普通高等教育“十一五”国家级规划教材

计算机科学组合学丛书

组合数学

（第5版）

卢开澄 卢华明 编著

清华大学出版社

计算机科学组合学丛书

组合数学

（第5版）

卢开澄　卢华明　编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是《组合数学(第4版)》的修订版，全书共分7章，分别是排列与组合、递推关系与母函数、容斥原理与鸽巢原理、Burnside引理与Pólya定理、区组设计、编码简介和组合算法简介. 丰富的实例及理论和实际相结合是本书一大特点，有利于对问题的深入理解.

本书是计算机相关专业本科生和研究生的教学用书，也可作为数学专业师生的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

组合数学/卢开澄，卢华明编著. —5版. —北京：清华大学出版社，2016
(计算机科学组合学丛书)
ISBN 978-7-302-44930-0

Ⅰ. ①组… Ⅱ. ①卢… ②卢… Ⅲ. ①组合数学 Ⅳ. ①O157

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第212913号

责任编辑：张 民
封面设计：傅瑞学
责任校对：白 蕾
责任印制：何 芊

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦A座 **邮 编**：100084
社 总 机：010-62770175 **邮 购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京国马印刷厂
经 销：全国新华书店
开 本：185mm×260mm **印 张**：18 **字 数**：437千字
版 次：2006年12月第1版 2016年11月第5版 **印 次**：2016年11月第1次印刷
印 数：1～2000
定 价：45.00元

产品编号：070980-01

序　言

电子计算机的出现是20世纪最有影响的一件大事，它改变了整个世界的面貌，人们几乎无处不感到它的存在．哪个领域如果至今还宣称它与计算机线性无关，十之八九它已落后了．电子计算机使各种难题得以解决，但也萌生出更多的相关理论问题，在这种刺激和影响下，组合数学新军突起，一跃而成为最活跃的新数学分支，虽然它所讨论的问题和所使用的工具有的可追溯到二百多年前．有的组合学家将“计算机科学”定义为研究算法的科学，它为组合数学提供了活动的空间和舞台．组合数学（分析）是算法的理论基础，它与算法的关系犹如数学分析与计算方法的关系．作者认为这门课实际上是为学习“算法与复杂性分析”做理论知识的准备．图论本是这个家族的主要成员，由于它已成长壮大，现已独立出去．

组合数学来源于实际，不少的讨论引人入胜，但初学者也往往有犯难的感觉．其实之所以觉得难，是因为还没弄懂，一旦明白了，则会恍然大悟而兴趣盎然．如果说学这门课有什么窍门，那就是从实际情况出发，以规模小的问题，模拟“沙盘推演”，寻找其规律性，然后推广及一般．

作者在实践中常有这样的体会：组合数学欲留给读者以和善可亲的形象，相比板着冷峻的面孔，要困难得多．解决方法是求助于实例．如果说法则是支撑肢体的框架，那么它将因丰富多彩的例子而丰满．本书在这方面，不论质和量都是一个亮点．不少问题饶有趣味，我们也常常为之而上下求索．第5版将依据作者近几年各自在教学实践中的经验，以怎样使读者更易接受作为出发点．

前面已提到这门课是为“算法与复杂性分析”所做的理论知识的准备，作者经验认为，计算机相关专业的本科生和研究生在学习第1～3章后继续学习第6～7章是一个不错的主意，以免有“空返”之憾．其他专业的学生则请酌情处理．

作　者

目 录

第 1 章　排列与组合

1.1　加法法则与乘法法则

组合数学的最主要内容是对离散对象的计数，计数时经常要用到两个基本法则，即加法法则和乘法法则. 在以后讨论中不特别说明都假定 A 和 B 是性质无关的两类事件.

1. 加法法则

若具有性质 A 的事件有 m 个，具有性质 B 的事件有 n 个，则具有性质 A 或性质 B 的事件有 $m+n$ 个.

例如事件 A 是大于 0 而小于 10 的偶数，即 $A=\{2,4,6,8\}$；事件 B 是大于 0 而小于 10 的奇数，即 $B=\{1,3,5,7,9\}$. 具有性质 A 的事件数 $m=4$，具有性质 B 的事件数 $n=5$. 具有性质 A 和性质 B 的事件，即大于 0 而小于 10 的正整数数目等于 $4+5=9$.

