数学奥林匹克小丛书 高中卷 13

Shuxue Aolinpike XIAOCONG SHU

数学竞赛中的组合问题

张垚 编著

华东师范大学出版社

Shuxue

Xiao

Congshu

Shuxu

olinpike

数学奥林匹克小丛书

高中卷 13

数学竞赛中的组合问题

inpike Xiao Congshu

张垚 编著

华东师范大学出版社

图书在版编目（C I P）数据

数学奥林匹克小丛书．高中卷． 数学竞赛中的组合问题／张垚编著．—上海：华东师范大学出版社，2005.3
ISBN 7-5617-4076-X

I.数... II.张... III.数学课-高中-教学参考资料 IV.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第016379号

数学奥林匹克小丛书·高中卷

数学竞赛中的组合问题

编　　著　张　垚
策划组稿　倪　明
责任编辑　审校部编辑工作组
特约编辑　李　娜
封面设计　高　山
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
　　　　　市场部 电话 021-62865537
　　　　　门市(邮购) 电话 021-62869887
　　　　　门市地址 华东师大校内先锋路口
业务电话　上海地区 021-62232873
　　　　　华东 中南地区 021-62458734
　　　　　华北 东北地区 021-62571961
　　　　　西南 西北地区 021-62232893
业务传真　021-62860410 62602316
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路3663号
　　　　　邮编 200062

印 刷 者　华东师范大学印刷厂
开　　本　787x960 16开
印　　张　12
字　　数　207千字
版　　次　2005年4月第一版
印　　次　2005年4月第一次
印　　数　16 000
书　　号　ISBN 7-5617-4076-X/G·2316
定　　价　13.00元

出 版 人　朱杰人

本书导读

本书由知识篇、方法篇、问题篇三部分组成，分别介绍了高中数学联赛中与组合问题相关的基础知识、基本方法和几类常见的组合问题的解法．每个单元都配有例题和习题，习题均有解答．多数例题和习题选自近年来国内外数学竞赛中相当于全国高中数学联赛水平的试题，也包括少数冬令营和IMO中较易的试题和作者自己编拟的问题．本书特别注意引导读者对解决问题的思想方法进行探索、分析和总结，希望对提高读者的数学修养和解决数学竞赛中的组合问题的能力有所帮助．

张　垚　湖南师范大学数学与计算机科学学院教授，享受国务院政府特殊津贴，中国数学奥林匹克高级教练，美国《数学评论》评论员．曾任湖南省数学会副理事长兼普及工作委员会主任，并参与全国初中数学联赛、全国高中数学联赛等竞赛的命题工作．长期负责数学竞赛的培训工作，所指导的学生有10多人参加国际数学奥林匹克．著作有《数学奥林匹克的理论、方法、技巧》、《数学奥林匹克中的组合问题》等16部，发表学术论文70多篇．曾获湖南省优秀教师、全国优秀教师等称号，并获曾宪梓教育基金会高等师范院校教师奖、湖南省教委科技进步奖等奖励．

数学奥林匹克小丛书

冯志刚	第44届IMO中国队副领队 上海中学特级教师
葛　军	中国数学奥林匹克高级教练、江苏省数学会普委会副主任 南京师范大学副教授
冷岗松	中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练 上海大学教授、博士生导师
李胜宏	第44届IMO中国队领队、中国数学奥林匹克委员会委员 浙江大学教授、博士生导师
李伟固	中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练 北京大学教授、博士生导师
刘诗雄	中国数学奥林匹克委员会委员 武钢三中校长、特级教师
倪　明	数学奥林匹克小丛书总策划 华东师范大学出版社副总编辑
单　墫	第30、31届IMO中国队领队 南京师范大学教授、博士生导师
吴建平	中国数学会普委会副主任、中国数学奥委会副主席 第40届IMO中国队副领队、《中学生数学》主编
熊　斌	第46届IMO中国队领队、中国数学奥林匹克委员会委员 华东师范大学副教授
余红兵	中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练 苏州大学教授、博士生导师
朱华伟	中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练 广州大学软件所常务副所长、研究员

