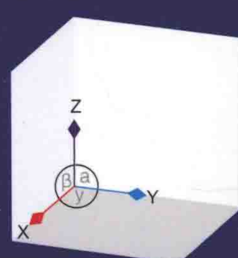
贵州民族大学学术文库

H-矩阵(张量)的判定及其Schur补研究

王　峰◎著



西南交通大学出版社

贵州民族大学学术文库
贵州民族大学学术著作出版基金资助

H-矩阵(张量)的判定及其Schur补研究

王　峰◎著

西南交通大学出版社
·成　都·

内容简介

本书专门研究具有广泛应用背景的 H-矩阵（张量）的数值判定方法及其应用．全书共分五章，内容包括 H-矩阵（张量）的基本性质与预备知识，H-矩阵的直接判定方法及迭代判别算法，几类特殊 H-矩阵的 Schur 补对角占优度及特征值分布区域，$\mathcal{H}$-张量的直接判定方法及迭代判别算法，偶次齐次多项式正定性的判定算法及总结和展望．本书的研究将对上述领域中出现的关于矩阵（张量）应用背景问题的解决有着积极的意义．

本书可作为高等院校计算数学和应用数学专业的研究生教材，也可作为相关专业教学、科研和技术人员的参考用书．

图书在版编目（CIP）数据

H-矩阵（张量）的判定及其 Schur 补研究／王峰著．—成都：西南交通大学出版社，2016.6
（贵州民族大学学术文库）
ISBN 978-7-5643-4707-9

Ⅰ．①H… Ⅱ．①王… Ⅲ．①矩阵－研究 Ⅳ．①0151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 115114 号

贵州民族大学学术文库

H–矩阵（张量）的判定及其 Schur 补研究

王峰 著

责任编辑 张宝华
装帧设计 墨创文化

印张 10 **字数** 179千
成品尺寸 170 mm × 230 mm
版本 2016年6月第1版
印次 2016年6月第1次
印刷 成都蓉军广告印务有限责任公司

出版 发行 西南交通大学出版社
网址 http://www.xnjdcbs.com
地址 四川省成都市二环路北一段111号 西南交通大学创新大厦21楼
邮政编码 610031
发行部电话 028-87600564 028-87600533

书号： ISBN 978-7-5643-4707-9
定价： 42.00元

贵州民族大学博士点建设文库
编委会组成人员名单

前 言

H-矩阵是数值代数和矩阵分析中重要的研究课题之一，其研究成果在计算数学、控制论、最优化理论、力学、管理科学与工程等领域有着广泛的应用. 但在实际应用中，对H-矩阵尤其是大型H-矩阵的判定存在许多困难，因此研究H-矩阵的判定具有重要的理论价值和实际意义. 矩阵Schur补在研究线性控制理论、矩阵理论、数值分析与统计学等中起着重要作用. 张量是矩阵的高阶推广，它在许多学科领域，如信号处理、数据分析与挖掘等中有重要应用.

本书研究H-矩阵的判定问题，特殊H-矩阵Schur补问题，$\mathcal{H}$-张量的数值判定方法. 全书由以下几部分组成：

第一章，简述选题背景和意义以及本书的工作.

第二章，研究H-矩阵的判定问题. 从矩阵的元素出发，通过递进选取正对角矩阵元素，得到H-矩阵的新判定方法. 同时，通过改进迭代因子和利用交叉迭代来减少迭代次数，给出H-矩阵的迭代判别算法.

第三章，研究几类特殊H-矩阵 Schur 补问题. 通过构造与原矩阵相关的低阶矩阵，给出矩阵 Schur 补对角占优度和α-对角占优度，得到：它们的行对角占优度优于原矩阵的相应行对角占优度. 进一步，利用Gersgorin圆盘定理、Ostrowski圆盘定理和Brauer卵形定理，给出了矩阵Schur补的只用原矩阵的元素刻画的特征值分布区域.

第四章，研究H-矩阵的高阶推广——$\mathcal{H}$-张量的判定问题，得到了$\mathcal{H}$-张量的判定条件及判定算法. 作为应用，给出判定偶数阶实对称张量，即偶次齐次多项式正定性的判定条件及判定算法.

本书的出版得到贵州民族大学学术文库出版基金资助，在此表示衷心的感谢.

由于作者水平有限，书中疏漏及不妥之处在所难免，敬请广大同行和读者批评指正.

