于红线，价值归于珍珠.

首先要感谢江仁俊先生，他可能是国内最早编写国际数学奥林匹克题解的先行者(1979 年，笔者初中毕业，同学姜三勇(现为哈工大教授)作为临别纪念送给笔者的一本书就是江仁俊先生编的《国际中学生数学竞赛题解》(定价仅 0.29 元)，并用当时叶剑英元帅的诗词做赠言：“科学有险阻，苦战能过关.”27 年过去仍记忆犹新). 所以特引用了江先生的一些解法. 江苏师范学院(今年刚刚去世的华东师范大学的肖刚教授曾在该校外语专业就读过)是我国最早介入 IMO 的高校之一，毛振璇、唐起汉、唐复苏三位老先生亲自主持从德文及俄文翻译 1～20 届题解. 令人惊奇的是，我们发现当时的插图绘制者居然是我国的微分动力学专家“文化大革命”后北大的第一位博士张筑生教授，可惜天妒英才，张筑生教授英年早逝，令人扼腕(山东大学的杜锡录教授同样令人惋惜，他也是当年数学奥林匹克研究的主力之一). 本书的插图中有几幅就是出自张筑生教授之手[22]. 另外中国科技大学是那时数学奥林匹克研究的重镇，可以说 20 世纪 80 年代初中国科技大学之于现代数学竞赛的研究就像哥廷根 20 世纪初之于现代数学的研究. 常庚哲教授、单墫教授、苏淳教授、李尚志教授、余红兵教授、严镇军教授当年都是数学奥林匹克研究领域的旗帜性人物. 本书中许多好的解法均出自他们[4,13,19,20,50]. 目前许多题解中给出的解法中规中矩，语言四平八稳，大有八股遗风，仿佛出自机器一般，而这几位专家的解答各有特色，颇具个性. 记得早些年笔者看过一篇报道说常庚哲先生当年去南京特招单墫与李克正去中国科技大学读研究生，考试时由于单墫基础扎实，毕业后一直在南京女子中学任教，所以按部就班，从前往后答，而李克正当时是南京市的一名工人，自学成才，答题是从后往前答，先答最难的一题，风格迥然不同，所给出的奥数题解也是个性化十足. 另外，现在流行的IMO题

解，历经多人之手已变成了雕刻后的最佳形式，用于展示很好，但用于教学或自学却不适合.有许多学生问这么巧妙的技巧是怎么想到的，我怎么想不到，容易产生挫败感，就像数学史家评价高斯一样，说他每次都是将脚手架拆去之后再将他建筑的宏伟大厦展示给其他人.使人觉得突兀，景仰之后，备受挫折.高斯这种追求完美的做法大大延误了数学的发展，使人们很难跟上他的脚步，这一点从潘承彪教授、沈永欢教授合译的《算术探讨》中可见一斑.所以我们提倡，讲思路，讲想法，表现思考过程，甚至绕点弯子，都是好的，因为它自然，贴近读者.

中国数学竞赛活动的开展、普及与中国革命的农村包围城市，星星之火可以燎原的方式迥然不同，是先在中心城市取得成功后再向全国蔓延.而这种方式全赖强势人物推进，从华罗庚先生到王寿仁先生再到裘宗沪先生，以他们的威望与影响振臂一呼，应者云集，数学奥林匹克在中国终成燎原之势.他们主持编写的参考书在业内被奉为圭臬，我们必须以此为标准，所以引用会时有发生，在此表示感谢.

中国数学奥林匹克能在世界上有今天的地位，各大学的名家们起了重要的理论支持作用.北京大学的王杰教授、复旦大学的舒五昌教授、首都师范大学的梅向明教授、华东师范大学的熊斌教授、中国科学院的许以超研究员、南开大学的李成章教授、合肥工业大学的苏化明教授、杭州师范学院的赵小云教授、陕西师范大学的罗增儒教授等，他们的文章所表现的高瞻周览、探赜索隐的识力，已达到炉火纯青的地步，堪称为中国 IMO 研究的标志.如果说多样性是生物赖以生存的法则，那么百花齐放，则是数学竞赛赖以发展的基础.我们既希望看到像格罗登迪克那样为解决一批具体问题而建造大型联合机械式的宏大构思型解法，也盼望有像爱尔特希那样运用最少的工具以娴熟的技能做庖丁解牛式剖析型解法出现.为此本书广为引证，也向各位提供原创解法的专家学者致以谢意.