总　序

数学竞赛像其他竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞赛. 在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中，数学竞赛的历史最悠久、国际性强，影响也最大. 我国于 1956 年开始举行数学竞赛，当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动，并组织出版了一系列青少年数学读物，激励了一大批青年学生立志从事科学事业. 我国于 1986 年起参加国际数学奥林匹克，多次获得团体总分第一，并于 1990 年在北京成功地举办了第 31 届国际数学奥林匹克，这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位，为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明，凡是开展好的地区和单位，都能大大激发学生的学习数学的兴趣，有利于培养创造性思维，提高学生的学习效率. 这项竞赛活动，将健康的竞争机制引进数学教学过程中，有利于选拔人才. 由数学竞赛选拔的优胜者，既有踏实广泛的数学基础，又有刻苦钻研、科学的学习方法，其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者. 在美国，数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者；在波兰，著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者；在匈牙利，著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者. 匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家，产生了同它的人口不成比例的许多大数学家!

在开展数学竞赛的活动同时，各学校能加强联系，彼此交流数学教学经验，从这种意义上来说，数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”，成为培养优秀人才的有力措施.

不过，应当注意在数学竞赛活动中，注意普及与提高相结合，而且要以普及为主，使竞赛具有广泛的群众基础，否则难以持久.

当然，现在有些人过于关注数学竞赛的成绩，组织和参与都具有很强的功利目的，过分扩大数学竞赛的作用，这些都是不正确的，违背了开展数学竞赛活动的本意.这些缺点有其深层次的社会原因，需要逐步加以克服，不必因为有某些缺点，就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版.这套书，规模大、专题细.据我所知，这样的丛书还不多见.这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述，而且对竞赛题作了精到的分析解答，不少出自作者自己的研究所得，是一套很好的数学竞赛专题教程，也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员，不少是国家集训队的教练和国家队的领队.他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献，为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动.华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上，策划组织了这套丛书，花了不少心血.我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作，并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元，著名数学家，中国科学院院士，曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

前　言

组合数学历史悠久，早在几千年前，我国的《河图》、《洛书》中就已经涉及一些简单有趣的组合问题. 近20年来，由于计算机科学、编码理论、规划论、数字通讯、试验设计等学科的迅猛发展，提出了一系列需要离散数学解决的理论和实际问题，加上组合数学自身的逻辑要求提出的问题以及其他数学分支向组合数学提出的问题，使得组合数学的研究十分活跃而富有成果. 解决问题的方法和技巧更是千变万化，使这一门古老的数学分支成为一门充满了活力的数学学科.

数学竞赛中出现的组合问题往往表达形式简单明了，而求解这些问题却需要敏锐的观察力、丰富的想像力和必要的技巧，通常没有一个固定的解题模式可遵循，而且各种难易程度的问题都非常丰富，所以各种程度的智力训练和数学竞赛中，大多离不开组合问题.

本书主要按照全国高中数学联赛对组合问题的要求而编写，全书由三部分组成，第一部分为知识篇，着重介绍了全国高中联赛中涉及到的组合数学的有关知识. 第二部分为方法篇，主要介绍了全国高中联赛中解组合问题的一些常用的思想方法. 第三部分为问题篇，主要对全国高中联赛中出现得最多的几类问题，从解题思想方法上进行了初步的归纳和小结.

在例题和习题的选择方面，我们尽可能选编一些较新颖的、尤其是近几年国内外数学竞赛中相当于我国高中联赛水平的组合数学的试题，也包括了作者自己编拟的部分问题，还有个别中国数学奥林匹克(CMO)和国际中学生数学奥林匹克(IMO)中较易的问题. 在本书中我们特别注意引导读者对解决问题的思想方法进行探索、分析和总结. 希望通过这部分内容的学习，能使读者的数学修养以及解决有关数学竞赛中组合问题的能力有所提高.

编者

2004年8月

目　录

知　识　篇

方　法　篇

问 题 篇

知识篇

◎◎◎◎◎◎

1 计数原理和计数公式

一、加法原理和乘法原理

加法原理 如果做一件事,完成它有 m 类不同的方法,在第 1 类方法中有 n_1 种不同的方法,在第 2 类方法中有 n_2 种不同的方法,……,在第 m 类方法中有 n_m 种不同的方法,那么完成这件事共有 $n_1+n_2+\cdots+n_m$ 种不同的方法.

乘法原理 如果做一件事,完成它需要 m 个步骤,做第 1 步有 n_1 种不同的方法,做第 2 步有 n_2 种不同的方法,……,做第 m 步有 n_m 种不同的方法,那么完成这件事共有 $n_1n_2\cdots n_m$ 种不同的方法.