作 者

2016年1月

符号说明

$\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}(\mathbb{R}^{n\times n})$	$\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 维复（实）矩阵
$\boldsymbol{A}\geqslant 0(\boldsymbol{A}>0)$	$\boldsymbol{A}$ 为非负（正）矩阵
$\boldsymbol{A}^{-1}$	$\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵
$\Vert\boldsymbol{A}\Vert$	$\boldsymbol{A}$ 的某种相容范数
$\Vert\boldsymbol{A}\Vert_{\infty}$	$\boldsymbol{A}$ 的行范数
$\mathcal{A}\in\mathbb{C}^{[m,n]}(\mathbb{R}^{[m,n]})$	$\mathcal{A}$ 为 m 阶 n 维复（实）张量
$\mathcal{A}\geqslant 0(\mathcal{A}>0)$	$\mathcal{A}$ 为非负（正）张量
$\det\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}$ 的行列式
$\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$	以 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 为对角元的对角矩阵
e	$(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$
$\mathcal{G}(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的有向图
$\boldsymbol{I}_n(\boldsymbol{I})$	$n\times n$ 维单位矩阵
J_A	$\boldsymbol{A}$ 的雅克比矩阵
$\max\{a,b\}$	a 和 b 的最大值
$\min\{a,b\}$	a 和 b 的最小值
$\mathbb{N}$	$\{1,2,\cdots,n\}$
$\rho(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径
$\rho(\mathcal{A})$	张量 $\mathcal{A}$ 的谱半径
$\sigma(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱
$\sigma(\mathcal{A})$	张量 $\mathcal{A}$ 的谱
$S\subseteq\mathbb{N}$	S 包含于 $\mathbb{N}$
$S\subset\mathbb{N}$	S 真包含于 $\mathbb{N}$
$\overline{S}=\mathbb{N}\backslash S$	S 在 $\mathbb{N}$ 中的补集
$\vert S\vert$	集合 S 中元素的个数
$x\in\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$	x 是 n 维复（实）复向量

目　录

第 1 章　概　述 …… 1

§1.1　引　言 …… 2

§1.2　研究工作 …… 5

第 2 章　H-矩阵的几种判定法 …… 6

§2.1　定义与性质 …… 6

§2.2　H-矩阵的一种构造判别法 …… 9

§2.3　H-矩阵的实用新判据 …… 14

§2.4　H-矩阵的迭代判别算法 …… 19

第 3 章　几类特殊的 H-矩阵 Schur 补的对角占优度及特征值分布 …… 31

§3.1　定义与性质 …… 32

§3.2　矩阵 Schur 补的对角占优度及特征值分布 …… 37

§3.3　Ostrowski 矩阵 Schur 补的对角占优度及特征值分布 …… 45

§3.4　块对角占优矩阵 Schur 补的对角占优度及特征值分布 …… 57

第 4 章　$\mathcal{H}$-张量的判定及其应用 …… 74

§4.1　$\mathcal{H}$-张量的性质 …… 76

§4.2　$\mathcal{H}$-张量的直接判定方法 …… 81

§4.3　$\mathcal{H}$-张量的迭代判别算法 …… 123

§4.4　张量正定的充分条件 …… 133

§4.5　张量正定性的判定算法 …… 134

第 5 章　总结和展望 …… 136

§5.1　总　结 …… 136

§5.2　展　望 …… 136

参考文献 …… 138

第 1 章 概 述

矩阵特征值是矩阵的一类具有特殊意义的性质，它本身有着十分优美、简洁的表达形式：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x},$$

其中 λ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{x}$ 表示与特征值 λ 对应的特征向量. 当矩阵的维数不大时，从特征方程

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=0$$

中很容易解出特征值的精确值，然而，当矩阵的维数很大时，精确地计算矩阵的特征值是非常困难的. 幸运的是，在很多实际应用中，并不需要计算出矩阵的所有特征值，而只需要确定其特征值在复平面的分布范围即可（矩阵特征值的定位问题）. 因此，特征值的估计成为了一项十分有意义的工作，它在很多领域中有着广泛的应用. 例如，考察系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t),\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{1.0.1}$$

的渐进稳定性问题，如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值都分布在复平面的左侧，则对任意的 $\boldsymbol{x}_0$，$\lim\limits_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(0)=0$，即系统（1.0.1）是渐进稳定的[1]；有时只需给出矩阵特征值的近似值或界（矩阵特征值的估计问题）. 例如，考虑线性方程组迭代解法的收敛性问题，如果迭代矩阵的谱半径的界小于 1，则此迭代法收敛[2]. 因此，矩阵特征值的定位与估计是矩阵分析领域中非常重要的研究课题.

在上述迭代法中，若能进行预处理将系数矩阵降阶（如用 Schur 补降阶），而降阶后迭代法仍收敛，那么预处理后的运算量会大大减少. 因此，若能有效地给出降阶后系数矩阵的特征值分布，则可以知道能否对原系数矩阵降阶而使迭代法保持收敛. 因此，对一些降阶后的矩阵（如 Schur 补）的特征值的定位与估计有十分重要的应用价值.