编者为图“文无遗珠”的效果，大量参考了多家书刊杂志中发表的解法，也向他们表示谢意.

特别要感谢湖南理工大学的周持中教授、长沙铁道学院的肖果能教授、广州大学的吴伟朝教授以及顾可敬先生.他们四位的长篇推广文章读之，使笔者不能不三叹而三致意，收入本书使之增色不少.

最后要说的是由于编者先天不备，后天不足，斗胆尝试，徒见笑于方家.

哲学家休谟在写自传的时候,曾有一句话讲得颇好:"一个人写自己的生平时,如果说得太多,总是免不了虚荣的."这句话同样也适合于本书的前言,写多了难免自夸,就此打住是明智之举.

刘培杰

2014 年 10 月

目录 Contest

附录 IMO 背景介绍

参考文献

后记

第一编 第46届国际数学奥林匹克

第 46 届国际数学奥林匹克题解

墨西哥,2005

1 在正 $\triangle ABC$ 的三边上依下列方式选取 6 个点:在边 BC 上选点 A_1,A_2,在边 CA 上选点 B_1,B_2,在边 AB 上选点 C_1,C_2,使得凸六边形 $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ 的边长都相等.证明:直线 A_1B_2,B_1C_2,C_1A_2 共点.

罗马尼亚命题

证法 1 如图 46.1 所示,记

$$A_1A_2=d,AB=a$$

另作一个边长为 $a-d$ 的正 $\triangle A_0B_0C_0$(图 46.2),分别在边 B_0C_0,C_0A_0,A_0B_0 上取点 A',B',C',使得

$$A'C_0=A_2C,B'A_0=B_2A,C'B_0=C_2B$$

则

$$A'B_0=a-d-A'C_0=BC-A_1A_2-A_2C=BA_1$$

同理可得

$$B'C_0=B_1C,C'A_0=C_1A$$

结合

$$\angle B_1CA_2=\angle B'C_0A',\angle B_2AC_1=\angle B'A_0C',\angle C_2BA_1=\angle C'B_0A'$$

知

$$\triangle CB_1A_2\cong\triangle C_0B'A'$$
$$\triangle AC_1B_2\cong\triangle A_0C'B'$$
$$\triangle BA_1C_2\cong\triangle B_0A'C'$$

所以

$$B'C'=C'A'=A'B'=d$$

故 $\triangle A'B'C'$ 是正三角形,所以

$$\angle A'C'B'=\angle C'B'A'=\angle A'B'C'=60^\circ$$

$$\angle AB_2C_1=\angle A_0B'C'=180^\circ-\angle C'B'A'-\angle A'B'C_0=120^\circ-\angle A'B'C_0$$

所以

$$\angle C_1B_2B_1=\angle B_1A_2A_1$$

结合

此证法属于刁晗生

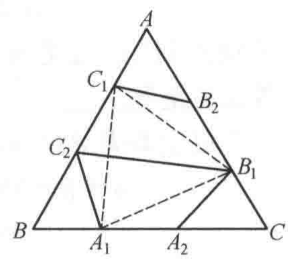

图 46.1

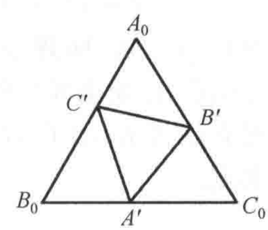

图 46.2

$$B_2C_1 = B_1B_2 = A_2B_1 = A_1A_2 = d$$

知

$$\triangle C_1B_2B_1 \cong \triangle B_1A_2A_1$$

所以

$$B_1C_1 = A_1B_1$$

又

$$C_1C_2 = A_1C_2$$

于是 C_2B_1 是 A_1C_1 的垂直平分线，所以 C_2B_1 是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的边 A_1C_1 上的高. 同理，C_1A_2，A_1B_2 分别是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的边 A_1B_1，B_1C_1 上的高，故 A_1B_2，B_1C_2，C_1A_2 共点.

证法 2 如图 46.3 所示，在正 $\triangle ABC$ 内取一点 P，使 $\triangle A_1PA_2$ 是等边三角形. 注意到

$$A_1P \parallel C_1C_2$$

$$A_1P = A_1A_2 = C_1C_2 = A_1C_2$$

可知 $A_1PC_1C_2$ 是菱形. 同理 $A_2PB_2B_1$ 也是菱形，从而 $\triangle C_1PB_2$ 是等边三角形.

