高點WIN錦囊2007最新版

★各校商管所、商管系複習衝刺必讀★

統計學 下

重·點·整·理

高點

程大器 編著

高點WIN錦囊 2007最新版

★ 各校商管所、商管系複習衝刺必讀 ★

統計學 (下)

重·點·整·理

高點

程大器 編著

《高點致勝叢書系列》
統計學（下）

編著者：程大器
出版者：高點文化事業有限公司
郵　撥：15834067高點文化事業有限公司
電　話：(02)2381-5766
傳　真：(02)2388-0876
網　址：www.get.com.tw
E-mail：publish@mail.get.com.tw

行政院新聞局出版事業登記證局版臺業字第4833號

建議售價450元

著作權所有・翻印必究

51MM022001　　ISBN 957-814-730-9

2006.07.01

自序

統計學在一般人心目中皆認為是一種較難研讀及瞭解之學科，因此在學習的心態上，皆以背誦公式為主。其實要學好統計學，必需先瞭解統計學之工具，它包含基本微積分、集合及機率理論等基礎觀念。所謂「工欲善其事，必先利其器」，因此同學要學好統計就必須先紮好根基，才能在考試時對統計學得心應手。

本書乃筆者依多年教學經驗所整理出之架構，課程內容及範題編排方式皆由淺到深方便讀者學習，由於本書是以考試為出發點，因此揉合了目前市場上較流行之商統、高統及簡單數統課本之內容去蕪存菁，故本書在內容設計上盡量廣且豐富，並皆以考題為導向，引導讀者練習各種類型題目，使同學在學習統計時有較快之捷徑。

本書共分上、下二冊，上冊主要是敘述統計及機率理論部分，此部分為學好統計學之根基，一般同學在學習上冊機率部分時，皆會有挫折感，因其牽涉到微積分的觀念，尤其是對於數學觀念不強的同學更顯吃力。由於在商科研究所統計學考題中機率理論部分占了三分之一，若此部分基礎不好，在考試時一定會吃虧。且坊間商統教科書中機率部分皆描述太少，因此本書特別加強了機率內容，且循序漸近引導同學慢慢由淺而深進入此領域而不再害怕。由於上冊為下冊之基礎，因此上冊所學的部分皆為下冊推導統計方法之工具，故同學在學習機率過程中，應先理解公式之推導再瞭解其觀念慢慢研讀，如此在研讀下冊時便能消除學習統計推論之恐懼。

下冊主要內容為推論統計學，它包含了統計方法之推導及應用，內容大致分為推論及應用，此部分之內容也是統計考試之精華，更是學習應用統計中 … 架構，因此

同學在研讀時，一定要瞭解各個公式的推導及應用。統計方法之推導絕對離不開上冊機率理論運用，因此同學必須先對機率部分熟練，如此才能快速的推導及瞭解統計方法。

筆者以多年教學經驗編寫此書，就是希望考生能在面對各校千變萬化的考題時，能得心應手，若能將此書熟練，應足以應付考試。

雖然筆者在編撰內容上力求完美，但若有謬誤或遺漏之處盼請見諒，尚請各方先進及讀者不吝賜教，若有問題可來函或e-mail至publish@mail.get.com.tw。最後，感謝高點出版同仁大力相助，使本書不論在編排及設計上別於一般教科書，皆能引人入勝，希望本書的寫作能帶給同學準備上的幫助，考上自己的理想學校，實踐夢想。

程大器

2006.06

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

書序　　高點研究所

一種從相信發展而來的關係

當你翻開這本書，開始體會高點的用心與誠懇，
你就已走進高點的大門，成為我們的朋友……
從這一刻起，我們的未來已經緊緊結合在一起。

不是對自己的未來深思熟慮的人，不會選擇報考研究所；同樣的，不是具備獨立思考判斷能力的人，不會選擇高點。因為“高點”的成立，不僅打破了補習班市場原本寡佔壟斷的局面，更在同業之間引起不小的震撼！我們扭轉了過去補習班「生產者導向」的觀念，由「消費者導向」的理念出發，提供這個市場一項完全嶄新的產品，從每一間教室桌椅的安排、燈光的規劃、空間及音效的設計，到每一套課程的排定、每一本書籍的編印，甚至字體大小、清楚的選擇，都是以「你的權益」為主要的考慮。我們最大的期望，便是這個市場中的消費者 —— 考生們，能夠擺脫過去受制、忍氣吞聲的狀況，真正找到一個可以托付未來、並肩作戰的伙伴。