本书将对 H-矩阵的判定及其 Schur 补的特征值定位与估计问题进行研究. 同时，对 H-矩阵的高阶推广— $\mathcal{H}$-张量的判定问题及其应用进行研究.

§1.1 引 言

本节将介绍本书所研究问题的历史发展和意义.

H-矩阵的定义是 A.M. Ostrowski 于 1937 年首先给出的[3, 4]，现在 H-矩阵的最直观定义是其比较矩阵为 M-矩阵[5]. 实际上，M-矩阵类是 H-矩阵类的一个子类，因此对 H-矩阵类的研究也有助于对 M-矩阵类的研究. 20 世纪 60 年代，人们从不同的角度、不同的问题背景定义了一种与 H-矩阵类在纯粹数学上完全等价的矩阵类——广义严格对角占优矩阵类[6, 7]，这为 H-矩阵类理论的进一步发展奠定了基础，而随着后来（双）α-对角占优矩阵、（双）α-链对角占优矩阵等概念[8, 9]的陆续提出，又为 H-矩阵的性质和判定条件提供了新的途径.

自 1937 年引入 H-矩阵的定义并研究它的一些简单性质以来，鉴于 H-矩阵及其相关矩阵类的重要性和应用的广泛性，使得人们对 H-矩阵的性质特别是 H-矩阵判定条件的研究一直方兴未艾，并且引起了越来越多的数值工作者的关注和重视. A. Berman、R.J. Plemmons、M. Neumann、R.S. Varga、L. Cvetkovic、游兆永、逄明贤、高益明、李耀堂、黄廷祝、黎稳等许多学者利用 H-矩阵和广义严格对角占优矩阵的等价性，通过构造不同的正对角占优矩阵和利用不等式的放缩技巧，得到了 H-矩阵的一系列判别方法[6, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27]，这些判别方法为构造高效的数值迭代判别算法提供了理论基础. L.Cvetkovic、V. Kostic、B. Li、M. Tsatsomeros、李庆春、孙玉祥、刘建州、徐仲、吕洪斌等许多学者利用（双）α-对角占优矩阵，（双）α-链对角占优矩阵等特殊矩阵的性质及其与 H-矩阵之间的关系，结合 G-函数、有向图中的回路和 Schur 补等相关知识，给出了 H-矩阵的另一些判定条件[9, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38].

随着处理的问题越来越复杂，实际需要判定的矩阵规模越来越大，致使一般判定方法在具体操作上存在一定的难度，然而随着计算机技术的发展和应用，使得探讨 H-矩阵的高效数值算法成为了当前一个比较热门的研究课题. Lei Li、M. Harada、Bishan Li、T. Kohno、A. Hadjidimos、黄廷祝、刘建州等许多学者近几年在已有理论的基础上先后给出了一系列判定 H-矩阵的迭代判定算法[29, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49]. 这些算法在计算机的参与下加快了判定速度，也使得对大型矩阵的判定变得切实可行. 但这些算法大都具

有一定的局限性，如判定矩阵的范围有限、最优参数选取困难等问题，因此很有必要去探索更加简捷、判定范围更广、运算步骤更少、速度更快的高效判定算法.

Schur 补最早出现在一百多年前，Laplace（1749—1827）在 1812 年首次发表了关于 Schur 补隐式表现形式的文章；著名数学家 Issai Schur 在 1917 年提出了 Schur 行列式公式[50]，从而第一次给出了 Schur 补的概念. Schur 补的矩阵形式为

$$\boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}.$$

这是 Emilie Haynsworth 于 1968 年分别在文献[51, 52]中提出的，其中非奇异矩阵 $\boldsymbol{A}_{11}$ 是复分块矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}$$

的首子阵.

矩阵 $\boldsymbol{A}_{11}$ 在 $\boldsymbol{A}$ 下的 Schur 补符号表示为

$$(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{A}_{11})=\boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}.$$