例 1 设 $S=\{1, 2, 3, \cdots, 499, 500\}$,从 S 中任取 4 个不同的数,按照从小到大的顺序排列成一个公比为正整数的等比数列,求这样的等比数列的个数.

解 设所求等比数列为 a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3(a_1, $q\in\mathbf{N}_+$, $q\geqslant 2$),则 $a_1q^3\leqslant 500$, $q\leqslant\sqrt[3]{\dfrac{500}{a_1}}\leqslant\sqrt[3]{500}$,所以 $2\leqslant q\leqslant 7$,且 $1\leqslant a_1\leqslant\left[\dfrac{500}{q^3}\right]$,即公比为 q 的等比数列有 $\left[\dfrac{500}{q^3}\right]$个.

由加法原理得满足条件的等比数列共有 $\sum\limits_{q=2}^{7}\left[\dfrac{500}{q^3}\right]=62+18+7+4+2+1=94$(个).

例 2 在各位数字都不相同的四位数中,奇数有多少个?

解 个位数字有 1, 3, 5, 7, 9 五种选取方式,千位数字只剩下 8 种选取方式,个位与千位数字选定后,百位数字有 8 种选取方式,十位数字则只有 7 种选取方式. 于是,由乘法原理得各位数字都不相同的四位数中,奇数

共有

$$8 \times 8 \times 7 \times 5 = 2\,240(\text{个}).$$

二、无重复的排列与组合

排列 从 n 个不同元素中取 $m(m \leqslant n)$ 个不同元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列. 因为这个排列中无重复元素，故又叫做无重复的排列. 从 n 个不同元素中取 $m(m \leqslant n)$ 个不同元素的排列的个数记为 A_n^m 或 P_n^m，则

$$\mathrm{A}_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!},$$

其中 $m \leqslant n$，并约定 $0! = 1$.

特别地，当 $m = n$ 时，从 n 个不同元素中取 n 个不同元素的排列，叫做 n 个不同元素的全排列. n 个不同元素的全排列的个数为

$$\mathrm{A}_n^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

组合 从 n 个不同元素中取出 $m(m \leqslant n)$ 个不同元素并成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合. 因为这个组合中无重复元素，故又叫做无重复的组合. 从 n 个不同元素中取出 $m(m \leqslant n)$ 个元素的组合的个数记为 C_n^m 或 $\binom{n}{m}$，则

$$\mathrm{C}_n^m = \frac{\mathrm{A}_n^m}{\mathrm{A}_m^m} = \frac{n(n-1) \cdot \cdots \cdot (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

例 3 由 1, 2, 3, 4, 5 可以组成多少个没有重复数字，并且大于 21 300 的正整数?

解法 1 由 1, 2, 3, 4, 5 组成的没有重复数字，并且大于 21 300 的正整数可分为 3 类：

万位数字为 3, 4, 5 的有 $\mathrm{A}_3^1 \cdot \mathrm{A}_4^4$ 个；

万位数字为 2，千位数字为 3, 4, 5 的有 $\mathrm{A}_3^1 \cdot \mathrm{A}_3^3$ 个；

万位数字为 2，千位数字为 1 的有 A_3^3 个.

由加法原理，符合条件的正整数的个数是

$$\mathrm{A}_3^1 \cdot \mathrm{A}_4^4 + \mathrm{A}_3^1 \cdot \mathrm{A}_3^3 + \mathrm{A}_3^3 = 96.$$

解法 2 由 1, 2, 3, 4, 5 组成的没有重复数字的 5 位数共有 A_5^5 个,其中只有万位数字为 1 的数不大于 21 300,这样的 5 位数有 A_4^4 个,故符合条件的正整数的个数是

$$A_5^5 - A_4^4 = 5! - 4! = 96.$$

三、可重复的排列与组合

可重复的排列 从 n 个不同元素中取 m 个元素(同一元素允许重复取出),按照一定的顺序排成一列,叫做从 n 个不同元素中取 m 个元素的可重复排列,这种排列的个数为 n^m.

这个结论不难用乘法原理证明.

可重复的组合 从 n 个不同元素中取 m 个元素(同一元素允许重复取出)并成一组,叫做从 n 个不同元素中取 m 个元素的可重复组合,这种组合的个数为 C_{n+m-1}^m.