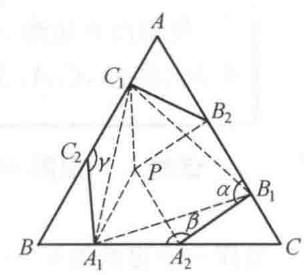

图 46.3

记 $\angle B_2B_1A_2 = \alpha$，$\angle B_1A_2A_1 = \beta$，$\angle C_1C_2A_1 = \gamma$，则

$$\alpha + \beta = 360^\circ - (\angle CB_1A_2 + \angle B_1A_2C) =$$
$$360^\circ - (180^\circ - \angle C) =$$
$$180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$$

又 $\gamma = \angle C_1PA_1$，$\alpha = \angle B_2PA_2$，于是

$$\gamma + \alpha = 360^\circ - (\angle C_1PB_2 + \angle A_1PA_2) = 240^\circ$$

所以 $\beta = \gamma$. 同理 $\angle C_1B_2B_1 = \beta$. 从而 $\triangle A_1A_2B_1$，$\triangle B_1B_2C_1$，$\triangle C_1C_2A_1$ 是全等三角形，于是 $\triangle A_1B_1C_1$ 是等边三角形. 这样易见直线 A_1B_2，B_1C_2，C_1A_2 是 $\triangle A_1B_1C_1$ 三边的中垂线，从而三线共点.

题目的来源.

问题 1 正 $\triangle ABC$ 与 $A'B'C'$ 均内接于圆 O，两个三角形的三边分别顺序相交于六个点 A_1，$A_2(\in BC)$，B_1，$B_2(\in CA)$，C_1，$C_2(\in AB)$. 求证：三条直线 A_1B_2，B_1C_2，C_1A_2 交于一点 U.

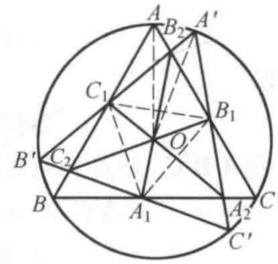

图 46.4

证明 如图 46.4，联结诸线段. 因

$$OA = OA'$$

故

$$\angle OAA' = \angle OA'A$$

又因

$$\angle OAB_2 = \angle OA'B_2 = 30^\circ, \angle B_2AA' = \angle B_2A'A, AB_2 = A'B_2$$

又因

$$\angle C_1AB_2=\angle B_1A'B_2=60°,\angle AB_2C_1=\angle A'B_2B_1$$

故

$$\triangle AB_2C_1\cong\triangle A'B_2B_1$$

同理可得

$$\triangle A'B_2B_1\cong\triangle CA_2B_1\cong\triangle C'A_2A_1\cong\triangle BC_2A_1\cong\triangle B'C_2C_1$$

从而

$$A_1A_2=A_2B_1=B_1B_2=B_2C_1=C_1C_2=C_2A_1$$

(以下证明同原题证明,从略).

事实上,图 46.4 中的六边形 $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ 正是“六边长相等的凸六边形”,完全符合原题的条件,再结合原题证明过程不难得出:题 1 与原题本质是相同的.

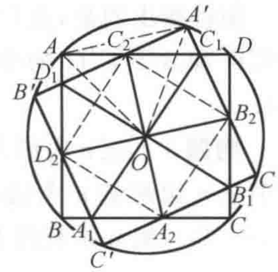

图 46.5

题目的推广.

问题 2 正方形 $ABCD$ 与 $A'B'C'D'$ 均内接于圆 O,两个正方形的四边分别顺序相交于八个点 $A_1,A_2(\in BC),B_1,B_2(\in CD)$, $C_1,C_2(\in DA),D_1,D_2(\in AB)$. 求证:四条直线 A_1C_1,B_1D_1, A_2C_2,B_2D_2 交于一点 U.