所以，只要你稍作觀察，一定不難體會：高點的每一個細節，都只有一個目的 —— 讓你的努力發揮最大的效率。這套叢書，也是如此！！

●關於這套叢書

如何準備競爭激烈的研究所考試，每個人都有不同的意見，有人偏好考古題的歸納、整理，有人著重各科整體內容的研讀；高點以為，只有兼重理論基礎與實戰演練，才是最適當的方法，這套叢書從各科重要定理的整理說明，到近年重要考題的詳解以及未來命題趨勢的分析，鉅細靡遺，循序漸進的安排方式，讓你輕鬆著手，有系統地學習，我們相信，它會是你準備考試的最佳工具。

相信你是經過自己的判斷，才決定相信高點，
我們也歡迎你提醒你的好朋友，讓他們自己來親眼看看，親身體會，
然後，再自己決定要不要相信高點！

著作權／不容侵犯

下列文字爲著作權法之部分條文，仁人君子敬請自重，凡侵犯著作權者，必依法究辦。

《著作權法》第六章　權利侵害之救濟

■第八十七條

有下列情形之一者，除本法另有規定外，視爲侵害著作權或製版權：

一　以侵害著作人名譽之方法利用其著作者。
二　明知爲侵害製版權之物而散布或意圖散布而公開陳列或持有者。
三　輸入未經著作財產權人或製版權人授權重製之重製物或製版物者。
四　未經著作財產權人同意而輸入著作原件或其重製物者。
五　以侵害電腦程式著作財產權之重製物作爲營業之使用者。
六　明知爲侵害著作財產權之物而以移轉所有權或出租以外之方式散布者，或明知爲侵害著作財產權之物意圖散布而公開陳列或持有者。

《著作權法》第七章　罰　則

■第九十一條

擅自以重製之方法侵害他人之著作財產權者，處三年以下有期徒刑、拘役，或科或併科新臺幣七十五萬元以下罰金。

意圖銷售或出租而擅自以重製之方法侵害他人之著作財產權者，處六月以上五年以下有期徒刑，得併科新臺幣二十萬元以上二百萬元以下罰金。

以重製於光碟之方法犯前項之罪者，處六月以上五年以下有期徒刑，得併科新臺幣五十萬元以上五百萬元以下罰金。

著作僅供個人參考或合理使用者，不構成著作權侵害。

■第九十二條

擅自以公開口述、公開播送、公開上映、公開演出、公開傳輸、公開展示、改作、編輯、出租之方法侵害他人之著作財產權者，處三年以下有期徒刑、拘役，或科或併科新臺幣七十五萬元以下罰金。

CONTENTS

<下冊>

Chapter 8　點估計

Chapter 9　區間估計

Chapter 10　假設檢定

Chapter 14　無母數統計

Chapter 15　統計相關單元

附　錄

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

Chapter 8

點估計

8.1 估計之觀念

一、估計之意義

估計（estimation）又稱之爲推定，其意義是指利用樣本統計量去估計母體中未知的參數，其內容又區分爲點估計（point estimation）及區間估計（interval estimation）兩大類。在本章中，將先探討點估計部分，至於區間估計部分將在下一章探討，今先將其意義分述如下。

㈠**點估計：**

點估計之意義是依據母體抽出的一組樣本資料，求出某個樣本統計量之數值，然後利用此數值去估計母體中未知參數之方法。例如，以樣本比例 $\hat{P}$ 估計母體比例 p，或利用樣本平均數 $\bar{X}$ 估計母體平均數 μ，以樣本變異數 S^2 估計母體變異數 σ^2。

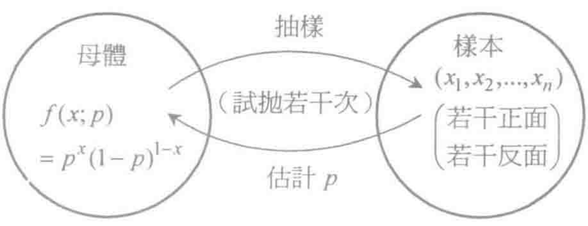

圖8-1 估計之觀念

㈡**區間估計：**

區間估計是依據一組樣本資料，求出兩個樣本統計量之數值，形成一

個區間，再利用此區間來說明此區間包含此未知母體參數的信心的估計方法。

二、估計式及估計值之意義

利用樣本統計量去估計母體中未知參數時，此樣本統計量即稱爲此參數θ之估計式或估計元（estimator），而當獲取一組樣本資料後計算出此估計式之數值即稱之爲估計值（estimate）。