这个符号最早是由 Haynaworth 于 1968 年使用的, 1974 年, Carkham、Haynsworth 和 Markham 将其改为 $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{A}_{11}$ 并且一直沿用到现在. 1979 年, Carkham 和 Markham 在文献[53]中指出，严格对角占优矩阵的 Schur 补仍然是严格对角占优矩阵，这个重要性质被反复应用于判断 Gauss-Seidel 迭代法的收敛性. 1982 年, C.R. Johnson 得到正定矩阵的 Schur 补是正定矩阵. 同样的，对 M-矩阵、H-矩阵、逆 M-矩阵仍具有此性质[54]. B. Li, M. Tsalsomeros 和 K.D. Ikramov 在文献[30, 55]中分别证明了 Ostrowski 矩阵的 Schur 补是 Ostrowski 矩阵. 这些性质在矩阵分析中有着重要应用[56, 57, 58, 59]. 近年来, Liu 在文献[32]中将 Schur 补推广到广义双对角占优矩阵，并得到：如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是广义双对角占优矩阵，则其 Schur 补也是广义对角占优矩阵. 随后，许多学者在矩阵及其 Schur 补的特征值的分布、奇异值、行列式界的估计、无穷大范数界的估计等方面也做了很多工作[60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68]. Liu、Huang 和 Zhang 在文献[33, 69]中研究了具有实对角元的 H_n 矩阵的特征值分布情况，得到了一些重要性质. 他们指出，如果矩阵 $A\in \mathrm{H}_n$，$\alpha\subset\mathbb{N}$ 且所有的对角元 a_{ii} 是实数，则 $\boldsymbol{A}/\alpha$ 有 $|J_+(\boldsymbol{A})|-|J_+^{\alpha}(\boldsymbol{A})|$ 个具有正实部的特征值和 $|J_-(\boldsymbol{A})|-|J_-^{\alpha}(\boldsymbol{A})|$ 个具有负实部的特征值，并且这个性质对 $\boldsymbol{A}\in SD_n$，$\boldsymbol{A}\in SD_n^{\alpha}$，$\boldsymbol{A}\in SPD_n^{\alpha}$ 都成立. 后来，Zhang

等在此基础上对矩阵 A 进行了拓展，证明了当矩阵 A 的对角元为复数时此结论仍然成立[70].

近年来，矩阵分块技术给矩阵理论的研究和应用带来的方便和重要作用促使人们对分块矩阵本身进行研究. Feingold, Varga, Polman 在研究矩阵特征值分布时在文献[71, 72, 73, 74]中首次引入块对角占优矩阵的概念，此后引起了许多数值工作者的关注，并先后有许多有关块对角占优矩阵的研究成果出现[74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81]. 其中文献[74, 78, 79]分别拓展了块对角占优矩阵的定义，并将其分为两类：Ⅰ-型块对角占优矩阵和Ⅱ-型块对角占优矩阵. 1987 年以后在前述工作的基础上文献[74, 79]提出了广义Ⅰ-型块对角占优矩阵和广义Ⅱ-型块对角占优矩阵（Ⅰ-型块 H-矩阵、Ⅱ-型块 H-矩阵）. Li 等在文献[70, 82]中将 Schur 补和块对角占优矩阵结合在一起，得到块对角占优矩阵的 Schur 补仍然是块对角占优的. 本书将继续研究块 H-矩阵 Schur 补的性质.

张量是矩阵的高阶推广，在许多科学领域，如信号图像处理[83, 84]、数据挖掘与处理[83]、非线性优化[85]、物理学中的弹性分析[86, 87, 88]和高阶统计学[89]等中有着重要的应用. 近年来，张量的特征值和特征向量被众多学者关注和研究[87, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100].

张量特征值的定位和估计问题有着广泛的实际应用，如高阶统计学中的高阶马尔科夫链的概率分布[89]、自动控制系统中的偶阶多项式的正定性分析[98, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109]、数据分析中秩一逼近[110, 111, 112, 113]和图像处理中的盲点分析[114]等.

2005 年，祈力群[115]利用张量特征值研究多项式的正定性判定问题，即对一个多项式 f，如何判断对任意的 $x \in \mathbb{R}_n \setminus \{0\}$，$f(x)>0$ 是否成立？他指出，对任意一个 m 次齐次多项式 $f(x)$，都存在实超对称张量 $\mathcal{A}=[a_{i_1\cdots i_m}]$，使得

$$f(x)=\mathcal{A}x^m=\sum_{i_1,\cdots,i_m\in N} a_{i_1\cdots i_m}x_{i_1}\cdots x_{i_m}, \tag{1.1.1}$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$，并且当 m 是偶数时给出下面的判定结果.

定理 1.1[115] 设 $f(x)$ 如（1.1.1）式所示，若 m 为偶数，则下述命题等价：

(i) $f(x)$ 是半正定（正定）的；

(ii) $\mathcal{A}$ 是半正定（正定）的；

(iii) $\mathcal{A}$ 的所有 H-特征值是非负（正）的.

根据定理 1.1，实对称张量 $\mathcal{A}$（或由 $\mathcal{A}$ 定义的多项式）的正定性可以通过计算 $\mathcal{A}$ 的所有 H-特征值来判断. 然而，当阶数或维数很大时，计算 $\mathcal{A}$ 的 H-

特征值非常困难, 因此, 寻找其他简单有效的判定正定性的方法是非常有意义的[94, 98, 116]. Qi 和 Li 分别在文献[99, 115, 116]中给出了一个齐次多项式正定性的判定不等式.