2. 乘法法则

若具有性质 A 的事件有 m 个，具有性质 B 的事件有 n 个，则具有性质 A 及性质 B 的事件有 mn 个.

［**例 1-1**］ 设某 BASIC 语言限制标识符，最多由三个字符组成，要求第 1 个字符必须是 26 个英文字母中的一个，第 2、3 字符可以是英文字母，也可以是阿拉伯数字 0,1,2,3,4,…,9. 求标识符的数目.

标识符的构成，可以是一个字符，或两个字符，最多三个字符.

一个字符组成时只能是 26 个英文字母.

两个字符组成时第 1 个字符是 26 个英文字母之一，第 2 个字符可能是 26 个英文字母及 10 个阿拉伯数字，共 36 个. 根据乘法法则两个字符构成的标识符有

$$26 \times 36 = 936$$

三个字符构成的标识符，其中第 1 个字符有 26 个，第 2 个和第 3 个字符有 36 个，故三个字符构成的标识符数为

$$26 \times 36 \times 36 = 33696$$

根据加法法则，最多由三个字符构成的标识符数目为

$$N = 26 + 936 + 33696 = 34658$$

［**例 1-2**］ 求小于 10000 的正整数中含有数字 1 的数的个数.

小于 10000 的正整数可以看成是由 0,1,2,…,8,9 中取 4 个数构成的. 但 0000 不在正整数范围内，故小于 10000 的正整数数目根据乘法法则应为 $10^4-1=9999$ 个.

同理，4 位中不含 1 的数的数目应为

$$9^4 - 1 = 6561 - 1 = 6560$$

故小于 10000 并含有 1 的数的个数为

$$9999 - 6560 = 3439$$

本题解法不是直接去求含有 1 的数的数目，而是求不含 1 的数的数目. 全体减去不含 1

的数剩下的就是含有数 1 的数的个数.

［**例 1-3**］ 长度为 n 的 0,1 符号串的数目为 2^n.

假定 $a=a_1a_2\cdots a_n$, $a_i\in[0,1]$, $i=1,2,\cdots,n$,根据乘法法则立即可得 0,1 符号串的个数为 $2^n=\underbrace{2\cdot 2\cdot\cdots\cdot 2}_{n个}$,例如 $n=3$,有

000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111

或表示为图 1-1.

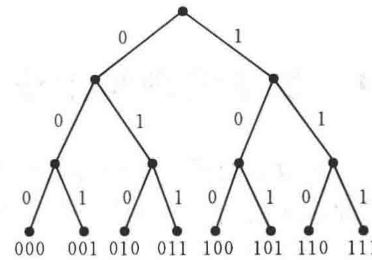


图 1-1

［**例 1-4**］ 遗传物质 DNA 是由 T,C,A,G 四种化合物组成的链,由 T,C,A,G 它们的不同排列顺序确定遗传信息,称为遗传编码. 在遗传学上 T 为胸腺嘧啶,C 为胞嘧啶,A 为腺嘌呤,G 为鸟嘌呤.

人类的 DNA 链长度为 2.1×10^{10}. 根据乘法法则,人类的 DNA 链的数目 N 为

$$N=4^{2.1\times10^{10}}=(4^{2.1})^{10^{10}},$$

但

$$4^{2.1}=18.379>10^{1.26},$$

故

$$N>(10^{10^{10}})^{1.26}.$$

［**例 1-5**］ n 元布尔函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的数目.

n 个布尔目变元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, $x_i=(0,1)$, $i=1,2,\cdots,n$,根据乘法法则可能有 $\underbrace{2\cdot 2\cdot\cdots\cdot 2}_{n项}=2^n$ 种指派,令 2^n 个不同指派为

$$a_1,a_2,\cdots,a_{2^n}$$

对每个指派,布尔函数取值为(0,1),故不同的布尔函数的数目为

$$\underbrace{2\cdot 2\cdot\cdots\cdot 2}_{2^n}=2^{2^n}$$

以 $n=2$ 为例,(x_1,x_2) 有(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),共 4 种指派,而 $f(x_1,x_2)$ 有 $2^4=16$ 种可能. 相同的 (x_1,x_2),而函数值不全相同,表示为不相同的布尔函数,见表 1-1.

