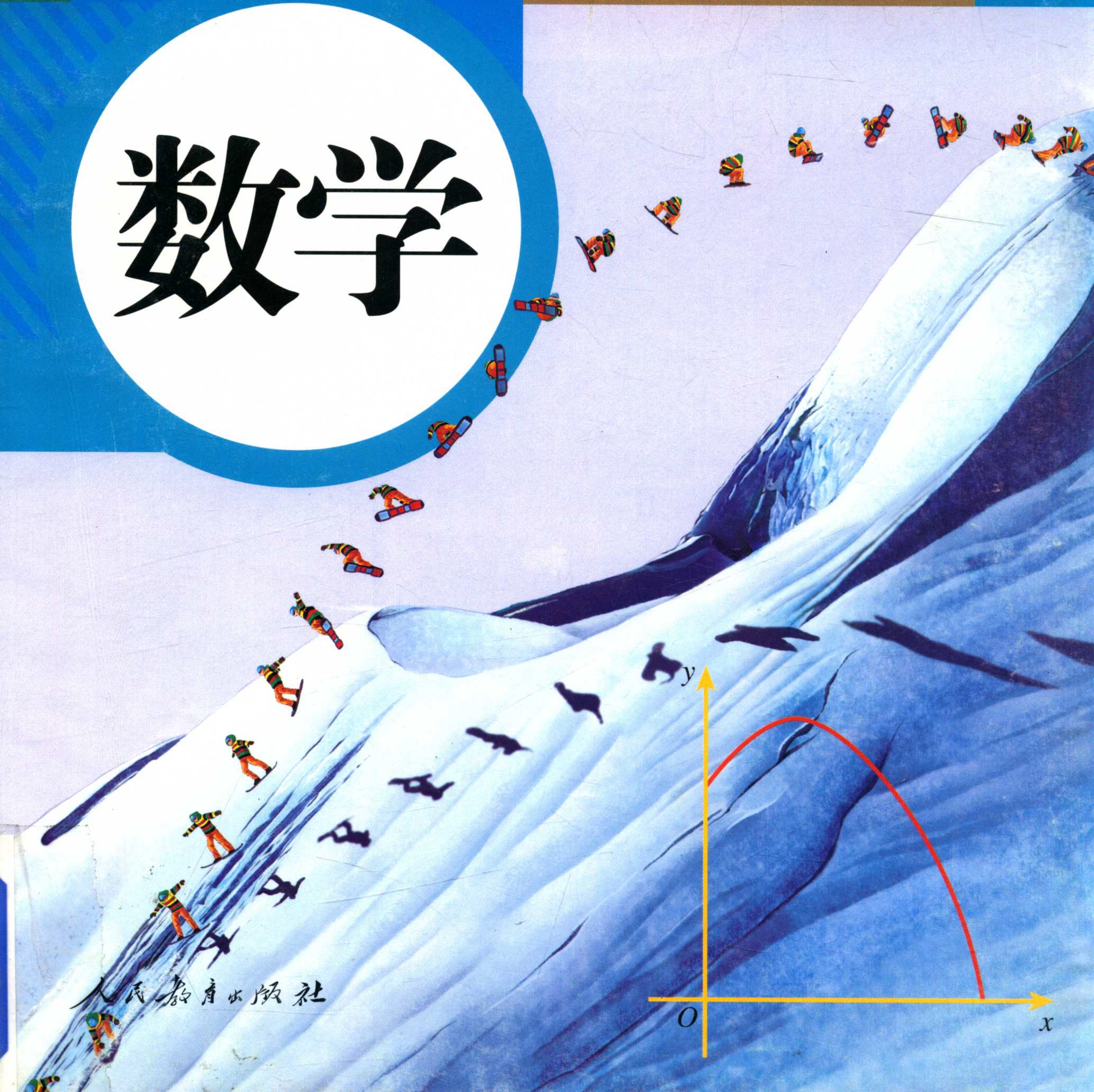
教育部审定
2013

义务教育教科书

数学

九年级

上册



人民教育出版社

义务教育教科书

数学

九年级

上册

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著

人民教育出版社
·北京·

主　　编：林　群
副 主 编：田载今　薛　彬　李海东
本册主编：张劲松

主要编写人员：章建跃　薛　彬　俞求是　李海东　张唯一　王玉起
曹凤梅　袁芝馨　谢　慧　张　东　初　雨　黄兵彦
责任编辑：王　嵘
美术编辑：王俊宏

封面设计：吕　旻　王俊宏
插　　图：王俊宏　文鲁工作室（封面）

经河北省教育厅推荐使用

义务教育教科书
数　学
九年级　上册
人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著
*
人民教育出版社出版
（联系地址：北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼　邮编：100081）
网址：http://www.pep.com.cn
河北省出版总社有限责任公司重印
河 北 省 新 华 书 店 发 行
河北新华联合印刷有限公司印装