定理 1.2[115] 设 $f(x)$ 如式 (1.1.1) 所示, 令 m 为偶数, 若

$$|a_{ii\cdots i}|>R_i(\mathcal{A})=\sum_{\substack{i_2,\cdots,i_m\in N\\ \delta_{ii_2\cdots i_m}=0}}|a_{ii_2\cdots i_m}|,\quad \forall i|\in \mathbb{N},$$

则 $f(x)$ 是正定的.

定理 1.3[99] 设 $f(x)$ 如式 (1.1.1) 所示, 令 m 为偶数, 若 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{H}$- 张量, 则 $\mathcal{A}$ 是正定的, 即 $f(x)$ 是正定的.

因此, 寻找更加有效的判定张量正定性的方法是一个有趣且重要的问题.

§ 1.2 研究工作

本书研究 H- 矩阵的判定问题. 作为应用, 研究几类特殊 H- 矩阵 Schur 补的对角占优度及特征值分布区域. 然后, 对 H- 矩阵的高阶推广—— $\mathcal{H}$- 张量的正定性判定问题进行研究和探索. 全文共分五章, 除概述和总结与展望部分外, 其他各章内容如下:

第二章, 研究 H- 矩阵的判定问题. 通过递进选取正对角矩阵因子元素得到 H- 矩阵新的判定方法; 通过改进迭代因子和使用交叉迭代的方法减少迭代次数, 给出 H- 矩阵新的迭代判定算法.

第三章, 研究 Ostrowki 矩阵、Ⅰ(Ⅱ)-型块严格(双)对角占优矩阵 Schur 补的对角占优度及特征值分布区域, 得到 Ostrowki 矩阵、Ⅰ(Ⅱ)-型块严格(双)对角占优矩阵 Schur 补的对角占优度要分别优于 Ostrowki 矩阵、Ⅰ(Ⅱ)-型块严格 (双) 对角占优矩阵相应行的对角占优度. 作为应用, 给出了矩阵 Schur 补的只用原矩阵的元素刻画的特征值分布区域.

第四章, 研究 $\mathcal{H}$- 张量的判定问题, 得到 $\mathcal{H}$- 张量新的充分条件, 由此给出 $\mathcal{H}$- 张量的判定算法. 作为应用, 给出偶次齐次多项式正定性的判定算法, 并通过数值例子验证算法是否可行和有效.

第五章, 对全书进行总结, 并提出今后研究的方向.

第 2 章 H-矩阵的几种判定法

H-矩阵（H_n）作为一种典型的特殊矩阵，不仅具有重要的理论研究价值，而且它在数值代数、最优化理论、动力系统理论、控制论、统计学和经济数学等众多领域中有着广泛的应用. 如何简捷、方便和高效地判别一个矩阵是否为 H-矩阵一直是备受关注的问题. 近年来，国内外许多学者对 H-矩阵的性质特别是判别方法进行了深入研究，通过运用矩阵理论上的一些方法、不等式放缩技巧以及迭代算法，得到了 H-矩阵的大量实用且有效的判别方法. 本章将对这个问题继续进行研究.

§ 2.1 定义与性质

下面介绍几类重要的特殊 H-矩阵.

定义 2.1 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$\mathbb{N}=\{1,2,\cdots,n\}$，记 $R_i(\boldsymbol{A})=\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|$，$C_i(\boldsymbol{A})=\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|$，若对任意 $i,j\in\mathbb{N}$，$i\neq j$，

(i) $|a_{ii}|>R_i(\boldsymbol{A})$，则称 $\boldsymbol{A}$ 是严格对角占优矩阵，记作 $\boldsymbol{A}\in SD_n$.

(ii) $\boldsymbol{A}$ 是不可约的，$|a_{ii}|\geqslant R_i(\boldsymbol{A})$，且至少有一个严格不等式成立，则称 $\boldsymbol{A}$ 是不可约对角占优矩阵，记作 $\boldsymbol{A}\in ID_n$.

(iii) $|a_{ii}||a_{jj}|>R_i(\boldsymbol{A})R_j(\boldsymbol{A})$，则称 $\boldsymbol{A}$ 是 Ostrowski 矩阵，记作 $\boldsymbol{A}\in OS_n$.

(iv) $a_{ii}\neq 0$ 且 $\prod\limits_{i\in\gamma}|a_{ii}|>\prod\limits_{i\in\gamma}R_i(\boldsymbol{A})$，$\forall\gamma\in\Upsilon$，则称 $\boldsymbol{A}$ 是环严格对角占优矩阵，记作 $\boldsymbol{A}\in CSD_n$.