表 1-1

x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f_i=$		0	$x_1\wedge x_2$	$x_1\wedge\bar{x}_2$	x_1	$\bar{x}_1\wedge x_2$	x_2	$(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2)\wedge(x_1\vee x_2)$	$x_1\vee x_2$

x_1	x_2	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f_i=$		$\bar{x}_1\wedge\bar{x}_2$	$(\bar{x}_1\vee x_2)\wedge(x_1\vee\bar{x}_2)$	$\bar{x}_2$	$x_1\vee\bar{x}_2$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_1\vee x_2$	$\bar{x}_1\vee\bar{x}_2$	1

其中 $\overline{1}=0,\overline{0}=1$，并满足：

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

，

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

例如$(\overline{x_1}\vee x_2)\wedge(x_1\vee\overline{x_2})$列表计算见表 1-2.

表 1-2

x_1	x_2	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$\overline{x_1}\vee x_2$	$x_1\vee\overline{x_2}$	$(\overline{x_1}\vee x_2)\wedge(x_1\vee\overline{x_2})$	
0	0	1	1	1	1	1	
0	1	1	0	1	0	0	
1	0	0	1	0	1	0	
1	1	0	0	1	1	1	

［**例 1-6**］ $n=7^3\times11^2\times13^4$，求除尽 n 的整数个数.

显然能除尽 n 的整数是

$$7^{l_1}\times11^{l_2}\times13^{l_3},\quad 0\leqslant l_1\leqslant3,\ 0\leqslant l_2\leqslant2,\ 0\leqslant l_3\leqslant4.$$

根据乘法法则，能除尽 n 的数的数目为

$$4\times3\times5=60$$

［**例 1-7**］ 有 a,b,c,d,e 这 5 个字，从中取 6 个构成一组字符串. 要求：(1)第 1 个和第 6 个必须是子音 b,c,d；(2)每一字符串都必有 a,e 两个母音，且 a,e 不相邻；(3)相邻两子音不允许相同. 求字符串的数目.

根据要求，两个母音 a,e 有以下 3 种格式：(1)即 a,e 位于第 2 和第 4 位，或记为(2,4)格式；(2)(2,5)格式；(3)(3,5)格式.

(2,4)： • ○ • ○ • •

(2,5)： • ○ • • ○ •

(3,5)： • • ○ • ○ •

其中 • 表示子音，○表示母音. 单个子音有 3 种选择，一对子音字符只有 3×2 种选择.

(2,4)格式有 $3\times2\times3\times2\times3\times2=3^3\times2^3$ 种方案，

(2,5)格式有 $3\times2\times3\times2\times2\times3=3^3\times2^3$ 种方案，

(3,5)格式有 $3\times2\times2\times3\times3\times2=3^3\times2^3$ 种方案.

根据加法法则所求字符串的数目 n 有

$$n=3\times3^3\times2^3=3^4\times2^3=81\times8=648$$

［**例 1-8**］ 有日文书 5 册，英文书 7 册，中文书 10 册，若从中取两册不同文字的书有几种可能？若取两册是相同文字的又有多少种方案？若取两本不论是什么文字的又有几种方案？

(1) 取两本不同文字的书，根据乘法法则有：

① 英、日各一册的有 $n_1=5\times7=35$ 种可能；

② 中、日各一册的有 $n_2=10\times5=50$ 种可能；

③ 中、英各一册的有 $n_3=10\times7=70$ 种可能.

再根据加法法则取两册不同文字的书的方案数

$$N_1 = 35 + 50 + 70 = 155 \text{ 种}$$

(2) 取两册书是相同文字的方案数分别有：

① 同为中文：$n_1' = (10 \times 9)/2 = 45$；

第 1 本有 10 种可能，第 2 本有 9 种可能，但第 1 本为 a，第 2 本为 b，和第 1 本为 b，第 2 本为 a 情况相同，重复计算一次，故除以 2.