开本：787毫米×1 092毫米　1/16　印张：10　字数：168,000
2014年3月第1版　2015年6月第2次印刷
印数：423,301—894,800册（秋季）
ISBN 978-7-107-28024-5　定价：9.35元

本册导引

亲爱的同学，祝贺你升入九年级。

你将要学习的这本书是我们根据《义务教育数学课程标准（2011 年版）》编写的教科书，这是你在七～九年级要学习的六册数学教科书中的第五册。

你已经掌握了用一元一次方程解决实际问题的方法。在解决某些实际问题时还会遇到一种新方程——一元二次方程。怎样解这种方程，并运用这种方程解决一些实际问题呢？学了**“一元二次方程”**一章，你就会获得答案。

函数是描述变化的一种数学工具，前面你已经学习了一次函数。在**“二次函数”**一章，你将认识函数家庭的另一个重要成员——二次函数，学习它的图象和性质，利用它来表示某些问题中的数量关系，解决一些实际问题，进一步提高对函数的认识和应用能力。

你已经认识了平移、轴对称等图形的变化，探索了它们的性质，并运用它们进行图案设计。本书中图形的变化又增添了一名新成员——旋转。学了**“旋转”**一章，你就可以综合运用平移、轴对称、旋转进行图案设计了，你设计出的图案会更加丰富多彩。

圆是一种常见的图形。在**“圆”**这一章，你将进一步认识圆，探索它的性质，并用这些知识解决一些实际问题。通过这一章的学习，你解决图形问题的能力将会进一步提高。

将一枚硬币抛掷一次，可能出现正面也可能出现反面，出现正面的可能性大还是出现反面的可能性大呢？学了**“概率初步”**一章，你就能更好地认识这个问题了．掌握了概率的初步知识，你还会解决更多的实际问题。

数学伴着我们成长、数学伴着我们进步、数学伴着我们成功，让我们一起随着这本书，畅游神奇、美妙的数学世界吧！

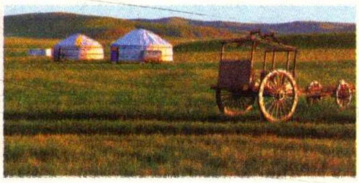
目　　录

第二十一章　一元二次方程

第二十二章　二次函数

第二十三章　旋转

第二十四章　圆



第二十五章　概率初步

第二十一章　一元二次方程

在设计人体雕像时，使雕像的上部（腰以上）与下部（腰以下）的高度比，等于下部与全部（全身）的高度比，可以增加视觉美感. 按此比例，如果雕像的高为 2 m，那么它的下部应设计为多高?

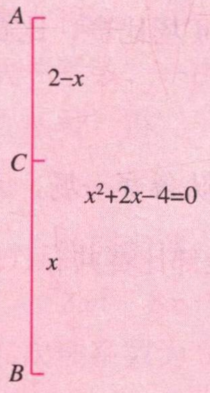
如图，雕像的上部高度 AC 与下部高度 BC 应有如下关系：

$$AC : BC = BC : 2，即 BC^2 = 2AC.$$

设雕像下部高 x m，可得方程 $x^2 = 2(2-x)$，整理得

$$x^2 + 2x - 4 = 0.$$

这个方程与我们学过的一元一次方程不同，其中未知数 x 的最高次数是 2. 如何解这类方程? 如何用这类方程解决一些实际问题? 这就是本章要学习的主要内容.



21.1 一元二次方程

方程

$$x^2+2x-4=0 \qquad ①$$

中有一个未知数 x，x 的最高次数是 2. 像这样的方程有广泛的应用，请看下面的问题.