(v) $\boldsymbol{A}$ 是不可约的，且 $\prod\limits_{i\in\gamma}|a_{ii}|>\prod\limits_{i\in\gamma}R_i(\boldsymbol{A})$，$\forall\gamma\in\Upsilon$，且至少有 $\mathcal{G}(\boldsymbol{A})$ 的一条简单回路使得严格不等式成立，则称 $\boldsymbol{A}$ 是不可约环对角占优矩阵，记 $\boldsymbol{A}\in ICD_n$.

(vi) $|a_{ii}|>R_i^S(\boldsymbol{A})$，$\forall i\in S$，且

$$(|a_{ii}|-R_i^S(\boldsymbol{A}))(|a_{jj}|-R_j^S(\boldsymbol{A}))>R_i^{\overline{S}}(\boldsymbol{A})R_j^{\overline{S}}(\boldsymbol{A}),\quad \forall i\in S,\quad \forall j\in\overline{S},$$

其中 S 是 $\mathbb{N}$ 中的非空真子集，则称 $\boldsymbol{A}$ 是严格 $S-$对角占优矩阵，记作 $\boldsymbol{A}\in S\text{-}SD_n$.

(vii) $\boldsymbol{A}$ 是不可约的，$|a_{ii}|\geqslant R_i^S(\boldsymbol{A})$，$\forall i\in S$，且

$$(|a_{ii}|-R_i^S(\boldsymbol{A}))(|a_{jj}|-R_j^S(\boldsymbol{A}))\geqslant R_i^{\overline{S}}(\boldsymbol{A})R_j^{\overline{S}}(\boldsymbol{A}),\quad \forall i\in S,\quad \forall j\in \overline{S},$$

且至少有一对 $i\in S$，$j\in\overline{S}$，使得严格不等式成立，其中 S 是 $\mathbb{N}$ 中的非空真子集，则称 $\boldsymbol{A}$ 是不可约 $S-$对角占优矩阵，记作 $\boldsymbol{A}\in IS\text{-}D_n$.

(viii) $|a_{ii}|\geqslant R_i(\boldsymbol{A})$，且至少有一个严格不等式成立，以及对每一个等式成立的下标 i 存在非零元素链 $a_{ij_1}a_{j_1j_2}\cdots a_{j_{k-1}j_k}$，满足 $|a_{j_kj_k}|>R_{j_k}(\boldsymbol{A})$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为具有非零元素链对角占优矩阵，记作 $\boldsymbol{A}\in CD_n$.

(viiii) 存在 $\alpha\in[0,1]$，使得 $|a_{ii}|>\alpha R_i(\boldsymbol{A})+(1-\alpha)C_i(\boldsymbol{A})$，则称 $\boldsymbol{A}$ 是严格 α-对角占优矩阵，记作 $\boldsymbol{A}\in SD_n^\alpha$.

(vv) 存在 $\alpha\in[0,1]$，使得 $|a_{ii}|>(R_i(\boldsymbol{A}))^\alpha(C_i(\boldsymbol{A}))^{1-\alpha}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 是严格积 α-对角占优矩阵，记作 $\boldsymbol{A}\in SPD_n^\alpha$.

(vvi) 存在 $\alpha\in[0,1]$ 和 $k\in\mathbb{N}$，使得

$$|a_{ii}|>(R_i^S(\boldsymbol{A}))^\alpha(R_i^S(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}))^{1-\alpha}+R_i^{\overline{S}}(\boldsymbol{A}),\ \ S\subset\mathbb{N},\ \ |S|=k,$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 是严格 S-α-对角占优矩阵，记作 $\boldsymbol{A}\in S\text{-}SD_n^\alpha$.

定义 2.2[117]　设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$，若存在正对角矩阵 $\boldsymbol{X}$，使得 $\boldsymbol{AX}\in SD_n$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 H-矩阵，记作 $\boldsymbol{A}\in \mathrm{H}_n$.

定义 2.1 中的矩阵类都是非奇异的（见定理 2.1），并且它们都是 H-矩阵的子类矩阵（见表 2.1），这也为判定 H-矩阵提供了一些充分条件（见定理 2.2）. H-矩阵的判定是矩阵理论中的一个重要研究课题[14, 15, 16, 32, 33, 75, 118, 119].

定理 2.1[17, 120, 121]　若 $\boldsymbol{A}\in SD_n$；$\boldsymbol{A}\in ID_n$；$\boldsymbol{A}\in OS_n$；$\boldsymbol{A}\in CSD_n$；$\boldsymbol{A}\in ICD_n$；$\boldsymbol{A}\in S\text{-}SD_n$；$\boldsymbol{A}\in IS\text{-}D_n$；$\boldsymbol{A}\in CD_n$；$\boldsymbol{A}\in SD_n^\alpha$；$\boldsymbol{A}\in SPD_n^\alpha$；或者 $\boldsymbol{A}\in S\text{-}SD_n^\alpha$，则 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异的.