② 同为英文：$n_2' = 7 \times 6/2 = 21$；

③ 同为日文：$n_3' = 5 \times 4/2 = 10$.

根据加法法则取两册，为同文字的方案数

$$N_2 = 45 + 21 + 10 = 76 \text{ 种}$$

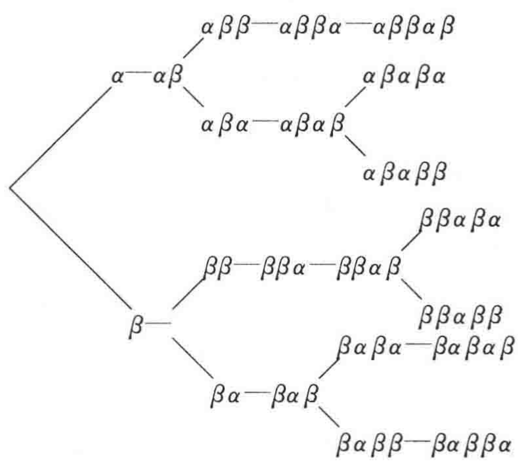
(3) 不考虑文字相同与否，根据加法法则

$$N_3 = 155 + 76 = 231 \text{ 种，}$$

或从 22 本书取两册有 $22 \times 21/2 = 231$ 种.

[例 1-9] 由 26 个英文字母构成长度为 5 的字符串，要求：(1)6 个母音 a,e,i,o,u,y 不相邻；(2)其余 20 个子音不存在 3 个相邻；(3)相邻的子音不相同. 试求有多少个这样的字符串.

用 α 表示 a,e,i,o,u,y 的集合，β 表示其余 20 个子音的集合，根据要求，这样的字符串其结构可表示为



在此，"—"表示过程，并非其他运算.

根据乘法法则有：

(1) $\alpha\beta\beta\alpha\beta$ 型

$$n_1 = 6 \times 20 \times 19 \times 6 \times 20 = 6^2 \times 20^2 \times 19；$$

(2) $\alpha\beta\alpha\beta\alpha$ 型

$$n_2 = 6 \times 20 \times 6 \times 20 \times 6 = 6^3 \times 20^2；$$

(3) $\alpha\beta\alpha\beta\beta$ 型

$$n_3 = 6 \times 20 \times 6 \times 20 \times 19 = 6^2 \times 20^2 \times 19；$$

(4) $\beta\beta\alpha\beta\alpha$ 型

$$n_4 = 20 \times 19 \times 6 \times 20 \times 6 = 6^2 \times 20^2 \times 19；$$

(5) $\beta\beta\alpha\beta\beta$ 型

$$n_5 = 20 \times 19 \times 6 \times 20 \times 19 = 6 \times (20 \times 19)^2；$$

(6) $\beta\alpha\beta\alpha\beta$ 型

$$n_6 = 20\times 6\times 20\times 6\times 20 = 6^2\times 20^3;$$

(7) $\beta\alpha\beta\beta\alpha$ 型

$$n_7 = 20\times 6\times 20\times 19\times 6 = 6^2\times 20^2\times 19.$$

根据加法法则

$$\begin{aligned} n &= n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6+n_7 \\ &= 6\times 20^2[6\times 19+6^2+6\times 19+6\times 19+19^2+6\times 20+6\times 19] \\ &= 6\times 20^2[24\times 19+6^2+6\times 20] \\ &= 6\times 20^2\times 973 = 2335200. \end{aligned}$$

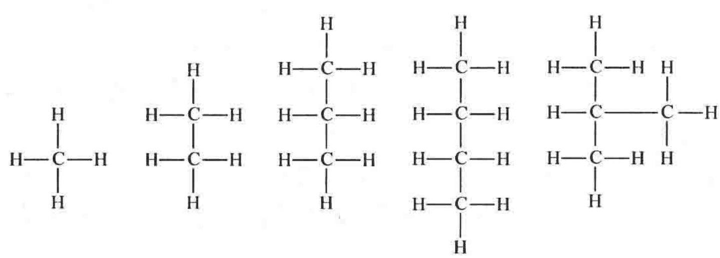
1.2 一一对应

一一对应是计数时常用的一种技巧，若性质 A 的计数比较困难，性质 B 的计数比较容易，但性质 A 和性质 B 一一对应，则对 A 的计数可转换为对性质 B 的计数.