问题 1 如图 21.1-1，有一块矩形铁皮，长 100 cm，宽 50 cm，在它的四角各切去一个同样的正方形，然后将四周突出部分折起，就能制作一个无盖方盒. 如果要制作的无盖方盒的底面积为 3 600 cm^2，那么铁皮各角应切去多大的正方形？

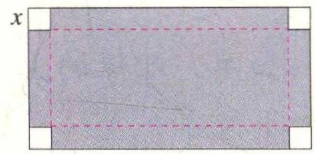


图 21.1-1

设切去的正方形的边长为 x cm，则盒底的长为 $(100-2x)$cm，宽为 $(50-2x)$cm. 根据方盒的底面积为3 600 cm^2，得

$$(100-2x)(50-2x)=3\ 600.$$

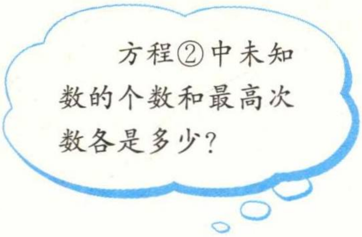
整理，得

$$4x^2-300x+1\ 400=0.$$

化简，得

$$x^2-75x+350=0. \qquad ②$$

由方程②可以得出所切正方形的具体尺寸.



问题 2 要组织一次排球邀请赛，参赛的每两个队之间都要比赛一场. 根据场地和时间等条件，赛程计划安排 7 天，每天安排 4 场比赛，比赛组织者应邀请多少个队参赛？

全部比赛的场数为 $4\times7=28$.

设应邀请 x 个队参赛，每个队要与其他 $(x-1)$ 个队各赛一场，因为甲队对乙队的比赛和乙队对甲队的比赛是同一场比赛，所以全部比赛共 $\frac{1}{2}x(x-1)$ 场.

列方程

$$\frac{1}{2}x(x-1)=28.$$

整理，得

$$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x=28.$$

化简，得

$$x^2-x=56. \quad ③$$

由方程③可以得出参赛队数.

方程③中未知数的个数和最高次数各是多少？

思考

方程①②③有什么共同点？

可以发现，这些方程的两边都是整式，方程中只含有一个未知数，未知数的最高次数是 2. 同样地，方程 $4x^2=9$，$x^2+3x=0$，$3y^2-5y=7-y$ 等也是这样的方程. 像这样，等号两边都是整式，只含有一个未知数（一元），并且未知数的最高次数是 2（二次）的方程，叫做**一元二次方程**（quadratic equation in one unknown）.

一元二次方程的一般形式是

$$ax^2+bx+c=0(a\neq0).$$

为什么规定 $a\neq0$？

其中 ax^2 是二次项，a 是二次项系数；bx 是一次项，b 是一次项系数；c 是常数项.

使方程左右两边相等的未知数的值就是这个一元二次方程的解，一元二次方程的解也叫做一元二次方程的**根**（root）.

例 将方程 $3x(x-1)=5(x+2)$ 化成一元二次方程的一般形式，并写出其中的二次项系数、一次项系数和常数项.

解：去括号，得

$$3x^2-3x=5x+10.$$

移项，合并同类项，得一元二次方程的一般形式

$$3x^2-8x-10=0.$$

其中二次项系数为 3，一次项系数为 -8，常数项为 -10.

练习

1. 将下列方程化成一元二次方程的一般形式，并写出其中的二次项系数、一次项系数和常数项：

(1) $5x^2-1=4x$；　　(2) $4x^2=81$；

(3) $4x(x+2)=25$；　　(4) $(3x-2)(x+1)=8x-3$.

2. 根据下列问题，列出关于 x 的方程，并将所列方程化成一元二次方程的一般形式：

(1) 4 个完全相同的正方形的面积之和是 25，求正方形的边长 x；

(2) 一个矩形的长比宽多 2，面积是 100，求矩形的长 x；

(3) 把长为 1 的木条分成两段，使较短一段的长与全长的积，等于较长一段的长的平方，求较短一段的长 x.

习题 21.1

复习巩固

1. 将下列方程化成一元二次方程的一般形式，并写出其中的二次项系数、一次项系数和常数项：

(1) $3x^2+1=6x$；　　(2) $4x^2+5x=81$；

(3) $x(x+5)=0$；　　(4) $(2x-2)(x-1)=0$；

(5) $x(x+5)=5x-10$；　　(6) $(3x-2)(x+1)=x(2x-1)$.

2. 根据下列问题列方程，并将所列方程化成一元二次方程的一般形式：

(1) 一个圆的面积是 2π m^2，求半径；

(2) 一个直角三角形的两条直角边相差 3 cm，面积是 9 cm^2，求较长的直角边的长.