定理 2.2[17, 120, 121]

(i) $SD_n\subseteq OS_n\subseteq CSD_n\subseteq \mathrm{H}_n$；

(ii) $SD_n\subseteq OS_n\subseteq S\text{-}SD_n\subseteq \mathrm{H}_n$；

(iii) $SD_n\subseteq IS_n\subseteq CD_n\subseteq \mathrm{H}_n$；

(iiii) $SD_n\subseteq SD_n^\alpha\subseteq SPD_n^\alpha\subseteq S\text{-}SD_n^\alpha\subseteq \mathrm{H}_n$.

表 2-1　非奇异 H-矩阵类

矩阵类	提出者
SD_n	Desplanques　1887 [122]
ID_n	Taussky　1949 [123]
OS_n	Ostrowski　1937 [3]
CSD_n	Brualdi　1982 [124]
ICD_n	Brualdi　1982 [124]
$S\text{-}SD_n$	Cvetkovic　2004 [125]
$IS\text{-}D_n$	Cvetkovic　2004 [125]
CD_n	Shivakumar　1974 [126]
SD_n^{α}	Ostrowski　1937 [3]
SPD_n^{α}	Ostrowski　1937 [3]
$S\text{-}SD_n^{\alpha}$	Cvetkovic　2006 [121]

注 2.1　严格对角占优矩阵首先被 L. Levy[127]于 1881 年提出，但只是对实矩阵考虑的. 1887 年, J. Desplanques[122]才对复矩阵给出相应的定义.

D.G. Feingold 和 R.S. Varga 于 1962 年引入块对角占优矩阵的概念[71]，从而把经典的 Gersgorin 圆盘定理推广到分块矩阵上，成为重要的标志性成果[120].

从此，分块矩阵特征值的定位成为数学工作者关心的课题.

定义 2.3　设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 分块形如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1m} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{m1} & \boldsymbol{A}_{m2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{mm} \end{pmatrix}, \tag{2.1.1}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{ii}\in\mathbb{C}^{n_i\times n_i}$， $i\in\mathbb{M}=\{1,2,\cdots,\ m\}$， $\sum\limits_{i\in\mathbb{M}}n_i=n$. 若

$$\det(\boldsymbol{A}_{ii})\neq 0,\ \ \|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}>R_i(\boldsymbol{A}),\ \ i\in\mathbb{M},$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 是块严格对角占优矩阵.

利用块严格对角占优矩阵的非奇异性, D.G. Feingold 和 R.S. Varga 得到了下面的分块矩阵 Gersgorin 特征值定位定理.

定理 2.3[71]　设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 分块型如（2.1.1），则

$$\sigma(A) \subseteq G(A) = \left(\bigcup_{i \in \mathbb{M}} \sigma(A_{ii})\right) \cup \left(\bigcup_{i \in \mathbb{M}} G_i(A)\right),$$

其中 $G_i(A) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \|(zI_i - A_{ii})^{-1}\|^{-1} \leqslant R_i(A) \right\}$.

同样, 经典的 Brauer 卵形定理和 Brualdi 纽形定理可以推广到分块矩阵上[118], 在此不加赘述.

§ 2.2 H–矩阵的一种构造判别法

本节通过递进选取对角矩阵因子元素, 得到 H-矩阵的一些新的判定方法, 再进一步将此类判定方法推广到不可约矩阵和具有非零元素链矩阵的情形, 并用实例说明这些方法的有效性.

为了叙述方便, 先引入下列记号: 设 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 记

$$N_0 = \{ i \in \mathbb{N} \mid 0 < |a_{ii}| \leqslant R_i(A) \}, \quad N_1 = \{ i \in \mathbb{N} \mid |a_{ii}| > R_i(A) \},$$

$$\delta_i(A) = \frac{|a_{ii}|}{R_i(A)} (\forall i \in \mathbb{N}), \quad r_0(A) = 1, \quad r_1(A) = \max_{i \in N_1} \frac{\sum\limits_{j \in N_0} |a_{ij}|}{|a_{ii}| - \sum\limits_{j \in N_1, \neq i} |a_{ij}|},$$

$$r_i^{(p+1)}(A) = \frac{\sum\limits_{j \in N_0, \neq i} |a_{ij}| \delta_j(A) + \sum\limits_{j \in N_1, \neq i} |a_{ij}| r_p(A)}{|a_{ii}|} (\forall i \in N_1), \quad p = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$r_{p+1}(A) = \max_{i \in N_1} r_i^{(p+1)}(A), \quad p = 0, 1, 2, \cdots.$$

显然, $N_0 \cup N_1 = \mathbb{N}$. 若 $N_0 = \varnothing$, 则 A 是 H-矩阵; 若 A 为 H-矩阵, 则 A 至少有一严格对角占优行, 即 $N_1 \neq \varnothing$. 因此, 我们总假设 $N_0 \neq \varnothing$, $N_1 \neq \varnothing$, 并规定 $\sum\limits_{t \in \varnothing} \cdot = 0$.