最有趣而且直观的一个例子，比如有 100 位乒乓球选手通过淘汰赛，最后产生一名冠军，先分 50 对比赛，第一轮结束留下 50 名胜利者. 第二轮将 50 名第一轮胜出的选手分成 25 对进行比赛，25 名胜利者参加第三轮比赛，分 12 组，其中一人直接参加第四轮比赛. 第四轮开始时 13 名选手，分 6 对比赛，一人直接进入第五轮，第五轮有 7 人，分 3 组，同样有一个直接进入第六轮；第六轮有四人，分两组，其中胜者参加最后的决赛. 现统计共进行多少对比赛，总比赛台数 $50+25+12+6+3+2+1=99$.

其实比赛的台数和每一场比赛淘汰一名选手一一对应，100 名选手要选出一名单打冠军，必须淘汰 99 名，故必须进行 99 台比赛. 1000 位选手要选出一名单打冠军，不必犹豫回答要进行 999 台比赛.

[例 1-10] 碳氢化合物 C_nH_{2n+2}，随 n 的不同有如下不同的支链，见图 1-2.



n=1 甲烷　n=2 乙烷　n=3 丙烷　n=4 丁烷　n=4 异丁烷

图 1-2

这说明 C_nH_{2n+2} 的每一支链和一棵有 $3n+2$ 个顶点的树一一对应，要求树叶的数目为 $2n+2$，内点的数目为 n，内点的线度为 4. 比如图 1-2 的 $n=4$，这样的树有两个，一个对应丁烷，一个对应异丁烷. 构造碳氢化合物 C_nH_{2n+2} 的问题可转换为图论问题. 只要计算符合上述条件的树的数目，便可确定对应的不同化合物的数目，而且列举满足条件的树的结构便可提供对应化合物支链的构造. 例如 $n=3$ 的 C_3H_6，图 1-3 有两个图，从图论的观点看是同构，

他们的相关位置一样，即他们点和边的连接关系是一致的.

定理 1-1(Cayley)　过 n 个有标志顶点的树的数目等于 n^{n-2}.

此定理说明用 $n-1$ 条边将 n 个已知的顶点连接起来的连通图的个数为 n^{n-2}. 也可以这样理解，将 n 个城市连接起来的树状公路网络有 n^{n-2} 种可能方案. 所谓树状，指的是用 $n-1$ 条边将 n 个顶点构成一个连通图. 当然，建造一个树状公路网将 n 个城市连接起来，应求其中长度最短，造价最省的一种，或效益最大的一种. Cayley 定理只是说明可能方案的数目.

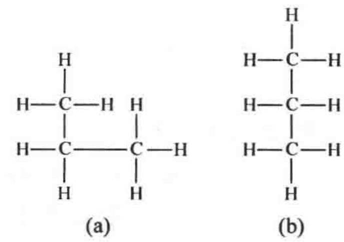


图　1-3

Cayley 定理的证明方法有许多，下面采用最聪明的一一对应法. 不失一般性，假定已知的 n 个顶点标志为 $1,2,\cdots,n$.

假定 T 是其中一棵树，树叶中有标号最小者，设为 a_1，a_1 的邻接点为 b_1，从图中消去 a_1 点和边 (a_1,b_1). b_1 点便成为消去后余下的树 T_1 的顶点. 在余下的树 T_1 中寻找标号最小的树叶，设为 a_2，a_2 的邻接点为 b_2，从 T_1 中消去 a_2 及边 (a_2,b_2). 如此步骤继续 $n-2$ 次，直到最后剩下一条边为止. 于是一棵树 T 对应一序列

$$b_1,\ b_2,\cdots,b_{n-2}$$

$b_1,b_2,\cdots,b_{n-2}$ 是 1 到 n 中的数，并且允许重复.