3. 下列哪些数是方程 $x^2+x-12=0$ 的根？

$$-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

综合运用

根据下列问题列方程，并将所列方程化成一元二次方程的一般形式（第 4～6 题）：

4. 一个矩形的长比宽多 1 cm，面积是 132 cm^2，矩形的长和宽各是多少？

5. 有一根 1 m 长的铁丝，怎样用它围成一个面积为 0.06 m^2 的矩形？

6. 参加一次聚会的每两人都握了一次手，所有人共握手 10 次，有多少人参加聚会？

拓广探索

7. 如果 2 是方程 $x^2-c=0$ 的一个根，那么常数 c 是多少？求出这个方程的其他根.

21.2 解一元二次方程

21.2.1 配方法

问题 1 一桶油漆可刷的面积为1 500 dm^2，李林用这桶油漆恰好刷完 10 个同样的正方体形状的盒子的全部外表面，你能算出盒子的棱长吗？

设其中一个盒子的棱长为 x dm，则这个盒子的表面积为 $6x^2$ dm^2. 根据一桶油漆可刷的面积，列出方程

$$10\times 6x^2=1\ 500. \qquad ①$$

整理，得

$$x^2=25.$$

根据平方根的意义，得

$$x=\pm 5,$$

即

$$x_1=5,\ x_2=-5.$$

可以验证，5 和-5是方程①的两个根，因为棱长不能是负值，所以盒子的棱长为 5 dm.

用方程解决实际问题时，要考虑所得结果是否符合实际意义.

一般地，对于方程

$$x^2=p, \qquad (\mathrm{I})$$

(1) 当 $p>0$ 时，根据平方根的意义，方程（Ⅰ）有两个不等的实数根

$$x_1=-\sqrt{p},\ x_2=\sqrt{p};$$

(2) 当 $p=0$ 时，方程（Ⅰ）有两个相等的实数根 $x_1=x_2=0$；

(3) 当 $p<0$ 时，因为对任意实数 x，都有$x^2\geqslant 0$，所以方程（Ⅰ）无实数根.

探究

对照上面解方程（Ⅰ）的过程，你认为应怎样解方程 $(x+3)^2=5$？

在解方程（Ⅰ）时，由方程 $x^2=25$ 得 $x=\pm 5$. 由此想到：由方程

$$(x+3)^2=5, \tag{2}$$

得

$$x+3=\pm\sqrt{5},$$

即

$$x+3=\sqrt{5}，或 x+3=-\sqrt{5}. \tag{3}$$

于是，方程 $(x+3)^2=5$ 的两个根为

$$x_1=-3+\sqrt{5},\ x_2=-3-\sqrt{5}.$$

上面的解法中，由方程②得到③，实质上是把一个一元二次方程“**降次**”，转化为两个一元一次方程，这样就把方程②转化为我们会解的方程了.

练习

解下列方程：

(1) $2x^2-8=0$；　(2) $9x^2-5=3$；　(3) $(x+6)^2-9=0$；

(4) $3(x-1)^2-6=0$；　(5) $x^2-4x+4=5$；　(6) $9x^2+5=1$.

探究

怎样解方程 $x^2+6x+4=0$？

我们已经会解方程 $(x+3)^2=5$. 因为它的左边是含有 x 的完全平方式，右边是非负数，所以可以直接降次解方程. 那么，能否将方程 $x^2+6x+4=0$ 转化为可以直接降次的形式再求解呢？

解方程 $x^2+6x+4=0$ 的过程可以用下面的框图表示：

$$x^2+6x+4=0$$

$\downarrow$ 移项

$$x^2+6x=-4$$

$\downarrow$ 两边加 9 $\left(即\left(\frac{6}{2}\right)^2\right)$ 使左边配成 $x^2+2bx+b^2$ 的形式

$$x^2+6x+9=-4+9$$

$\downarrow$ 左边写成完全平方形式

$$(x+3)^2=5$$

$\downarrow$ 降次

$$x+3=\pm\sqrt{5}$$

$\downarrow$

$$x+3=\sqrt{5}，或\ x+3=-\sqrt{5}$$

$\downarrow$ 解一次方程

$$x_1=-3+\sqrt{5}，x_2=-3-\sqrt{5}$$

为什么在方程 $x^2+6x=-4$ 的两边加 9？加其他数行吗？

可以验证，$-3\pm\sqrt{5}$ 是方程 $x^2+6x+4=0$ 的两个根.