定義1

設$\hat{\theta}(X_1, X_2, ..., X_n)$為一個統計量，若它被使用來估計某一未知參數$\theta$時，則$\hat{\theta}(X_1, X_2, ..., X_n)$即稱為參數$\theta$之點估計式，常以符號$\hat{\theta}$表示之。而當獲取一組實際樣本觀察值$(x_1, x_2, ..., x_n)$所計算出來之$\hat{\theta}(x_1, x_2, ..., x_n)$，稱為參數$\theta$之點估計值。

例如，以$\bar{X}$及S^2去估計μ及σ^2，則$\bar{X}$及S^2即爲參數μ及σ^2的點估計式，但當獲取一組樣本資料$(x_1, x_2, ..., x_n)$代入上式$\bar{X}$及S^2即可獲得二個確定數值$\bar{x}$及s^2，此兩數值$\bar{x}$及s^2即爲μ及σ^2的點估計值。

8.2 點估計式之評判標準

估計式$\hat{\theta}(X_1, ..., X_n)$用來估計未知參數$\theta$，但估計式（即樣本統計量）有很多不同形式，因此要如何評判點估計式之優劣，便是點估計的一個重要課題。一般常見之評判標準有下列幾種，即

㈠不偏性（unbiasedness）
㈡有效性（efficiency）
㈢一致性（consistency）
㈣充分性（sufficiency）

茲將各種評判準則之觀念分述如下。

一、不偏性

㈠不偏性觀念：

利用樣本資料 $(X_1, X_2, ..., X_n)$ 求取估計式 $\hat{\theta}$ 之值時，此估計值與被估計之參數 θ 會有某種程度上差異，有時高、有時低，因此若估計式的期望值能等於被估計之參數，則表示在做估計時較無偏頗之虞，亦即產生偏誤的可能性亦較小。

㈡不偏性之定義：

定義2

若統計量 $\hat{\theta}$ 為母體參數 θ 的一個估計式，且此估計式 $\hat{\theta}$ 的期望值等於參數 θ，即 $E(\hat{\theta}) = \theta$，則稱 $\hat{\theta}$ 為母體參數 θ 的不偏估計式（unbiased estimator）。但若 $E(\hat{\theta}) \neq \theta$，則稱 $\hat{\theta}$ 為參數 θ 之偏誤估計式（biased estimator），且其偏誤為 $E(\hat{\theta}) - \theta = Bias$。

Remark

1. 設 $\hat{\theta}$ 為參數 θ 之估計式，若 $E(\hat{\theta}) \neq \theta$，但

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = \theta$$

則稱 $\hat{\theta}$ 為參數 θ 之極限估計式（asymptotic estimator）。

2. 設 $\hat{\theta}(X_1, X_2, ..., X_n)$ 為參數 θ 之函數 $\pi(\theta)$ 之估計式，且

$$E\left(\hat{\theta}(X_1, X_2, ..., X_n)\right) = \pi(\theta)$$

則稱 $\hat{\theta}(X_1, X_2, ..., X_n)$ 為函數 $\pi(\theta)$ 之不偏估計式。

由定義2中可知，要評判一個估計式是否爲參數 θ 之不偏估計式，只要依上述定義求估計式的期望值即可（見圖8-2）。在圖8-2(a)中，可以很明顯地發現 $\hat{\theta}_1$ 之抽樣分配之期望值 $E(\hat{\theta}_1) = \theta$，故 $\hat{\theta}_1$ 爲 θ 之不偏估計式；但在圖8-2(b)中，$\hat{\theta}_2$ 之期望值並不等於 θ，因此 $\hat{\theta}_2$ 即爲具有負偏誤之估計式。

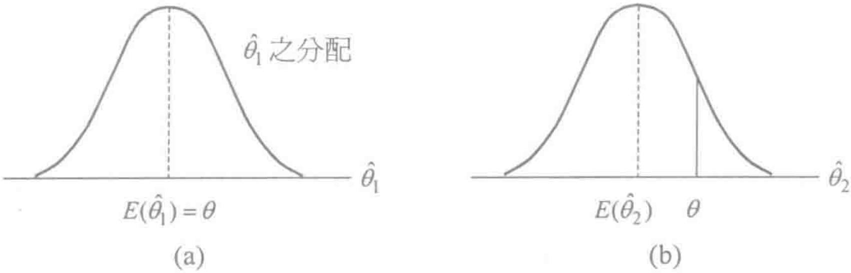

圖8-2 不偏估計式之觀念

例題 1

Prove that if $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ is the variance of a random sample from an infinite population with the finite variance σ^2, then S^2 is an unbiased estimator of the population variance σ^2; that is $E(S^2)=\sigma^2$.