反过来从 $b_1b_2\cdots b_n$ 可以恢复树 T 本身，因为消去的是树叶中标号最小的，而且它和 b_1 是邻接的. 即给出一序列

$$b_1,b_2,\cdots,b_{n-2}$$

其中 $1\leqslant b_i\leqslant n$，$i=1,2,\cdots,n-2$. 可恢复与之对应的树，方法如下：有两个序列，一个是

$$1,2,\cdots,n \tag{1-1}$$

另一个是

$$b_1,b_2,\cdots,b_{n-2} \tag{1-2}$$

在序列(1-1)中找出第一个不出现在序列(1-2) $b_1,b_2,\cdots,b_{n-2}$ 中的数，这个数显然便是 a_1，同时形成边 (a_1,b_1)，并从(1-1)中消去 a_1，从(1-2)中消去 b_1. 在余下的(1-1)，(1-2)序列中继续以上的步骤 $n-2$ 次，直到序列(1-2)成为空集为止. 这时序列(1-1)剩下两个数 a_k,b_k. 边 (a_k,b_k) 是树 T 的最后一条边.

［**例 1-11**］　$n=6$，由图 1-4 根据上述的步骤可得序列 $b_1=b_2=b_3=b_4=1$，即图 1-4 对应序列 1 1 1 1. 这个过程很容易，请读者自己来做做看. 这是一个极端的例子，反过来已知

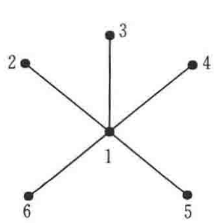


图　1-4

$$\begin{cases}(1,2,3,4,5,6) & \text{序列(1)}\\ (1,1,1,1), & \text{序列(2)}\end{cases}$$

恢复树 T.

序列(1)中第一个不在序列(2)中出现的数是 2. 故(2,1)是树的一条边. 从序列(1)中消去 2，从序列(2)中消去第 1 个数 1 并继续以上步骤.

$$\begin{cases}(1,3,4,5,6)\\(1,1,1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(1,4,5,6)\\(1,1)\end{cases}\quad (3,1)\text{是树的一条边.}$$

$\begin{cases}(1,4,5,6)\\(1,1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(1,5,6)\\(1)\end{cases}$ (4,1)是 T 树的一条边,

$\begin{cases}(1,5,6)\\(1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(1,6)\\\phi\end{cases}$ (5,1)是树的边.(1,6)是 T 的最后一边.

［**例 1-12**］ 以图 1-5 为例说明以上的步骤.

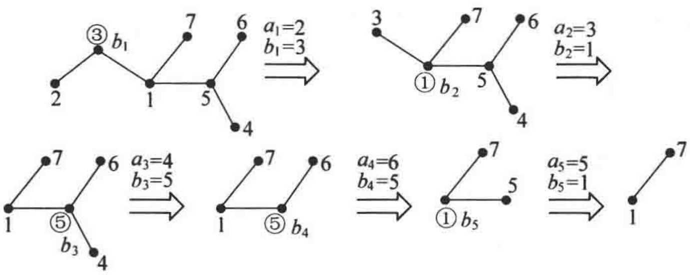


图 1-5

得$(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)=(3,1,5,5,1)$,$n=7$.

回过来从(3,1,5,5,1)恢复树 T,

$\begin{cases}(1,②,3,4,5,6,7)\\(③,1,5,5,1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(1,③,4,5,6,7)\\(①,5,5,1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(1,④,5,6,7)\\(⑤,5,1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(1,5,⑥,7)\\(⑤,1)\end{cases}\Rightarrow$

$\begin{cases}(1,⑤,7)\\(①)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(1,7)\\\phi.\end{cases}$

图 1-6 中假定已知各顶点的标号,有标志 * 的边是新加的边.