定理 2.4 设 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 若对任意的 $i \in N_0$, 存在非负整数 p, 使得

$$|a_{ii}| \delta_i(A) > \sum_{j \in N_0, \neq i} |a_{ij}| \delta_j(A) + \sum_{j \in N_1} |a_{ij}| r_j^{(p+1)}(A), \tag{2.2.1}$$

则 A 是 H-矩阵.

证明 令

$$M_i(A)=\frac{|a_{ii}|\delta_i(A)-\sum\limits_{j\in N_0,\neq i}|a_{ij}|\delta_j(A)-\sum\limits_{j\in N_1}|a_{ij}|r_j^{(p+1)}(A)}{\sum\limits_{j\in N_1}|a_{ij}|},\quad \forall i\in N_0, \tag{2.2.2}$$

如果 $\sum\limits_{j\in N_1}|a_{ij}|=0$，则令 $M_i(A)=+\infty$．由式（2.2.1）与式（2.2.2）知 $M_i(A)>0$，$\forall i\in N_0$．因此，一定存在充分小的正数 $\varepsilon>0$，使得 $0<\varepsilon<\min\limits_{i\in N_0}M_i(A)\leqslant+\infty$．

构造正对角矩阵 $\boldsymbol{X}_1=\mathrm{diag}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$．令 $\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1=(b_{ij}^{(1)})_{n\times n}$，其中

$$x_i=\delta_i(A),\ i\in N_0;\quad x_i=r_i^{(p+1)}(A)+\varepsilon\ ,\ i\in N_1.$$

当 $\forall i\in N_0$ 时，若 $\sum\limits_{j\in N_1}|a_{ij}|=0$，由式（2.2.1）及 $0<\varepsilon<M_i(A)$ 知

$$|b_{ii}^{(1)}|-R_i(\boldsymbol{B}_1)=|a_{ii}|\delta_i(A)-\sum_{j\in N_0,\neq i}|a_{ij}|\delta_j(A)-\sum_{j\in N_1}|a_{ij}|(r_j^{(p+1)}(A)+\varepsilon)>0.$$

若 $\sum\limits_{j\in N_1}|a_{ij}|\neq0$，由式（2.2.1）与式（2.2.2）知

$$\begin{aligned}R_i(\boldsymbol{B}_1)&=\sum_{j\in N_0,\neq i}|a_{ij}|\delta_j(A)+\sum_{j\in N_1}|a_{ij}|(r_j^{(p+1)}(A)+\varepsilon)\\&<\sum_{j\in N_0,\neq i}|a_{ij}|\delta_j(A)+\sum_{j\in N_1}|a_{ij}|r_j^{(p+1)}(A)+M_i(A)\sum_{j\in N_1}|a_{ij}|\\&=|a_{ii}|\delta_i(A)=|b_{ii}^{(1)}|.\end{aligned}$$

因为 $r_1(A)<1$，$\delta_i(A)\leqslant1(\forall i\in N_0)$，所以

$$\sum_{j\in N_0,\neq i}|a_{ij}|\delta_j(A)+r_1(A)\sum_{j\in N_1}|a_{ij}|\leqslant R_i(A),\quad \forall i\in N_0.$$

故 $r_i^{(2)}(A)\leqslant r_2(A)\leqslant r_1(A)(\forall i\in N_1)$．假设当 $p=k$ 时，$r_i^{(k+1)}(A)\leqslant r_{k+1}(A)\leqslant r_k(A)$，则当 $p=k+1$ 时，由

$$\sum_{j\in N_0,\neq i}|a_{ij}|\delta_j(A)+\sum_{j\in N_1}|a_{ij}|r_{k+1}(A)\leqslant\sum_{j\in N_0,\neq i}|a_{ij}|\delta_j(A)+\sum_{j\in N_1}|a_{ij}|r_k(A)$$

可得 $r_i^{(k+2)}(A)\leqslant r_{k+2}(A)\leqslant r_{k+1}(A)$．故由数学归纳法可知，对任意的非负整数 p 都有

$$r_i^{(p+1)}(A)\leqslant r_{p+1}(A)\leqslant r_p(A). \tag{2.2.3}$$

当 $\forall i\in N_1$ 时，由式（2.2.3）得