证明 用 1, 2, …, n 表示 n 个不同元素,这时从这 n 个不同元素中取 m 个元素的可重复组合具有下列形式:

$$\{i_1, i_2, \cdots, i_m\}\ (1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_m \leqslant n).$$

因为允许重复选取,其中等号可以成立.

将上述每个组合自左向右逐个分别加上: 0, 1, 2, …, $(m-1)$, 得到 $\{j_1, j_2, \cdots, j_m\}$,其中 $j_1 = i_1$, $j_2 = i_2 + 1$, …, $j_m = i_m + (m-1)$, 满足 $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leqslant n+m-1$. 而 $\{j_1, j_2, \cdots, j_m\}$ 恰是从 $n+m-1$ 个不同元素 1, 2, 3, …, $n+m-1$ 中取 m 个不同元素的组合. 所以从 n 个不同元素中取 m 个元素的可重复的组合数为 C_{n+m-1}^m.

不全相异元素的全排列 如果 n 个元素中,分别有 n_1, n_2, …, n_k 个元素相同,且 $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, 则这 n 个元素的全排列称为不全相异元素的全排列,其不同的排列个数记为 $\begin{pmatrix} & n & & \\ n_1 & n_2 & \cdots & n_k \end{pmatrix}$,则 $\begin{pmatrix} & n & & \\ n_1 & n_2 & \cdots & n_k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$.

证明 设符合条件的排列数为 f,因为每类相同元素交换排列顺序,仍属于同一种排列,如果每类元素都换成互不相同的元素,则有 $n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_k!$ 种变化,于是由乘法原理得 n 个不同元素的排列数为 $f \cdot n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_k!$,而实际上,$n$ 个不同元素的排列数应为 $n!$,于是得 $f \cdot n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_k! = n!$, 故

有 $f=\binom{n}{n_1\quad n_2\quad \cdots\quad n_k}=\dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$.

多组组合 把 n 个相异元素分为 $k(k\leqslant n)$ 个不同的组，其中第 i 组有 n_i 个元素（$i=1,2,\cdots,k$，$n_1+n_2+\cdots+n_k=n$），则不同的分组方法的种数为 $\binom{n}{n_1\quad n_2\quad \cdots\quad n_k}=\dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$.

证明 从 n 个元素中取出 n_1 个元素有 $C_n^{n_1}$ 种方法，从剩下 $n-n_1$ 个元素中取出 n_2 个元素有 $C_{n-n_1}^{n_2}$ 种方法，再依次选出 n_3，$\cdots$，n_k 个元素，分别有 $C_{n-n_1-n_2}^{n_3}$，$\cdots$，$C_{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}^{n_k}$ 种方法，故由乘法原理得不同的分组方法的种数是

$$\begin{aligned}&C_n^{n_1}\cdot C_{n-n_1}^{n_2}\cdot\cdots\cdot C_{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}^{n_k}\\=&\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\cdot\cdots\cdot\frac{(n-n_1-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-\cdots-n_{k-1}-n_k)!}\\=&\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.\end{aligned}$$

注意 多组组合与不全相异元素的全排列的计数公式完全相同，但它们的组合意义是不相同的. 我们也可用前面在证明不全相异元素的全排列公式的方法来证明多组组合公式，我们把这个证明留给读者自己去完成.

例 4 从银行中取出伍角、壹元、贰元、伍元、拾元、伍拾元、壹百元的纸币共 10 张，共有多少种不同的取法？

解 本题为从 7 种不同的纸币中取 10 种纸币可重复的组合数，依可重复的组合数公式得不同的取法数目为

$$C_{7+10-1}^{10}=C_{16}^{6}=\frac{16\times15\times14\times13\times12\times11}{1\times2\times3\times4\times5\times6}=8\,008.$$

例 5 把 n 个不同的球，分别装入 m 个盒子中，使其中 m_1 个盒子中都有 p_1 个球，m_2 个盒子中都有 p_2 个球，$\cdots$，m_k 个盒子中都有 p_k 个球. 这里 $m=m_1+m_2+\cdots+m_k$，$n=m_1p_1+m_2p_2+\cdots+m_kp_k$，求下列情况下各有多少种不同的放法.

(1) 盒子均不相同（即可辨）；

(2) 装有相同数目的球的盒子相同（即不可辨）.

解 (1) 我们先考虑把 n 个球放入 m 个盒内都作直线排列，其排列数为 $n!$，我们把这种排列的产生分为下列几步.