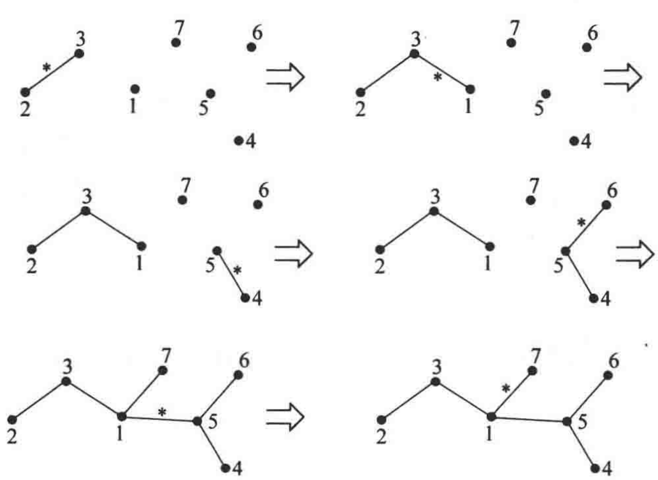


图 1-6

上面的讨论解决了由过 n 个已知标号的顶点的树,可推出序列 $b_1,b_2,\cdots,b_{n-2}$,$1\leqslant b_i\leqslant n$,$i=1,2,\cdots,n-2$.反过来从已知序列:$b_1,b_2,\cdots,b_{n-2}$,其中 $1\leqslant b_i\leqslant n$,$i=1,2,\cdots,n-2$,可推出一个过 n 个已知标号的顶点的树,即过 n 个已知标号的顶点的树和序列 $b_1b_2\cdots b_{n-2}$一一对应,根据乘法法则可得,过 n 个有标号的顶点的树的数目,由于 $1\leqslant b_i\leqslant n$, $i=1,2,\cdots,n-2$,故为 n^{n-2}个.

Cayley 定理的证明过程实际上是提供了构造过 n 个有标号顶点的树的方法.

1.3 排列与组合

1.3.1 排列与组合的模型

从 n 个元素中任取 r 个元素一组,若不考虑它们的顺序时,则称为从 n 中取 r 的组合,它的方案数以 $C(n,r)$ 或 $\binom{n}{r}$ 表示.

n 个元素中取 r 个按顺序排成一列,称为从 n 中取 r 的排列,其排列的方案数以 $P(n,r)$ 表示.

例如从 $\{A,B,C,D\}$ 中取 3 个为一组,可有

$$(A,B,C),\ (A,B,D),\ (A,C,D),\ (B,C,D)$$

4 个组,故 $C(4,3)=4$.

将 (A,B,C) 进行排列可有 ABC,ACB,BAC,BCA,CAB,CBA;

将 (A,B,D) 进行排列可有 ABD,ADB,BAD,BDA,DAB,DBA;

将 (A,C,D) 进行排列可有 ACD,ADC,CAD,CDA,DAC,DCA;

将 (B,C,D) 进行排列可有 BCD,BDC,CBD,CDB,DBC,DCB.

故 $P(4,3)=24$.

从 n 中取 r 个排列的模型:可以看作 r 个盒是有标志的,n 个球也是有区别的,取 r 个球放进盒子,且无一空盒.

$$\boxed{(1)}\quad \boxed{(2)}\quad \boxed{(3)}\quad \cdots \quad \boxed{(r)}$$

不失一般性,记球的标志为 $1,2,\cdots,n$. 取一球放进第 1 个盒子,有 n 种选择可能. 再从余下的 $n-1$ 个球中取一球放进第 2 个盒子,有 $n-1$ 种选择可能,依此类推,最后第 r 次从 $n-r+1$ 个球中取 1 球放进第 r 个盒子,有 $n-r+1$ 种可能选择,根据乘法法则有

$$\begin{aligned} P(n,r) &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

取 n 个有标志的球的全体进行排列,称为 n 的全排列,其排列数为

$$n!$$

这里补充定义

$$0!=1$$

从 n 个元素中取 r 个进行组合的模:例如 n 个球是有标志的,r 个盒子是无区别的,从 n 个球中取 r 个装进盒子,每盒一球,无一空盒.

排列与组合的模型的区别在于盒子,排列的盒子有区别,组合的盒子无区别. 放进 r 个盒子的球的全排列为 $r!$,这就是组合的重复度,故

$$C(n,r)=\frac{P(n,r)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$