证明 如图 46.5,联结诸线段. $OA=OA'$,故

$$\angle OAA'=\angle OA'A$$

又因

$$\angle OAC_2=\angle OA'C_2=45°$$

故

$$\angle C_2AA'=\angle C_2A'A,AC_2=A'C_2$$

又

$$\angle D_1AC_2=\angle C_1A'C_2=90°,\angle AC_2D_1=\angle A'C_2C_1$$

故

$$\triangle AC_2D_1\cong\triangle A'C_2C_1$$

同理可得

$$\triangle A'C_2C_1\cong\triangle DB_2C_1\cong D'B_2B_1\cong\triangle CA_2B_1\cong$$
$$\triangle C'A_2A_1\cong\triangle BD_2A_1\cong\triangle B'D_2D_1$$

故

$$A_1A_2=A_2B_1=B_1C_1=C_1C_2-C_2D_1=D_1D_2=D_2A_1$$

还易得四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是正方形,而

$$C_2D_1=C_2C_1,A_2A_1=A_2B_1$$

故 A_2C_2 是正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的一条对称轴. 同理 B_2D_2 也是正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的一条对称轴,而对角线 A_1C_1,B_1D_1 显然也是正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的对称轴. 故此正方形的四条对称轴 A_1C_1,B_1D_1, A_2C_2,B_2D_2 必交于一点.

值得指出的是,点 U 恰是四个正方形 $A_1B_1C_1D_1$,$A_2B_2C_2D_2$,$ABCD$ 和 $A'B'C'D$ 的中心. 还可以推广到正 n 边形的情形(证略).

问题 3　正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 和 $A'_1A'_2\cdots A'_n$ 均内接于圆 O,两个正 n 边形的 n 条边分别相交,顺次得到的 $2n$ 个交点是 B_1,B_2,$\cdots$,B_{2n},则 n 条直线 B_1B_{n+1},B_2B_{n+2},$\cdots$,B_nB_{2n} 必交于一点 U.

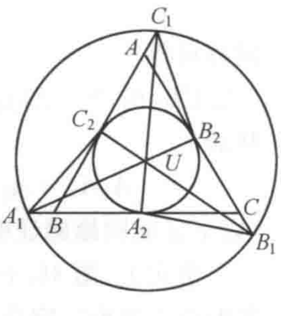

图 46.6

注　(1) 本题条件可以放宽为"在正△ABC 的三边所在直线上"选点,获得等边凸(凹)六边形 $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ 后,结论仍然成立(图 46.6).

(2) 显然,△$A_2B_2C_2$ 也是等边三角形,直线 A_2C_1,B_2A_1,C_2B_1 是△$A_2B_2C_2$ 三边的中垂线. 因此 U 也是△$A_2B_2C_2$ 的中心,△$A_1B_1C_1$ 与 △$A_2B_2C_2$ 的外接圆是同心圆,△$A_1B_1C_1$ 与△$A_2B_2C_2$ 为位似图形,U 为位似中心,位似比为两圆半径之比.

荷兰命题

2 设 a_1,a_2,$\cdots$ 是一个整数数列,其中既有无穷多项是正整数,又有无穷多项是负整数. 如果对每一个正整数 n,整数 a_1,a_2,$\cdots$,a_n 被 n 除后所得到的 n 个余数互不相同. 证明:每个整数恰好在数列 a_1,a_2,$\cdots$ 中出现一次.

此证法属于任庆春

证法 1　首先,每个整数在此数列中至多出现一次. 若某个整数 k 在此数列中至少出现两次,设

$$a_i=a_j=k\quad(i<j)$$

则在 a_1,a_2,$\cdots$,a_j 中存在两个数 a_i,a_j,它们被 j 除的余数相同,矛盾.

其次,设 a_1,a_2,$\cdots$,a_k 中最大的数为 x_k,最小的数为 $y_k(k=1,2,\cdots)$,则

$$x_k-y_k\leqslant k-1$$

若存在某个 k,使得

$$x_k-y_k\geqslant k$$

不妨设

$$a_i=x_k,a_j=y_k$$
$$a_j-a_i=l\geqslant k$$

则 $i,j\leqslant k\leqslant l$. 所以在 a_1,a_2,$\cdots$,a_l 中存在两个数 a_i,a_j,它们被 l 除的余数相同,矛盾.