像上面那样，通过配成完全平方形式来解一元二次方程的方法，叫做**配方法**. 可以看出，配方是为了降次，把一个一元二次方程转化成两个一元一次方程来解.

例 1 解下列方程：

(1) $x^2-8x+1=0$；　　(2) $2x^2+1=3x$；　　(3) $3x^2-6x+4=0$.

分析：(1) 方程的二次项系数为 1，直接运用配方法.

(2) 先把方程化成 $2x^2-3x+1=0$. 它的二次项系数为 2，为了便于配方，需将二次项系数化为 1，为此方程的两边都除以 2.

(3) 与(2)类似，方程的两边都除以 3 后再配方.

解：(1) 移项，得

$$x^2-8x=-1.$$

配方，得

$$x^2-8x+4^2=-1+4^2,$$
$$(x-4)^2=15.$$

由此可得

$$x-4=\pm\sqrt{15},$$
$$x_1=4+\sqrt{15},\ x_2=4-\sqrt{15}.$$

(2) 移项，得

$$2x^2-3x=-1.$$

二次项系数化为 1，得

$$x^2-\frac{3}{2}x=-\frac{1}{2}.$$

配方，得

$$x^2-\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2=-\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{4}\right)^2,$$
$$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{16}.$$

由此可得

$$x-\frac{3}{4}=\pm\frac{1}{4},$$
$$x_1=1,\ x_2=\frac{1}{2}.$$

(3) 移项，得

$$3x^2-6x=-4.$$

二次项系数化为 1，得

$$x^2-2x=-\frac{4}{3}.$$

配方，得

$$x^2-2x+1^2=-\frac{4}{3}+1^2,$$
$$(x-1)^2=-\frac{1}{3}.$$

因为实数的平方不会是负数，所以 x 取任何实数时，$(x-1)^2$ 都是非负数，上式都不成立，即原方程无实数根.

一般地，如果一个一元二次方程通过配方转化成

$$(x+n)^2=p \tag{Ⅱ}$$

的形式，那么就有：

(1) 当 $p>0$ 时，方程（Ⅱ）有两个不等的实数根

$$x_1=-n-\sqrt{p}，x_2=-n+\sqrt{p}；$$

(2) 当 $p=0$ 时，方程（Ⅱ）有两个相等的实数根

$$x_1=x_2=-n；$$

(3) 当 $p<0$ 时，因为对任意实数 x，都有 $(x+n)^2\geqslant 0$，所以方程（Ⅱ）无实数根.

练习

1. 填空：

(1) x^2+10x+____$=(x+$____$)^2$；　(2) x^2-12x+____$=(x-$____$)^2$；

(3) x^2+5x+____$=(x+$____$)^2$；　(4) $x^2-\frac{2}{3}x+$____$=(x-$____$)^2$.

2. 解下列方程：

(1) $x^2+10x+9=0$；　(2) $x^2-x-\frac{7}{4}=0$；

(3) $3x^2+6x-4=0$；　(4) $4x^2-6x-3=0$；

(5) $x^2+4x-9=2x-11$；　(6) $x(x+4)=8x+12$.

21.2.2 公式法

探究

任何一个一元二次方程都可以写成一般形式

$$ax^2+bx+c=0(a\neq 0). \tag{Ⅲ}$$

能否也用配方法得出（Ⅲ）的解呢？

我们可以根据用配方法解一元二次方程的经验来解决这个问题.

移项，得

$$ax^2+bx=-c.$$

二次项系数化为1，得

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

配方，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

即

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \quad ①$$

因为 $a\neq0$，所以 $4a^2>0$. 式子 b^2-4ac 的值有以下三种情况：

(1) $b^2-4ac>0$

这时$\frac{b^2-4ac}{4a^2}>0$，由①得

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

方程有两个不等的实数根

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

(2) $b^2-4ac=0$

这时$\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$，由①可知，方程有两个相等的实数根

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}.$$

(3) $b^2-4ac<0$

这时$\frac{b^2-4ac}{4a^2}<0$，由①可知$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2<0$，而 x 取任何实数都不能使$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2<0$，因此方程无实数根.

一般地，式子 b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 根的**判别式**，通常用希腊字母“Δ”表示它，即 $\Delta=b^2-4ac$.

归纳

由上可知，当 $\Delta>0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 有两个不等的实数根；当 $\Delta=0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 有两个相等的实数根；当 $\Delta<0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 无实数根.