（淡江管科、經濟、政大財管、台科大、中央資管、90大葉工工、92元智財金、92東吳企管）

Sol：

$$
\begin{aligned}
E(S^2) &= \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right)=\frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right)\\
&= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-nE(\overline{X}^2)\right)\\
&= \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}\Big(Var(X_i)+(E(X_i))^2\Big)-n\Big(Var(\overline{X})+(E(\overline{X}))^2\Big)\right\}\\
&= \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2+\mu^2)-n\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)\right\}\\
&= \frac{1}{n-1}\{n\sigma^2+n\mu^2-\sigma^2-n\mu^2\}\\
&= \frac{1}{n-1}(n-1)\sigma^2=\sigma^2
\end{aligned}
$$

例題 2

Suppose the $\{X_1, X_2, X_3\}$ denotes a random sample from an exponential distribution with mean θ.

Consider the following five estimators of θ

(1) $\hat{\theta}_1 = X_1$, (2) $\hat{\theta}_2 = \dfrac{X_1 + X_2}{2}$, (3) $\hat{\theta}_3 = \dfrac{X_1 + 2X_2}{3}$,

(4) $\hat{\theta}_4 = \dfrac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$, (5) $\hat{\theta}_5 = \min(X_1, X_2, X_3)$

Which estimators are unbiased ? （台科大資管、91東吳經濟）

Sol：

因 $X_i \overset{\text{iid}}{\sim} f(x) = \dfrac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$，故知 $E(X_i) = \theta$

(1) $E(\hat{\theta}_1) = E(X_1) = \theta$

(2) $E(\hat{\theta}_2) = E\left(\dfrac{X_1 + X_2}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\big(E(X_1) + E(X_2)\big) = \dfrac{1}{2}(\theta + \theta) = \theta$

(3) $E(\hat{\theta}_3) = E\left(\dfrac{X_1 + 2X_2}{3}\right) = \dfrac{1}{3}\big(E(X_1) + 2E(X_2)\big) = \dfrac{1}{3}(\theta + 2\theta) = \theta$

(4) $E(\hat{\theta}_4) = E\left(\dfrac{X_1 + X_2 + X_3}{3}\right)$

$$= \frac{1}{3}\big(E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)\big) = \frac{1}{3}(\theta + \theta + \theta) = \theta$$

(5) 因 $F(x) = \int_0^x \dfrac{1}{\theta} e^{-\frac{t}{\theta}} dt = 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}$，故知

$X_{(1)} = \min(X_1, X_2, X_3)$ 之機率密度函數為

$$f_{X_{(1)}}(x) = n[1 - F(x)]^{n-1} \cdot f(x)$$

$$= 3[1 - (1 - e^{-\frac{x}{\theta}})]^{3-1} \cdot \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$$

$$= \frac{3}{\theta} e^{-\frac{3}{\theta}x} \quad , x > 0$$

所以

$$E(\hat{\theta}_5)=E(X_{(1)})=\int_0^\infty x\cdot\frac{3}{\theta}e^{-\frac{3}{\theta}x}dx$$

$$=\frac{\theta}{3}\int_0^\infty\left(\frac{3}{\theta}x\right)e^{-\frac{3}{\theta}x}d\left(\frac{3}{\theta}x\right)=\frac{\theta}{3}\Gamma(2)=\frac{\theta}{3}\neq\theta$$

故知上述五個估計式中$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_3,\hat{\theta}_4$為不偏估計式。

例題3

(1) Define an unbiased estimator of a parameter θ.

(2) Given that $X_1,X_2,\ldots,X_n$ is a random sample from the density function $f(x)=\dfrac{e^{-x^2/2\theta}}{\sqrt{2\pi\theta}}$, show that $d(x)=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n}$ is an unbiased estimator of θ. （91政大國貿）

Sol：

(1) 見定義2。

(2) 因$X_i\overset{\text{iid}}{\sim}N(0,\theta)$，故知$E(X_i)=0$，$Var(X_i)=\theta$，又

$$E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n}\right]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[Var(X_i)+(E(X_i))^2\right]$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\theta+0^2)=\frac{1}{n}(n\theta)=\theta$$

所以$d(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$為$\theta$之不偏估計式。

例題4

The probability p of getting a head when flipping the coin once is estimated by $\hat{P}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$,where

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com