下面证明:对每个满足

$$y_k\leqslant t\leqslant x_k$$

的整数 t,都存在正整数 s,$1\leqslant s\leqslant k$,使得 $a_s=t$. 若不然,则 a_1,

$a_2,\cdots,a_k$ 只能取 $\{u\in\mathbf{Z}\mid y_k\leqslant u\leqslant x_k$,且 $u\neq t\}$ 中的值,只有 x_k-y_k 个取值,而

$$x_k-y_k\leqslant k-1<k$$

故 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 中必有两个相同,这与前面已经证明的结论矛盾.

对于任一整数 m,因为数列中有无穷多个正整数,而不超过 $|m|$ 的正整数只有有限个,所以一定存在正整数 p,使得 $a_p>|m|$. 同理,也必存在正整数 q,使得

$$a_q<-|m|$$

设

$$r=\max\{p,q\}$$

则

$$x_r>|m|,y<-|m|$$

所以

$$y_r<m<x_r$$

由前面的结论,必存在正整数 s,使得 $a_s=m$,所以每个整数一定在数列中出现.

综上所述,每个整数恰好在数列中出现一次.

证法 2 首先,若 $i<j$,则 $a_i\neq a_j$. 这是因为,取 $n\geqslant j>i$,由于 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 被 n 除后所得到的 n 个余数互不相同,故 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互不相同,特别地,$a_i\neq a_j$.

其次,若 $i<j\leqslant n$,则

$$|a_i-a_j|\leqslant n-1$$

否则,假设

$$m=|a_i-a_j|\geqslant n$$

则 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 中有两个数(a_i 和 a_j)被 m 除后所得到的余数相同. 矛盾.

现在,对任意正整数 n,记

$$a_{i(n)}=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$$
$$a_{j(n)}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$$

由前证可知

$$i(n)<j(n)\leqslant n\Rightarrow a_{j(n)}-a_{i(n)}\leqslant n-1$$

又由于 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互不相同,故

$$a_{j(n)}-a_{i(n)}\geqslant n-1$$

所以

$$a_{j(n)}-a_{i(n)}=n-1$$

这表明集合 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 的元素是 n 个连续整数.

对任意整数 x,因为数列 $a_1,a_2,\cdots$ 中有无穷多项是正整数,也有无穷多项是负整数,且数列的项互不相同,所以必存在 i,j 使

得 $a_i < x < a_j$. 取 $n > \max\{i,j\}$，由于 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 包含了 a_i 和 a_j 之间的所有整数，当然也包含了 x. 这就证明了，每个整数恰好在数列 $a_1, a_2, \cdots$ 中出现一次.

注 可证明，如下构造的数列 $\{a_n\}$ 符合题意，即

$$a_n = \begin{cases} k, n = 2k \\ 1-k, n = 2k-1, k = 1,2,\cdots \end{cases}$$

易见数列 $\{a_n\}$ 为

$$0,1,-1,2,-2,3,-3,\cdots$$

不难证明对每一个正整数 n，整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 被 n 除后所得到的 n 个余数互不相同，且每个整数恰好在数列 $\{a_n\}$ 中出现一次.

3 正实数 x, y, z 满足 $xyz \geqslant 1$，证明

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geqslant 0$$

韩国命题

证法 1 我们只需证明

$$\sum \frac{x^5}{x^5 + y^2 + z^2} \geqslant 1 \geqslant \sum \frac{x^2}{x^5 + y^2 + z^2} \quad ①$$

此证法属于康嘉引

设

$$xyz = d^3 \geqslant 1$$

令

$$x = x_1 d, y = y_1 d, z = z_1 d$$

则

$$x_1 y_1 z_1 = 1$$

且

$$\sum \frac{x^5}{x^5 + y^2 + z^2} = \sum \frac{x_1^5 d^3}{x_1^5 d^3 + y_1^2 + z_1^2} = \sum \frac{x_1^5}{x_1^5 + \frac{1}{d^3}(y_1^2 + z_1^2)} \geqslant \sum \frac{x_1^5}{x_1^5 + y_1^2 + z_1^2}$$

$$\sum \frac{x^2}{x^5 + y^2 + z^2} = \sum \frac{x_1^2 d^2}{x_1^5 d^5 + y_1^2 d^2 + z_1^2 d^2} = \sum \frac{x_1^2}{x_1^5 d^3 + y_1^2 + z_1^2} \leqslant \sum \frac{x_1^2}{x_1^5 + y_1^2 + z_1^2}$$

所以，我们只需在 $xyz = 1$ 的情况下，证明式 ①.

因为